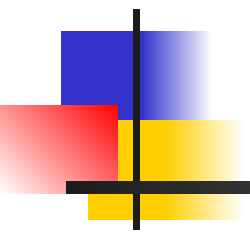
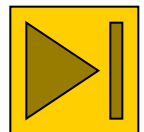


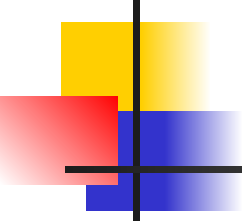
Моделирование как метод познания

Моделирование – это метод познания, состоящий в создании и исследовании моделей

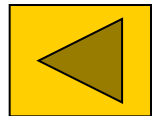


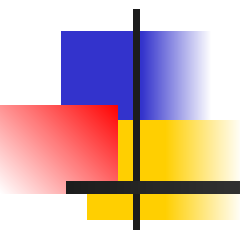
Модель – это некий
объект-заменитель,
который отражает
некоторые существенные
свойства изучаемого
явления или процесса





Модель (фр.сл. *modele*, ит. сл. *modelo*, лат. сл. *modelus*) – мера, образец





Один и тот же объект
может иметь
множество моделей,
а разные объекты
могут описываться
одной моделью

Человек:

- Кукла
- Манекен
- Скелет
- Скульптура

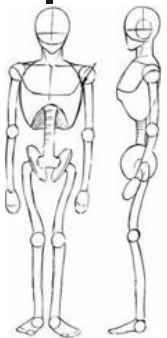
Реальный
объект -
оригинал



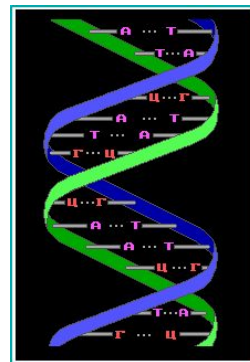
Модели

Зачем нужно много моделей?

! Тип модели определяется целями моделирования!



изучение
строения
тела



изучение
наследственности

учет граждан
страны



примерка
одежды

тренировка
спасателей



Что можно моделировать?

Модели объектов:

- уменьшенные копии зданий, кораблей, самолетов, ...
- модели ядра атома, кристаллических решеток
- чертежи
- ...

Модели процессов:

- изменение экологической обстановки
- экономические модели
- исторические модели
- ...

Модели явлений:

- землетрясение
- солнечное затмение
- цунами
- ...

Когда используют моделирование:

- оригинал не существует
 - древний Египет
 - последствия ядерной войны
- исследование оригинала опасно для жизни или дорого:
 - управление ядерным реактором
 - испытание нового скафандра для космонавтов
 - разработка нового самолета или корабля
- оригинал сложно исследовать непосредственно:
 - Солнечная система, галактика (большие размеры)
 - атом, нейтрон (маленькие размеры)
 - процессы в двигателе внутреннего сгорания (очень быстрые)
 - геологические явления (очень медленные)
- интересуют только некоторые свойства оригинала
 - проверка краски для фюзеляжа самолета

Цели моделирования

- **исследование оригинала**

изучение сущности объекта или явления

- **анализ («что будет, если ...»)**

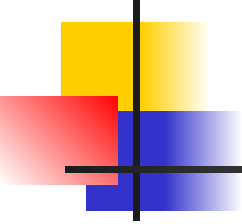
научиться прогнозировать последствия различных воздействий на оригинал

- **синтез («как сделать, чтобы ...»)**

научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

- **оптимизация («как сделать лучше»)**

выбор наилучшего решения в заданных условиях



Классификация моделей по способу представления:

Модели

Материальные
(Предметные)

Информационные
(Знаковые)

Материальные модели

определение

Воспроизводят геометрические и физические свойства объекта, всегда имеют реальное воплощение

пример

Детские игрушки, чучела птиц, глобусы, модели самолетов, кораблей



Информационные модели

определение

Не имеют материальной основы строятся на информации

пример

Представляют объекты и процессы в форме схем, чертежей, таблиц, формул, текстов и т.д.



$$\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \sqrt{9 - 4x^2} = 0$$

Информационные модели

**Знаковые
модели**

**Выражаются
средствами
естественного
или формального
языка**

**Рисунки,
тексты,
графики,
схемы и т.д.**

**Вербальные
модели**

**Выражаются в
мысленной или
разговорной
форме**

**Словесное
описание,
мысленный
образ объекта**

Типы знаковых информационных моделей

Графические -

схемы
карты
чертежи
графики
графы

Табличные -

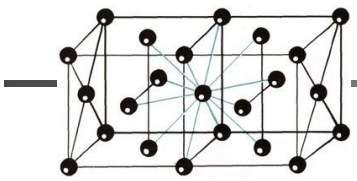
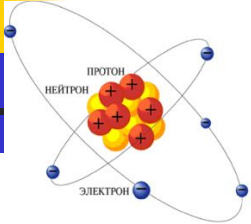
объект - свойство
объект - объект
двоичные матрицы
прочие

Математические -

описание соотношений
между количественными
характеристиками
объекта моделирования
на языке математики

Классификация моделей по области применения

- **учебные** (в т.ч. тренажеры)



- **опытные** – при создании новых технических средств



- **научно-технические** аэродинамическая труба

испытания в опытном бассейне



имитатор солнечного излучения



вакуумная камера в Институте космических исследований



Большой андронный коллайдер

Классификация моделей по области применения

• имитационные

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия;
- максимальный учет всех факторов;
- только численные результаты;



Задача – найти лучшее решение методом проб и ошибок (многократные эксперименты)!

Примеры:

- испытания лекарств на животных
- математическое моделирование биологических систем
- модели бизнеса и управления
- модели процесса обучения

Классификация моделей по области применения

• **игровые** – учитывающие действия противника

Примеры:

- ❑ модели экономических ситуаций
- ❑ модели военных действий
- ❑ спортивные игры
- ❑ тренировки персонала



Задача – найти лучший вариант действий в самом худшем случае!

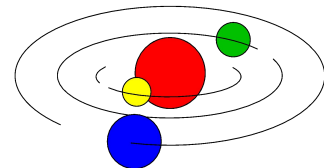
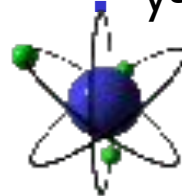
Классификация моделей с учетом фактора времени:

- Статические;
- Динамические.

Если модель учитывает изменение свойств моделируемого объекта от времени, то модель называется динамической, в противном случае статической.

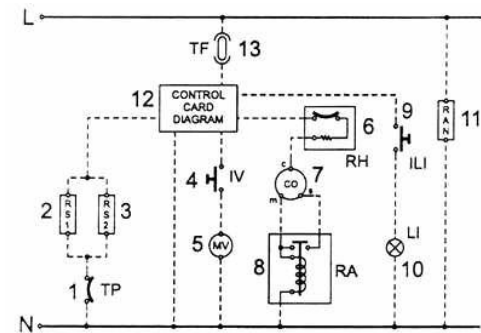
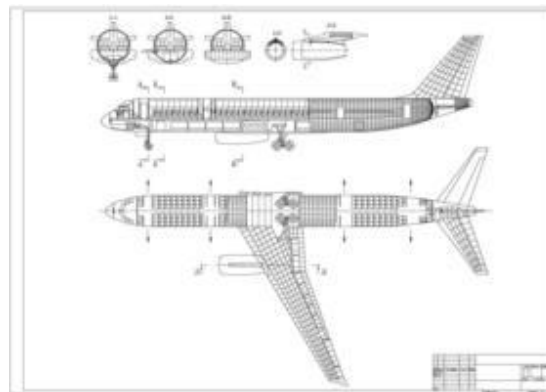
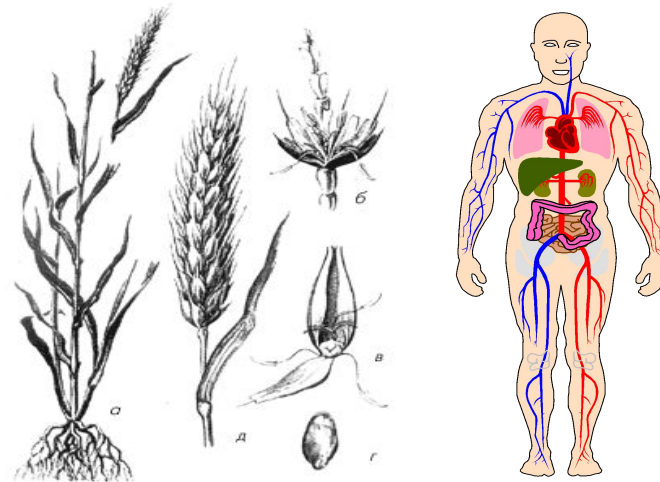
■ Примеры:

- динамические:
 - заводные игрушки;
 - модель движения тела;
 - явления природы (молния, землетрясение, цунами);
 - история болезни;
 - видеозапись события;
- статические:
 - глобус;
 - Фотография;
 - мягкие игрушки;
 - учебники.



Классификация моделей по области использования:

- Биологические;
- Исторические;
- Физические;
- И др.



