Математическая логика и теория алгоритмов:

Неразрешимые проблемы

Институт Информационных Технологий

ЧелГУ, 2013

Разрешимые и перечислимые множества

A - алфавит

A^* - множество слов из этого алфавита

$L \subset A^*$ - некоторое множество слов

Множество ***L*** называется *разрешимым*, если существует алгоритм, при подаче на вход которому произвольного слова над ***A*** за конечное число шагов определяется, принадлежит ли это слово множеству ***L***. Такой алгоритм называется *разрешающим*.

Множество L называется *перечислимым*, если существует такой алгоритм, который выводит на выход все слова множества ***L*** и только их. Такой алгоритм называется *перечисляющим*.

Это скучный слайд с терминологией

Разрешимые и перечислимые множества

Палиндром – слово, которое одинаково читается в обе стороны: *казак, заказ, наган, доход и т.п.*

Разрешимо ли множество палиндромов? Перечислимо ли оно?

Разрешимо ли множество простых чисел в десятичной записи в множестве всех натуральных чисел? Перечислимо ли оно?

Разрешимые и перечислимые множества

Палиндром – слово, которое одинаково читается в обе стороны: *казак, заказ, наган, доход и т.п.*

Разрешимо ли множество палиндромов? Перечислимо ли оно?

> *Да, перечислимо:* можно указать алгоритм, который один за другим выводит палиндромы.
>
> *Да, разрешимо:* можно указать алгоритм, который за конечное число шагов определяет, палиндром ли указанное слово.

Разрешимо ли множество простых чисел в десятичной записи в множестве всех натуральных чисел? Перечислимо ли оно?

Разрешимые и перечислимые множества

$f: L \to A^*$ называется *вычислимой*, если существует алгоритм, при подаче на вход которому слова ***a*,** за конечное число шагов вычисляется результат, равный:

$f(a)$ если $a \in L$
λ иначе

В случае, если для слова ***a***, не принадлежащего ***L*,** работа алгоритма всё-таки не определена, функция называется *полувычислимой*.

Замечание:
Существуют невычислимые функции.

Массовые проблемы

Проблемы создания универсального алгоритма, решающего задачи в некотором классе, называют *массовыми проблемами*.

Пример:
Можно ли разрешить множество всех алгоритмов, корректно работающих с заданными начальными данными? Т.е. можно ли построить универсальный алгоритм, который это проверяет?

Или, более конкретно:
Найти общий метод, позволяющий определить применимость машины Тьюринга в заданном начальном состоянии к заданной строке входных данных.

Если для массовой задачи существует алгоритм, решающий её, то об этой задаче говорят как об *алгоритмически разрешимой проблеме*.

Это скучный слайд с терминологией

Алгоритмически неразрешимые проблемы

Теорема: Не существует алгоритма (машины Тьюринга), позволяющего по описанию произвольного алгоритма и его исходных данных определить, останавливается ли этот алгоритм на этих данных или работает бесконечно.

Причины:

Отсутствие общего метода решения задачи

Информационная неопределенность задачи

Логическая неразрешимость

Алгоритмически неразрешимые проблемы

Отсутствие общего метода решения задачи

Проблема 1 : Распределение девяток в записи числа π

Определим f(n) = i

Номер позиции самой крайней 9-ки

Количество 9-ок которые ищем

Вычисление f(n) связано с вычислением последующих цифр в разложении , до тех пор, пока мы не обнаружим n девяток, однако у нас нет **общего метода вычисления** f(n), поэтому для некоторых n вычисления могут продолжаться бесконечно – мы даже не знаем в принципе (по природе числа) существует ли решение для всех n.

Алгоритмически неразрешимые проблемы

Отсутствие общего метода решения задачи

Проблема 2: Вычисление совершенных чисел;

Совершенные числа – это числа, которые равны сумме своих делителей, например: 28 = 1+2+4+7+14.

алгоритм должен перебирать все числа подряд, проверяя их на совершенность

не знаем, множество совершенных чисел конечно или счетно

Отсутствие общего метода решения не позволяет ответить на вопрос об останове алгоритма

Алгоритмически неразрешимые проблемы

Информационная неопределенность задачи

Проблема 1: Позиционирование машины Поста на последний помеченный ящик

VVV	V	VVVV	VVV	V

Задача состоит установке головки на самый правый помеченный ящик последнего кортежа

Алгоритмически неразрешимые проблемы

Логическая неразрешимость

Проблема 1: Проблема «останова» (см. Теорема слайд 7);

Проблема 2: Проблема эквивалентности алгоритмов;
По двум произвольным заданным алгоритмам (например, по двум машинам Тьюринга) определить, будут ли они выдавать одинаковые выходные результаты на любых исходных данных.

Проблема 3: Проблема тотальности;
По произвольному заданному алгоритму определить, будет ли он останавливаться на всех возможных наборах исходных данных. Другая формулировка этой задачи – является ли частичный алгоритм P всюду определённым?