Классификация моделей по характеру связей

• детерминированные

- связи между входными и выходными величинами жестко заданы (формулы, законы)
- при одинаковых входных данных каждый раз получаются одинаковые результаты

Примеры

- движение тела без учета ветра
- расчеты по известным формулам

• вероятностные (стохастические)

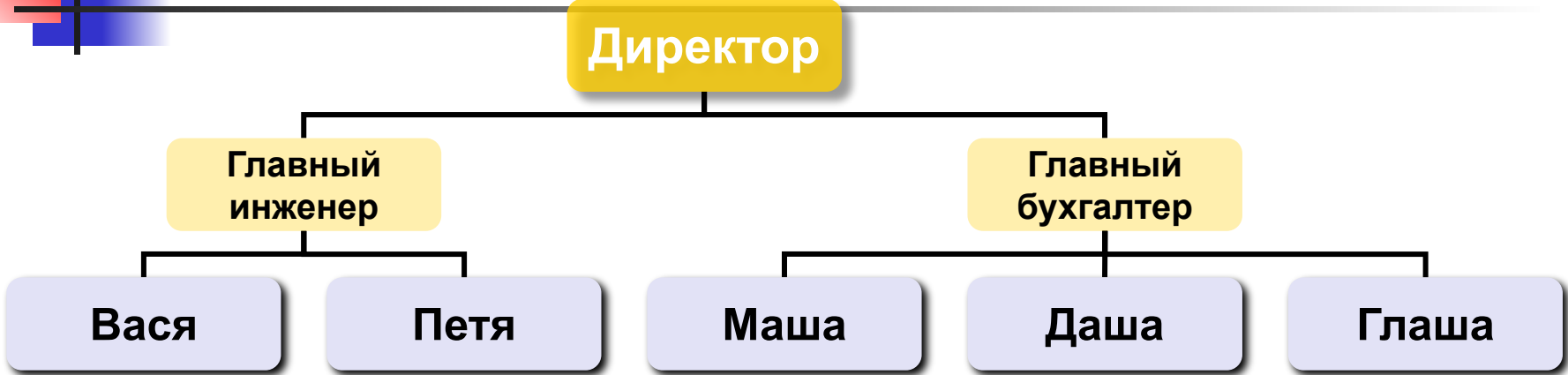
- учитывают случайность событий в реальном мире
- при одинаковых входных данных каждый раз получаются немного разные результаты

Примеры

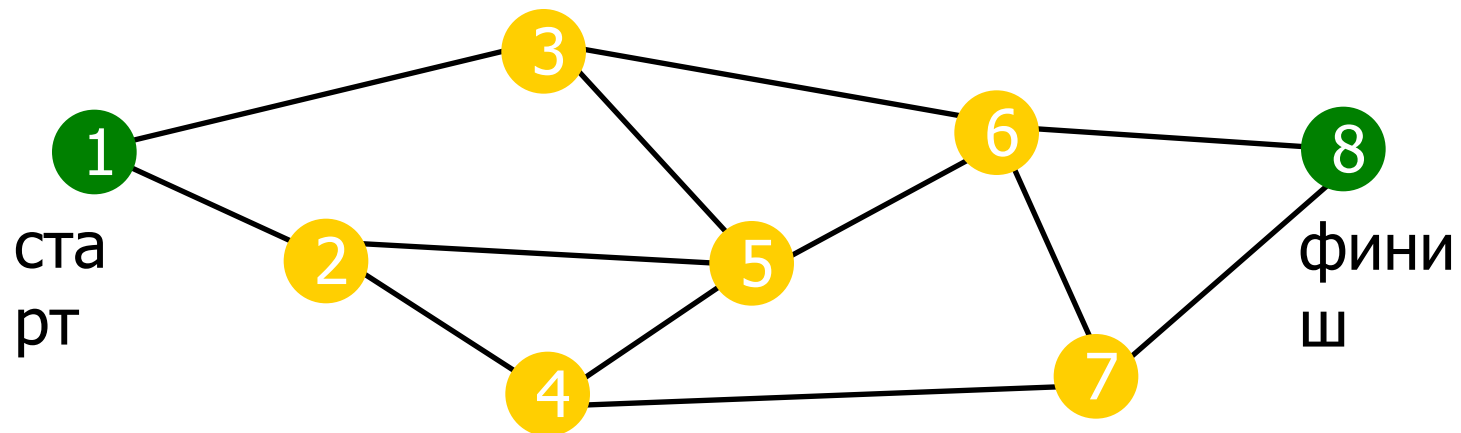
- движение тела с учетом ветра
- броуновское движение частиц
- модель движения судна на волнении
- модели поведения человека

Классификация информационных моделей по структуре

- табличные модели
- иерархические (многоуровневые) модели



- сетевые модели (графы)



Адекватность модели

Адекватность – совпадение существенных свойств модели и оригинала:

- результаты моделирования согласуются с выводами теории (законы сохранения и т.п.)
- ... подтверждаются экспериментом



Адекватность модели можно доказать только экспериментом!

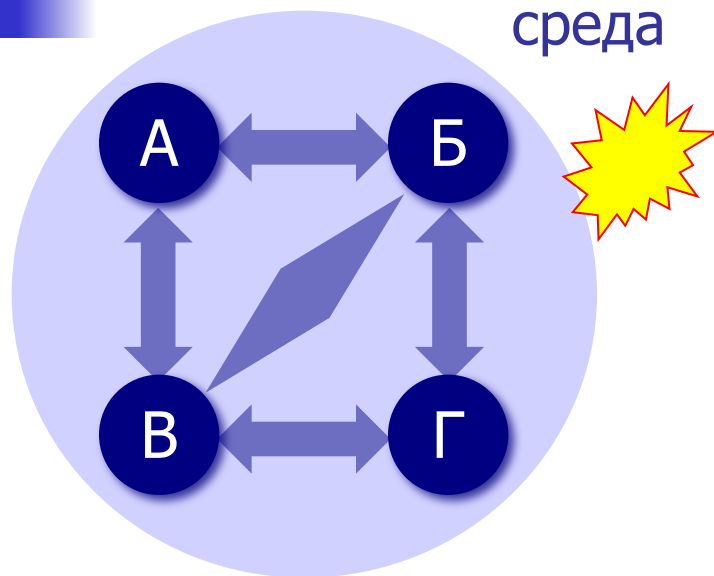
Модель всегда отличается от оригинала



Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Системный подход

Система – группа объектов и связей между ними, выделенных из среды и рассматриваемых как одно целое.



Примеры:

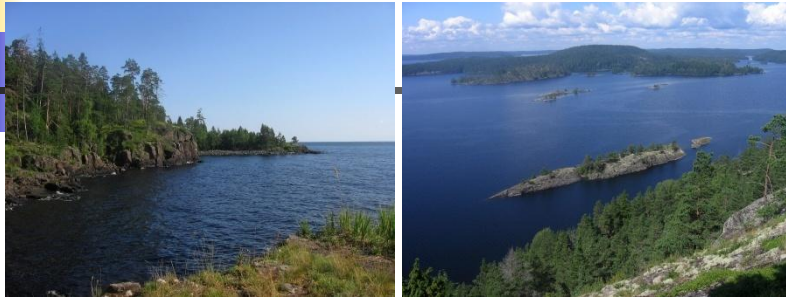
- семья
- экологическая система
- компьютер
- техническая система
- общество



Система обладает (за счет связей!) особыми свойствами, которыми не обладает ни один объект в отдельности!

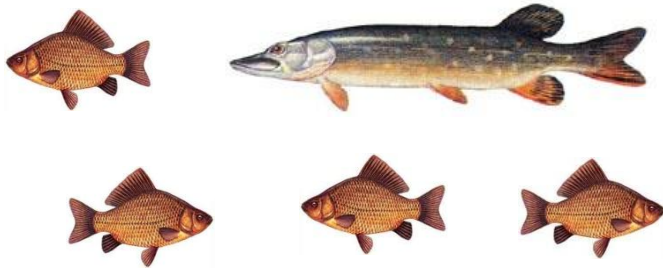
Системный подход

Модель-не-система:

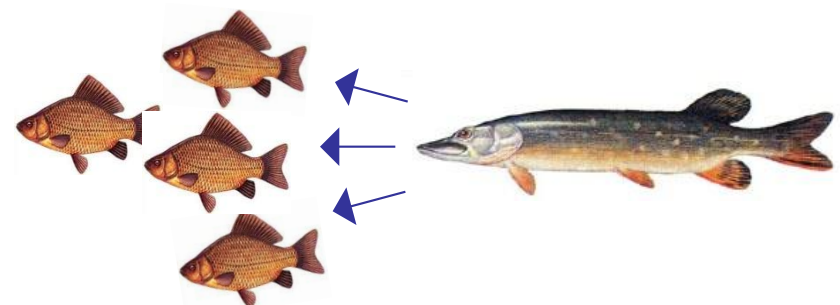


1-я линия:
Пр. Ветеранов
Ленинский пр.
Автово
Кировский завод
Нарвская
...

2-я линия:
Купчино
Звездная
Московская
Парк Победы
Электросила
...



Модель-система:



Состав и структура системы



Всякая система обладает определенным составом и структурой.

Состав - это перечень элементов системы

Структура - это совокупность связей между элементами системы (или внутренняя организация системы).

Вывод: Свойства системы зависят и от состава и от структуры. Даже при одинаковом составе, системы с разной структурой обладают разными свойствами, могут иметь разное назначение.

Систематизация и системный анализ



Описание элементов системы и указание их взаимосвязей называется **системным анализом**.

Систематизация - процесс превращения множества объектов в систему. Имеет огромное значение в различных науках.

Задача наук – описание системных закономерностей в природе и обществе.

Сущность системного подхода состоит в учете системных связей всякого объекта изучения или воздействия: данный объект является подсистемой других систем либо сам состоит из подсистем.



Табличные модели

- расписание занятий
- журнал успеваемости
- таблица Менделеева
- таблицы физических свойств веществ (плотность, теплоемкость, электрическое сопротивление и пр.),
- таблицы исторических дат


Основными понятиями табличной модели являются:

- **Объект** – это то, о чем идет речь.
- **Класс объектов** – множество объектов, объединенных какими-то общими свойствами.
- **Свойства** – характеристики, признаки объекта. У каждого свойства есть название и значение.

Таблица 1. Домашняя библиотека.



Автор	Название	Год издания	Жанр
А. Беляев	«Человек-амфибия»	1990	Фантастика
А. Пушкин	«Сказка о царе Салтане»	1985	Поэтическая сказка
Л. Толстой	«Война и мир»	1972	Трагедия
А. Конан-Дойль	«Голубой карбункул»	1980	Детектив



1. В таблице идет речь о классе объектов – о книгах домашней библиотеки.

2. Свойства – автор, название, год издания, жанр.

3. Значения свойств:

- автор: А. Беляев, А. Пушкин , ...
- название: «Человек-амфибия», поэмы, ...
- год издания: 1990, 1985, ...
- жанр: фантастика, сказка, ...

Автор	Название	Год издания	Жанр
А. Беляев	«Человек-амфибия»	1990	Фантастика
А. Пушкин	«Сказка о царе Салтане»	1985	Поэтическая сказка
Л. Толстой	«Война и мир»	1972	Трагедия
А. Конан-Дойль	«Голубой карбункул»	1980	Детектив

Типы табличных моделей

1. «Объект – Свойство» (ОС)

Таблица ОС – это таблица, в которой рассматриваются объекты, принадлежащие одному классу.

Каждая строка такой таблицы содержит информацию об отдельном объекте, а графа – об отдельном свойстве объектов.

Первая графа обычно идентифицирует этот объект, а последующие отражают свойства объекта.

Автор	Название	Год издания	Жанр
А. Беляев	«Человек-амфибия»	1990	Фантастика
А. Пушкин	«Сказка о царе Салтане»	1985	Поэтическая сказка
Л. Толстой	«Война и мир»	1972	Трагедия
А. Конан-Дойль	«Голубой карбункул»	1980	Детектив

Типы табличных моделей

2. «Объект – Объект» (ОО)

Таблица ОО – это таблица, которая описывает пары объектов и только одно свойство.

Такие таблицы отражают взаимосвязь между различными объектами.

В них строки и столбцы относятся к объектам, в клетке на пересечении содержится информация об отношении между соответствующей парой объектов.

Фамилия	Предмет		
Название класса первых объектов	Русский язык	Название класса вторых объектов	
		Математика	Информатика
Название вторых объектов			
Иванов Петя	4	5	4
Название первых объектов	Значение свойств		
Петров Андрей	4	4	3
Андреев Коля	3	4	5

Типы табличных моделей

Важной разновидностью таблиц типа «**Объект-Объект**» являются **двоичные матрицы**. Они отражают качественную связь между объектами: есть связь или нет связи.

Ученик	Русский	Алгебра	Химия	Физика	История	Информатика
Иванов Петя	0	1	1	1	0	0
Петров Андрей	1	1	0	1	0	1
Сидоров Ваня	1	0	0	0	1	1
Андреев Коля	0	1	1	0	0	1

Любую структуру данных можно свести к табличной форме. Приведение информации к табличной форме называется **нормализацией**.

Графические модели

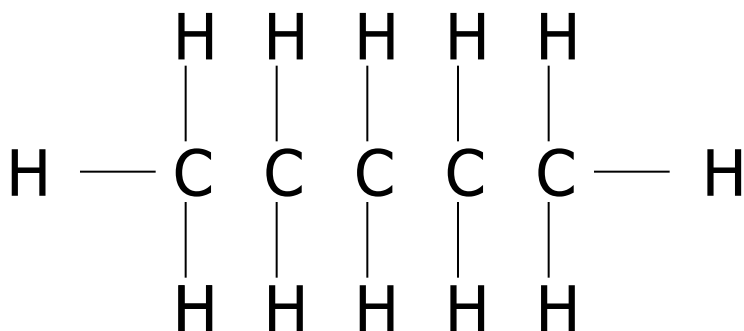


Данные, используемые в любой информационной модели, всегда определенным образом упорядочены, структурированы, т.е. информационная модель представляет собой систему со всеми характерными признаками: ***элементным составом, структурой и назначением***. Такие структурированные системы данных называют **структурами данных**.

Для того чтобы представить информацию о составе и структуре системы графически, необходимо в виде чертежа изобразить компоненты системы и соединить их между собой какими-либо линиями.

Графические модели

Пример 1: структура молекулы углеводорода



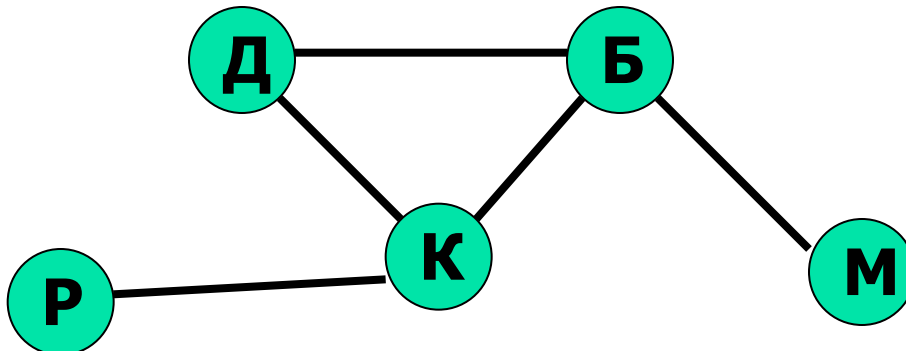
Здесь компоненты системы (атомы) соединены между собой линиями. Причем способ соединения выбран определенный, так как при другом варианте соединения получится другое вещество.

Графические модели

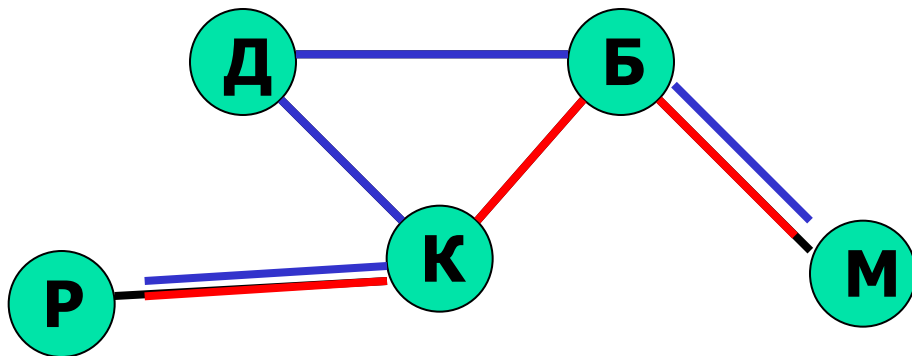
Пример 2. Транспортная задача

Дано словесное описание некоторой местности:

«Наш район состоит из 5 поселков: Дедкино, Бабкино, Репкино, Кошкино и Мышкино. Автомобильные дороги проложены между: Дедкино и Бабкино, Дедкино и Кошкино, Бабкино и Мышкино, Бабкино и Кошкино, Кошкино и Репкино». Через какие поселки надо проехать, чтобы добраться из Репкино в Мышкино



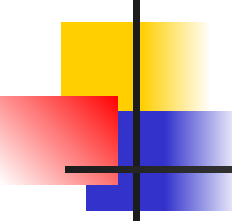
Графические модели



Построенный граф позволяет ответить на вопрос: через какие поселки надо проехать, чтобы добраться из Репкино в Мышкино

Здесь возможны 2 варианта:

- 1. Р – К – Б – М**
- 2. Р – К – Д – Б – М**



Граф – это средство для наглядного представления элементного состава системы и структуры связей.

Составными частями графа являются **вершины** и **ребра**.

Вершины графа – это компоненты системы изображаемые кругами, овалами, прямоугольниками и пр.

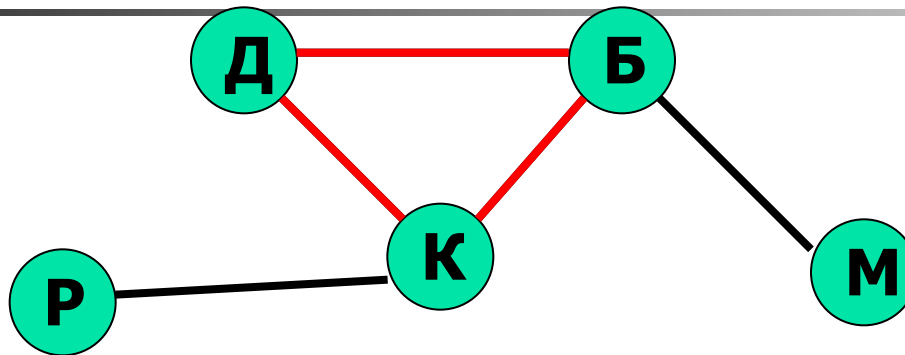
Ребра – это ненаправленные линии, связывающие компоненты между собой.

Такой граф называют **сетью**.

Сеть - это граф, в котором вершины связаны между собой по принципу «многие ко многим». Т. е. для сети характерна возможность множества различных путей перемещения по ребрам между некоторыми парами вершин.

Для сетей также характерно наличие замкнутых путей, которые называются **циклами**.

На нашем рисунке это путь К – Д – Б – К



Этот граф является **неориентированным**. На нем каждое ребро обозначает наличие дорожной связи между двумя пунктами. Но дорожная связь действует одинаково в обе стороны. Такую связь называют **симметричной**.

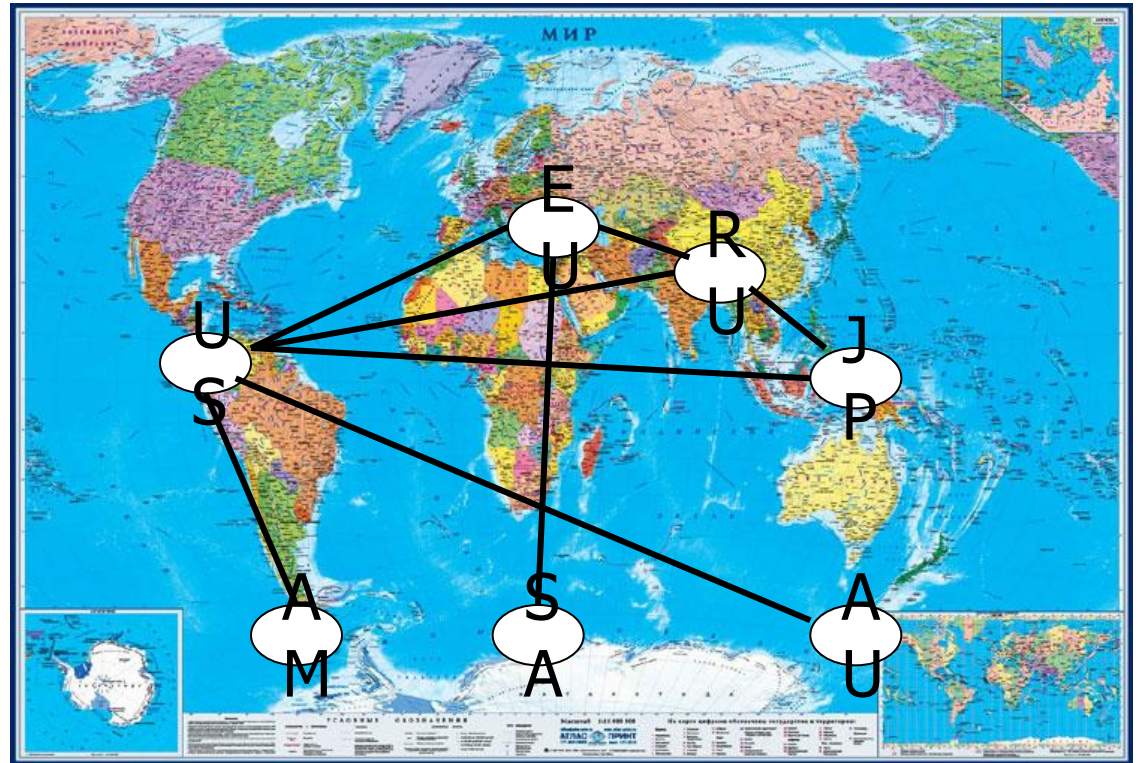
Симметричной называется связь действующая одинаково в обе стороны.

Неориентированным называется граф, содержащий симметричные (не направленные) связи - ребра.

Сетевые модели

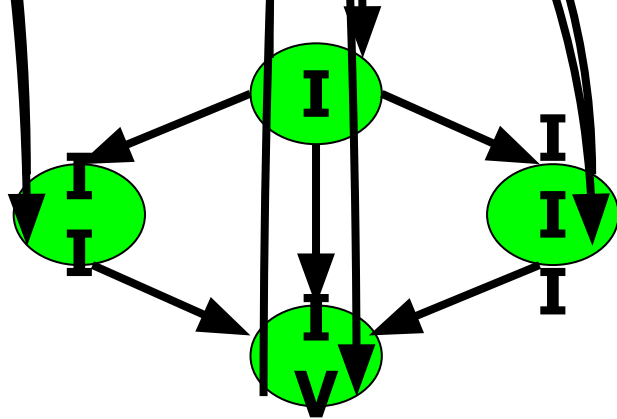
Сетевые модели применяются для отражения систем со сложной структурой, в которых связи между элементами имеют произвольный характер.

Например, различные региональные части глобальной сети Интернет (американская, европейская, российская, австралийская и т.д.) связаны между собой высокоскоростными линиями связи.



Пример 3. Группы крови

Известно, что у разных людей кровь отличается по группе. Существуют 4 группы крови и при переливании крови от одного человека к другому учитывают, что не все группы крови совместимы.



Связи между вершинами данного графа *несимметричны* и поэтому изображаются направленными линиями со стрелками. Такие линии принято называть *дугами* (в отличие от ребер неориентированных графов). Граф с такими свойствами называется *ориентированным*.

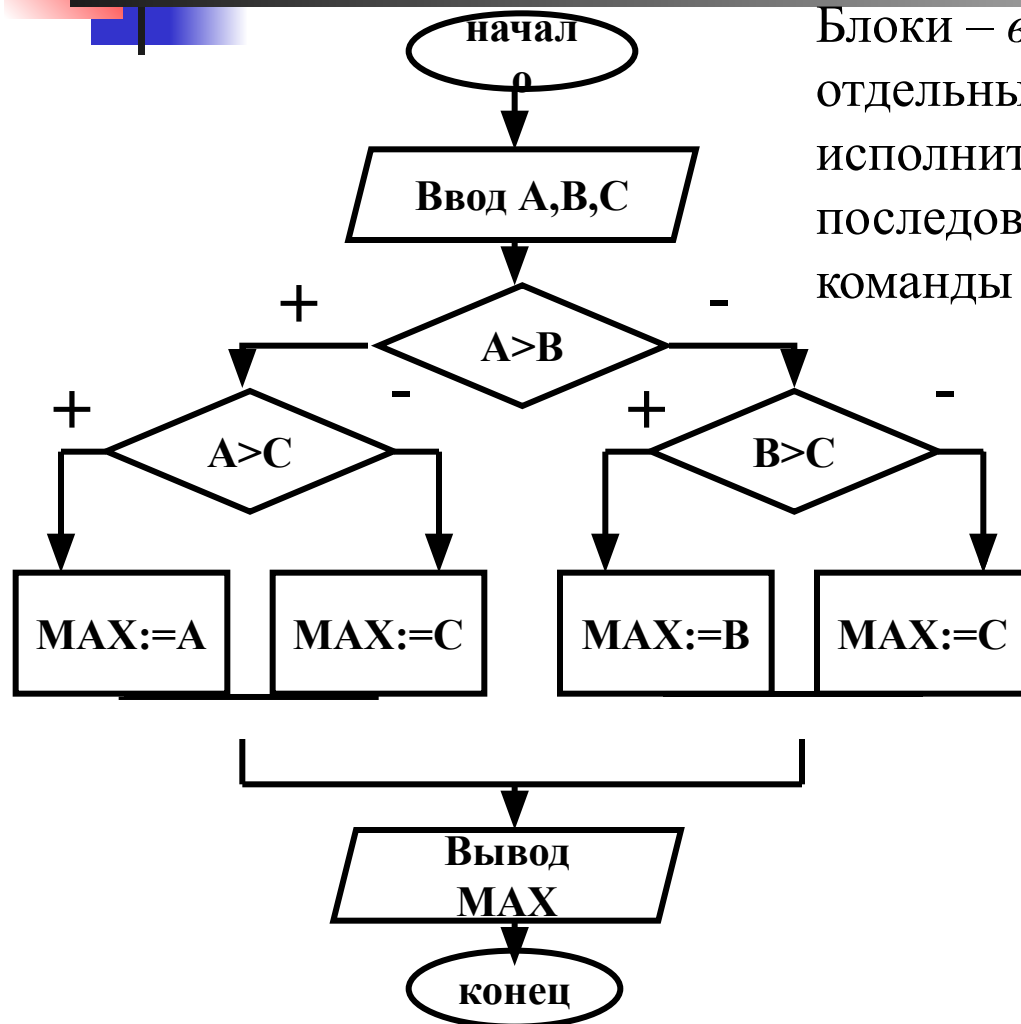
Дуги - это направленные линии (стрелки), связывающие компоненты между собой определенным образом.

Линия, выходящая и входящая в одну и ту же вершину, называется **петлей**.

Ориентированным называется граф, содержащий несимметричные (направленные) связи - дуги.

Блок-схема алгоритма представляет собой граф процесса управления некоторым исполнителем.

Блок-схема - это граф, отображающий последовательность выполнения действий.



Блоки – *вершины графа* – обозначают отдельные команды, которые отдаются исполнителю, а *дуги* указывают на последовательность переходов от одной команды к другой.

Пример 4

Данная блок-схема находит максимальное значение из трех переменных величин A, B, C.

Иерархические структуры и деревья

При построении информационных моделей многих систем приходится иметь дело с **иерархической структурой**.

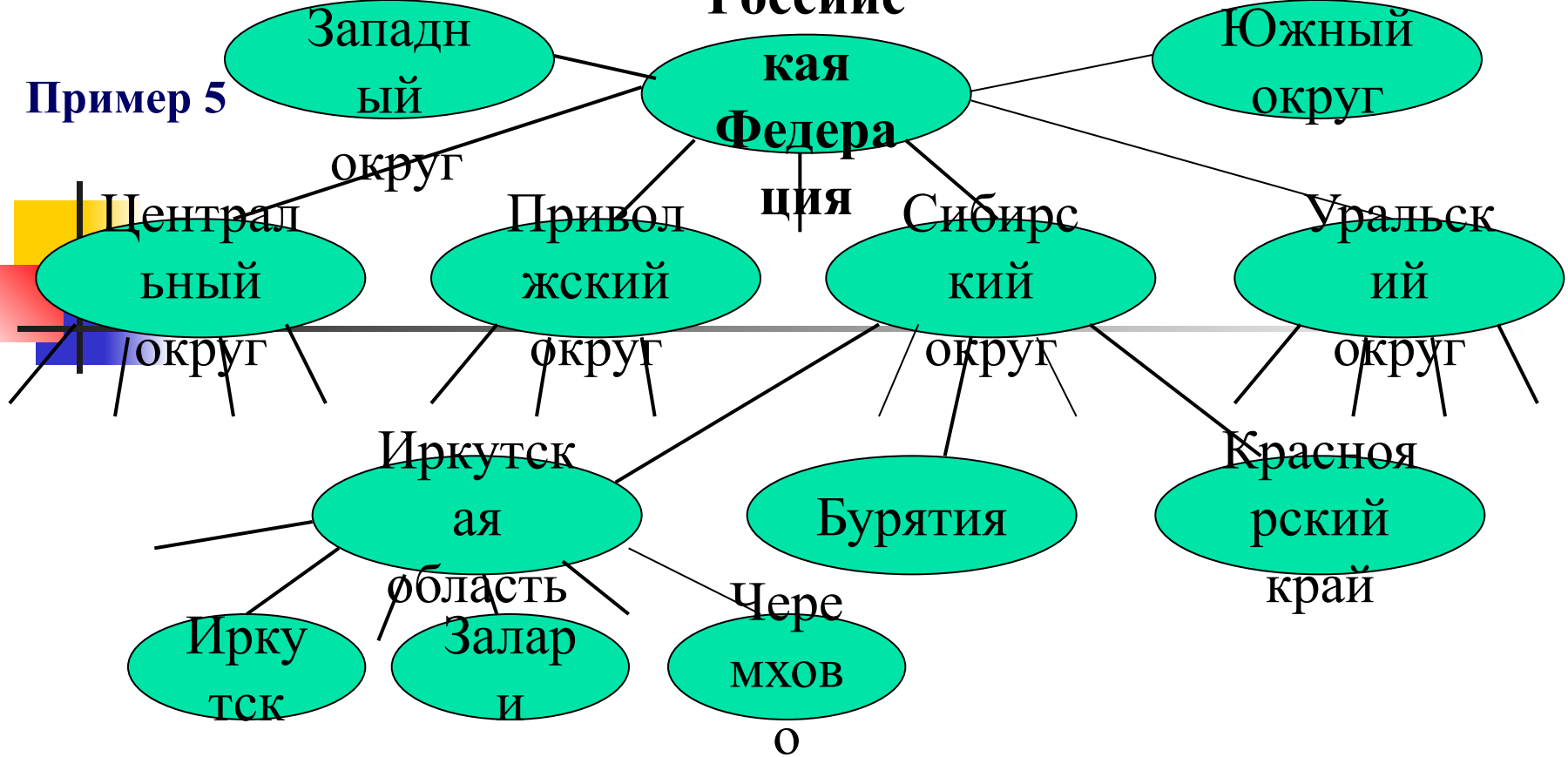
Например, директор завода → начальники цехов → начальники участков → бригадиры → рабочие.

Иерархическими называются системы, между элементами которых установлены отношения подчинения или вхождения друг в друга.

Граф иерархической системы называется **деревом**.

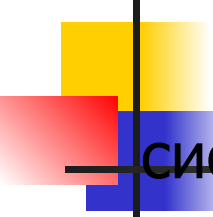
Основным свойством дерева является то, что между любыми двумя его вершинами существует единственный путь. Деревья не содержат циклов и петель.

Пример 5



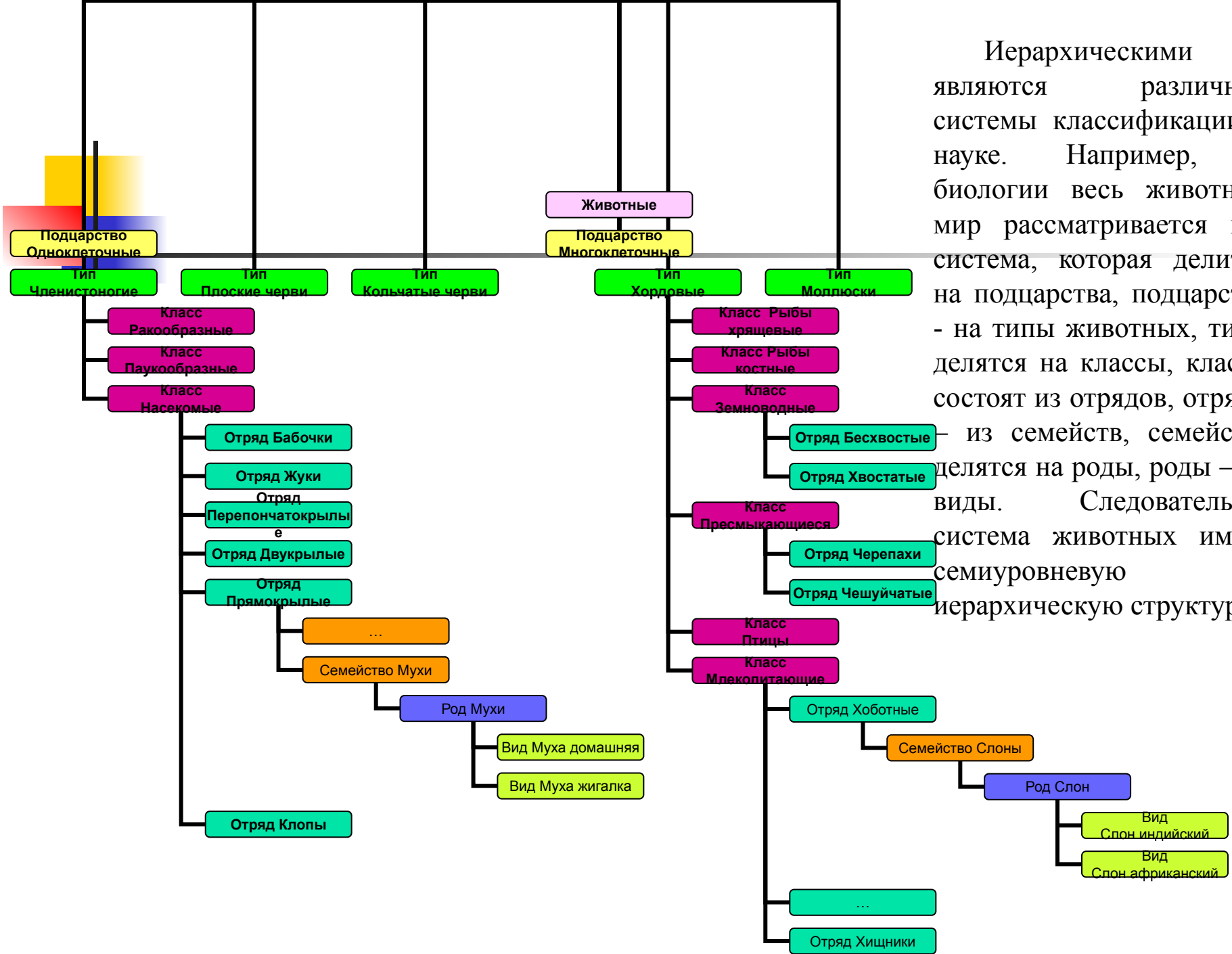
На рисунке изображен граф, отражающий иерархическую структуру нашего государства: Российская федерация делится на семь административных округов; округа делятся на регионы (области и национальные республики), в состав которых входят города и другие населенные пункты.

Состав дерева



Обычно у дерева, отображающего иерархическую систему, выделяется одна главная вершина, которая называется **корнем дерева**. Эта вершина изображается вверху; от нее идут **ветви** дерева. От корня начинается отсчет уровней дерева. Вершины, непосредственно связанные с корнем, образуют первый уровень. От них идут связи к вершинам второго уровня и т.д. Каждая вершина дерева (кроме корня) имеет одну **исходную** вершину на предыдущем уровне и может иметь множество **порожденных** вершин на следующем уровне. Такой принцип связи называется **«ОДИН КО МНОГИМ»**.

Вершины, которые не имеют порожденных, называют **листьями**. На нашем рисунке листьями являются вершины, обозначающие города и села.



Иерархическими являются различные системы классификации в науке. Например, в биологии весь животный мир рассматривается как система, которая делится на подцарства, подцарства - на типы животных, типы делятся на классы, классы состоят из отрядов, отряды - из семейств, семейства делятся на роды, роды - на виды. Следовательно, система животных имеет семиуровневую иерархическую структуру.

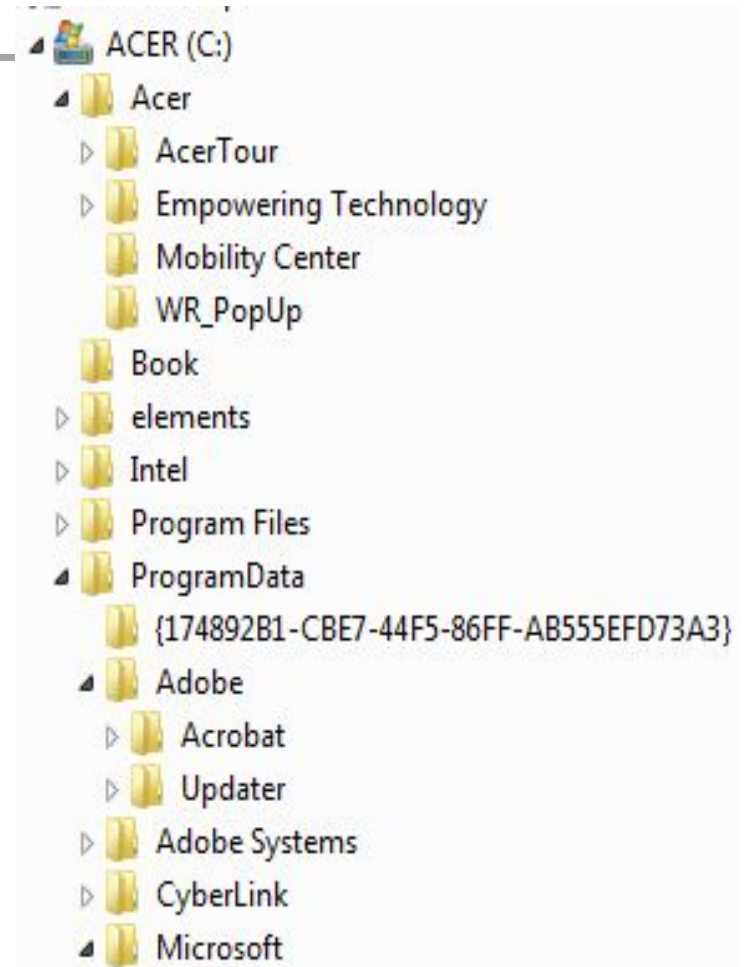
Иерархические системы в информатике

Система хранения файлов на магнитных дисках организована по иерархическому принципу. Операционная система позволяет получить на экране изображение файловой структуры в виде дерева. Корнем этого дерева является корневой каталог диска, вершины — подкаталоги разных уровней.

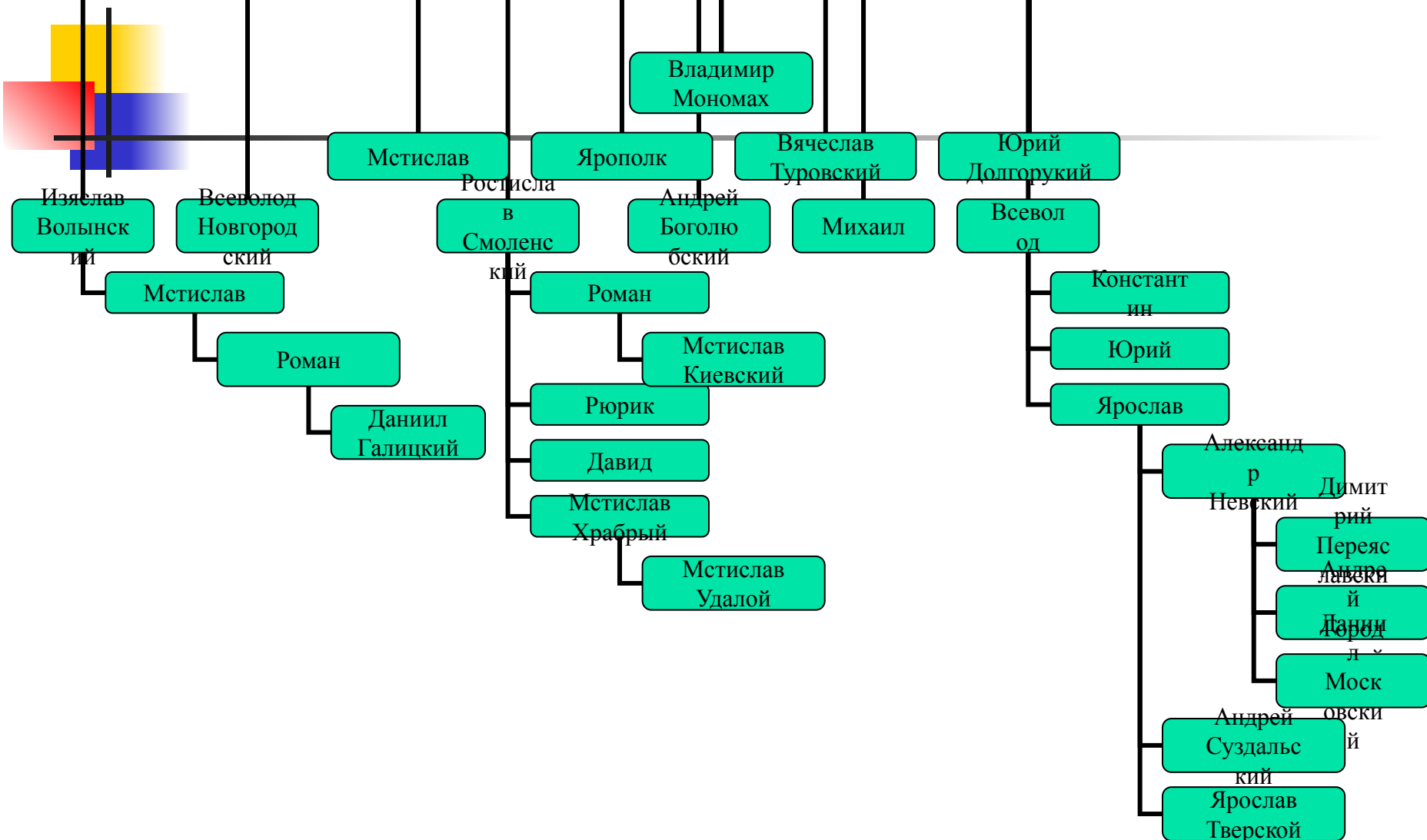
Как известно, путь к файлу — это путь от корневого каталога до каталога, непосредственно содержащего данный файл. И для каждого файла такой путь единственный.

Например путь к файлам, содержащимся в папке Acrobat запишется так:

C:\ProgramData\Adobe\Acrobat



Генеалогическое древо Владимира Мономаха



Математические модели

Формальные языки используются для построения формально-логических моделей — математических, логических и специальных.

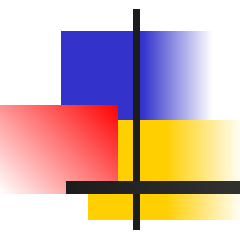
Процесс построения информационных моделей с помощью формальных языков называется *формализацией*.

Наиболее распространенным формальным языком является алгебраический язык формул в математике, который позволяет описывать функциональные зависимости между величинами.

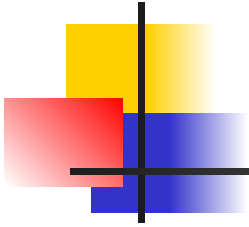
Модели построенные с использованием математических формул и понятий, называются *математическими*.

Этапы

моделирования



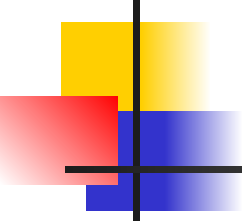
I. Постановка задачи



Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

II. Разработка модели

- 
- **выбрать тип модели**
 - **определить *существенные* свойства оригинала,** которые нужно включить в модель, отбросить несущественные (для данной задачи)
 - **построить формальную модель**
это модель, записанная на *формальном языке* (математика, логика, ...) и отражающая только существенные свойства оригинала
 - **разработать алгоритм работы модели**
алгоритм – это четко определенный порядок действий, которые нужно выполнить для решения задачи

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

Примеры:

- устройство для сложения многозначных чисел – проверка на однозначных числах
- модель движения корабля – если руль стоит ровно, курс не должен меняться; если руль повернуть влево, корабль должен идти вправо
- модель накопления денег в банке – при ставке 0% сумма не должна изменяться



Модель прошла тестирование. Гарантирует ли это ее правильность?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели в интересующих нас условиях.

Примеры:

- устройство для сложения чисел – работа с многозначными числами
- модель движения корабля – исследование в условиях морского волнения
- модель накопления денег в банке – расчеты при ненулевой ставке



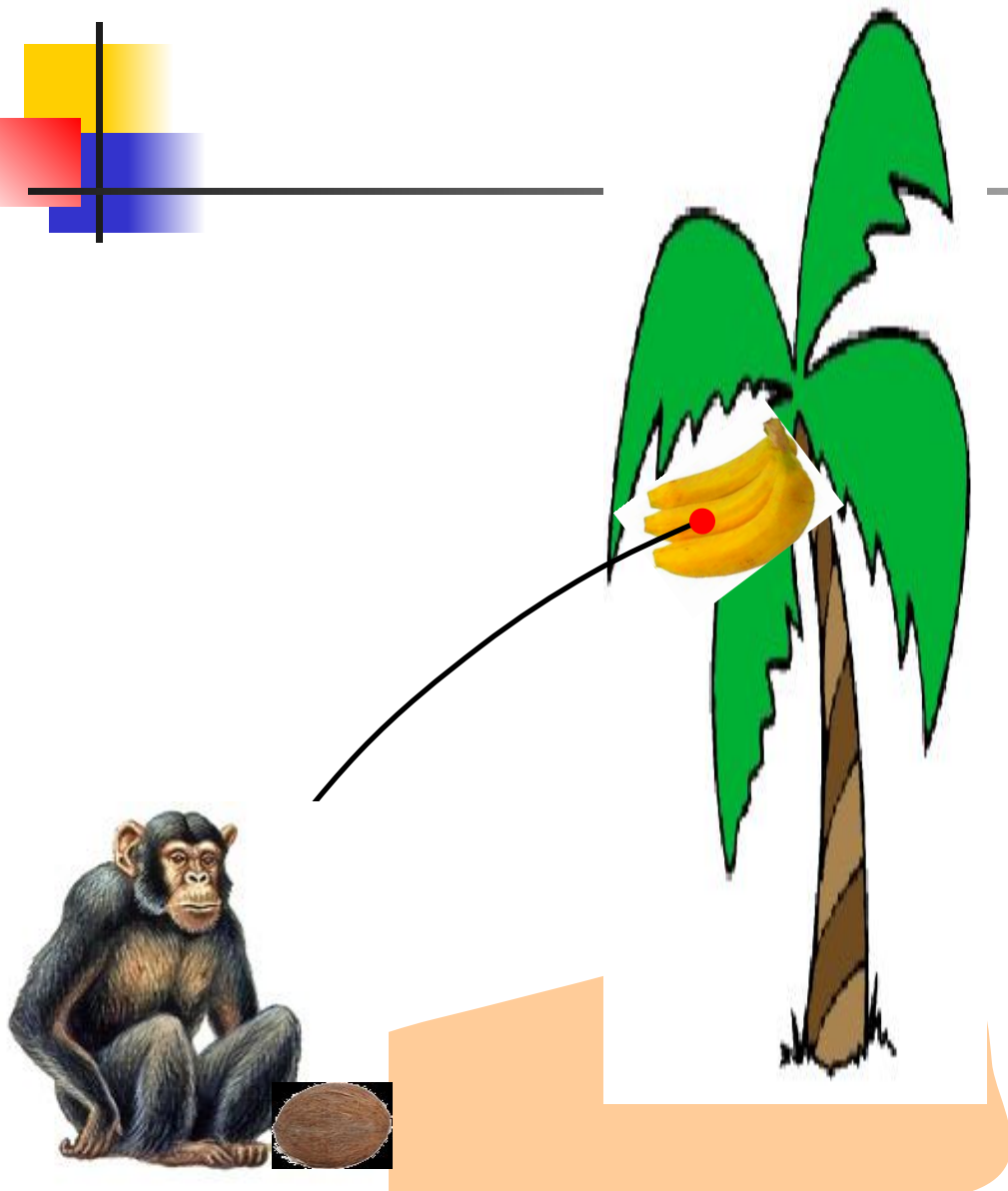
Можно ли 100%-но верить результатам?

V. Проверка практикой, анализ результатов

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (например, учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

Пример.



Задача. Обезьяна хочет сбить бананы на пальме. Как ей надо кинуть кокос, чтобы попасть им в бананы.

Анализ задачи:

- все ли исходные данные известны?
- есть ли решение?
- единственно ли решение?

I. Постановка задачи

Допущения:

- кокос и банан считаем материальными точками
- расстояние до пальмы известно
- рост обезьяны известен
- высота, на которой висит банан, известна
- обезьяна бросает кокос с известной начальной скоростью
- сопротивление воздуха не учитываем

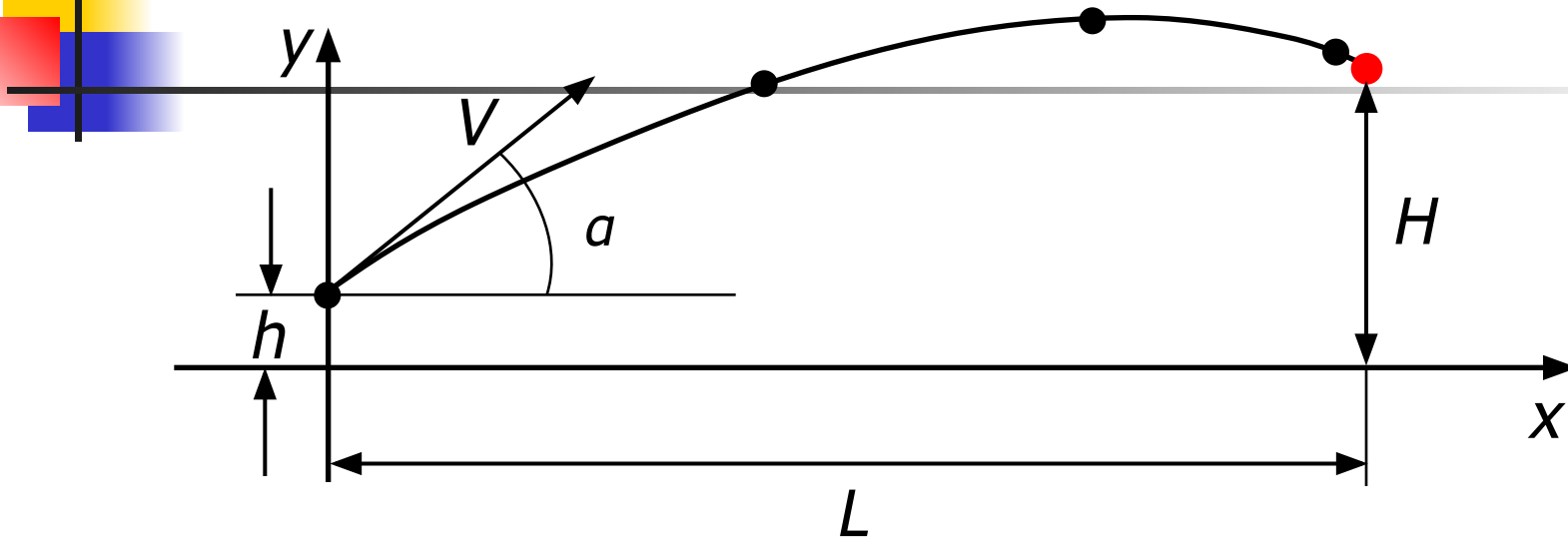
При этих условиях требуется найти начальный угол, под которым надо бросить кокос.



Всегда ли есть решение?

II. Разработка модели

Графическая модель



Формальная (математическая) модель

$$x = V \cos \alpha \cdot t, \quad y = h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти t , α , при которых

$$V \cos \alpha \cdot t = L, \quad h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H$$

III. Тестирование модели

Математическая модель

$$x = V \cos \alpha \cdot t$$

$$y = h + V \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

- при нулевой скорости кокос падает вертикально вниз
- при $t=0$ координаты равны $(0, h)$
- при броске вертикально вверх ($\alpha=90^\circ$) координата x не меняется
- при некотором t координата y начинает уменьшаться (ветви параболы вниз)



Противоречий не обнаружено!

IV. Эксперимент

Метод I.

Меняем угол α . Для выбранного угла α строим траекторию полета ореха. Если она проходит выше банана, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$V \cos \alpha \cdot t = L \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{V \cos \alpha}$$

Меняем угол α . Для выбранного угла α считаем t , а затем – значение y при этом t . Если оно больше H , уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.

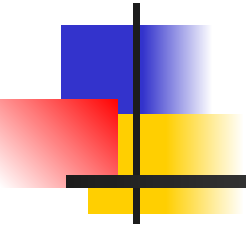


не надо строить всю траекторию для каждого α

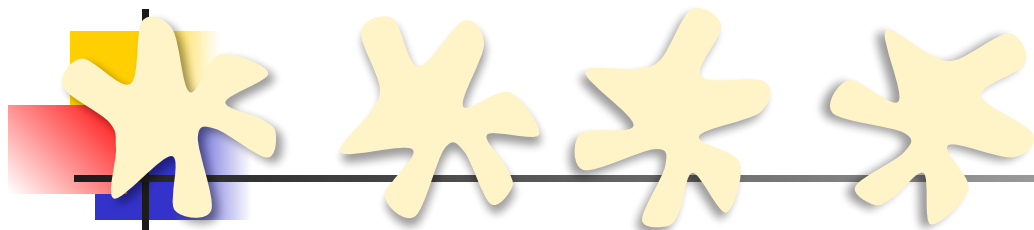
V. Анализ результатов

1. Всегда ли обезьяна может сбить банан?
2. Что изменится, если обезьяна может бросать кокос с разной силой (с разной начальной скоростью)?
3. Что изменится, если кокос и бананы не считать материальными точками?
4. Что изменится, если требуется учесть сопротивление воздуха?
5. Что изменится, если дерево качается?

Модели биологических систем



Модель деления

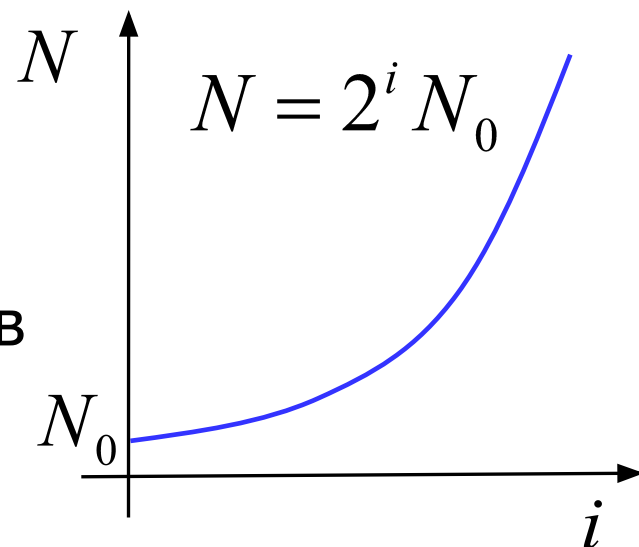


N_0 – начальная численность

$N_1 = 2N_0$ – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Особенности модели:

- 1) не учитывается смертность
- 2) не учитывается влияние внешней среды
- 3) не учитывается влияние других видов

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – коэффициент рождаемости

K_c – коэффициент смертности

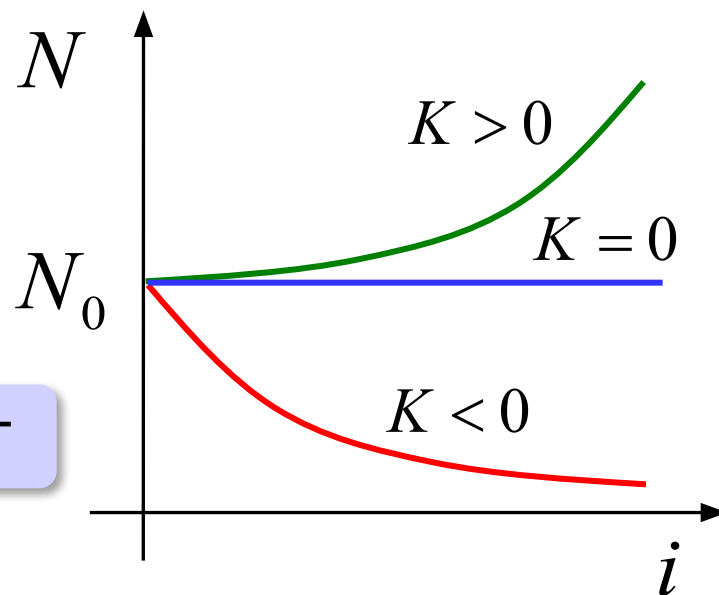
Коэффициент
прироста

$$K = K_p - K_c$$

$$N_i = (1 + K) \cdot N_{i-1}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

прирост



Особенности модели:

- 1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
- 2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

L — предельная численность животных

$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

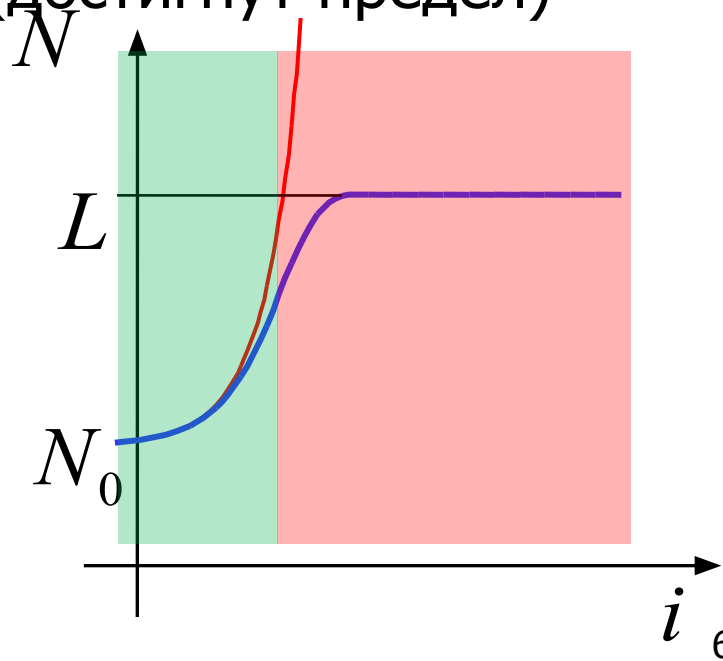
Идеи:

- 1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
- 2) при $N=0$ должно быть $K_L=K$ (начальное значение)
- 3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$



Модель адекватна,
если ошибка < 10%!



Модель с отловом

Примеры: рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - R$$

ОТЛОВ



Какая будет численность?

$$N_i = N_{i-1}, \text{ прирост} =$$

$$N = N + K \frac{L - N}{L} N - R \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$



Сколько можно отловить?

Модель эпидемии гриппа

L – всего жителей N_i – больных в i -ый день

Z_i – заболевших в i -ый день V_i – выздоровевших

W – всего выздоровевших за i дней

Основное уравнение:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

Ограниченный рост:

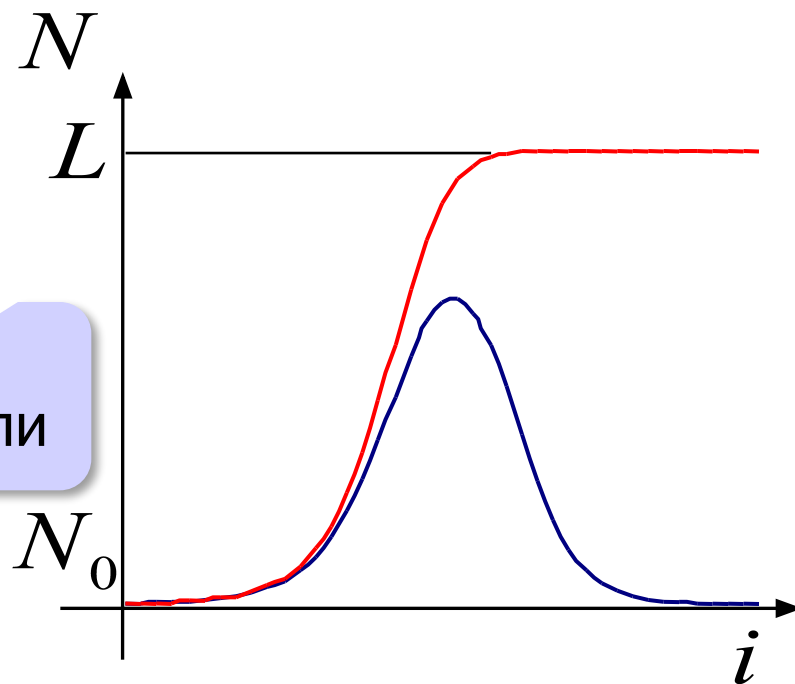
$$Z_i = K \frac{L - N_{i-1} - W_{i-1}}{L} \cdot N_{i-1}$$

Выздоровление
(через 7 дней):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$

болели и
выздоровели



Модель системы «хищник-жертва»

Модель – не-система:



караси



щуки

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D) \cdot Z_{i-1}$$

Модель – система:

- 1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
- 2) «эффект» пропорционален числу встреч

вымирают
без еды

численность
уменьшается

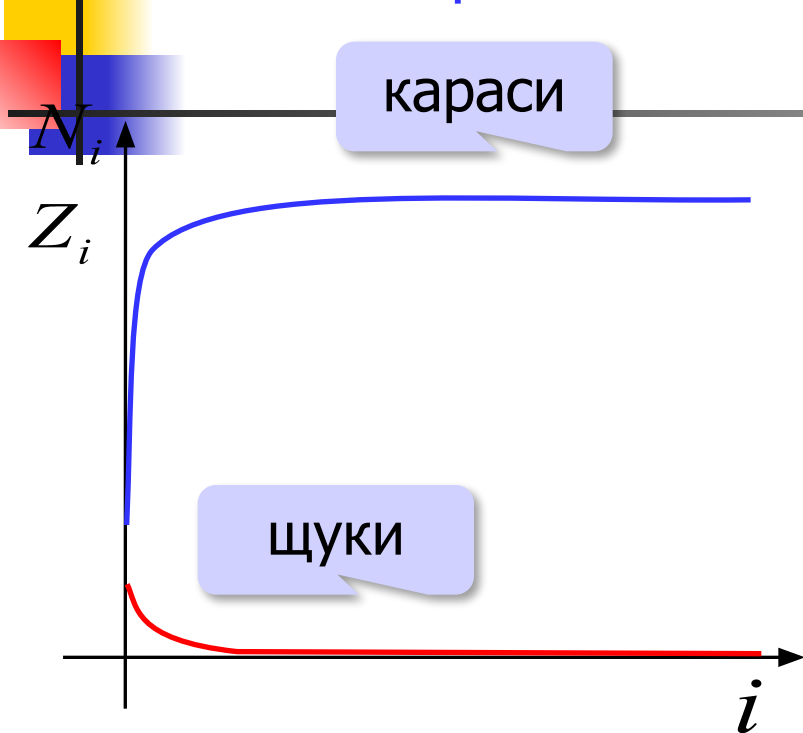
$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D) \cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность
увеличивается

Модель системы «хищник-жертва»

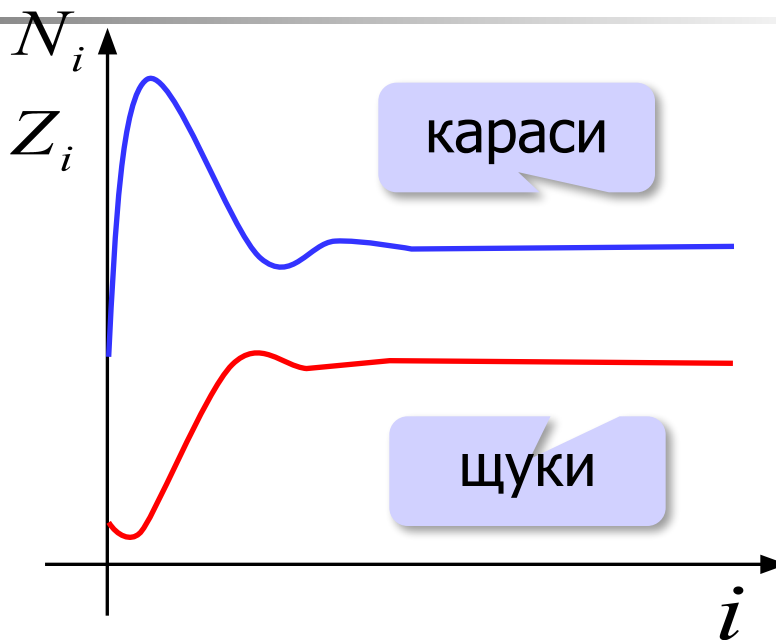
Хищники вымирают:



$$d = 0,8$$

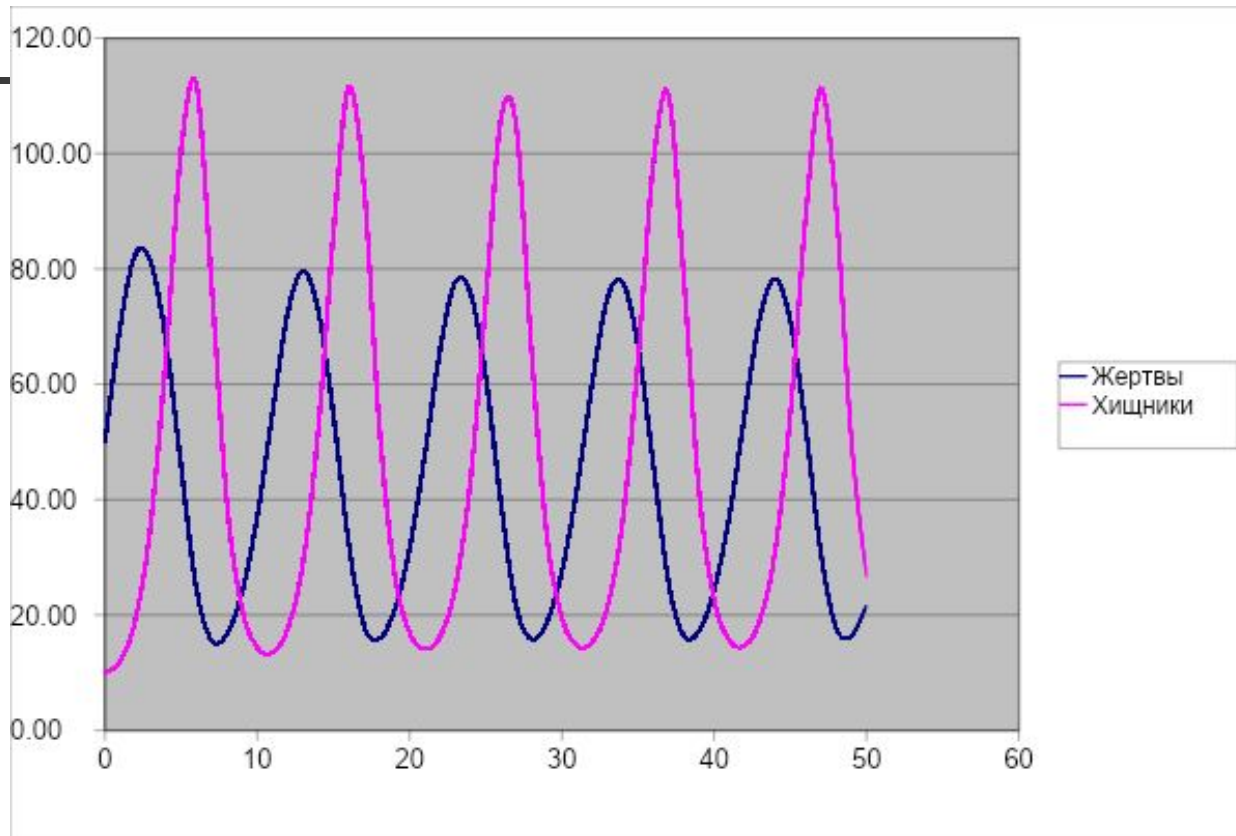
$$b_1 = b_2 = 0,005$$

Равновесие:



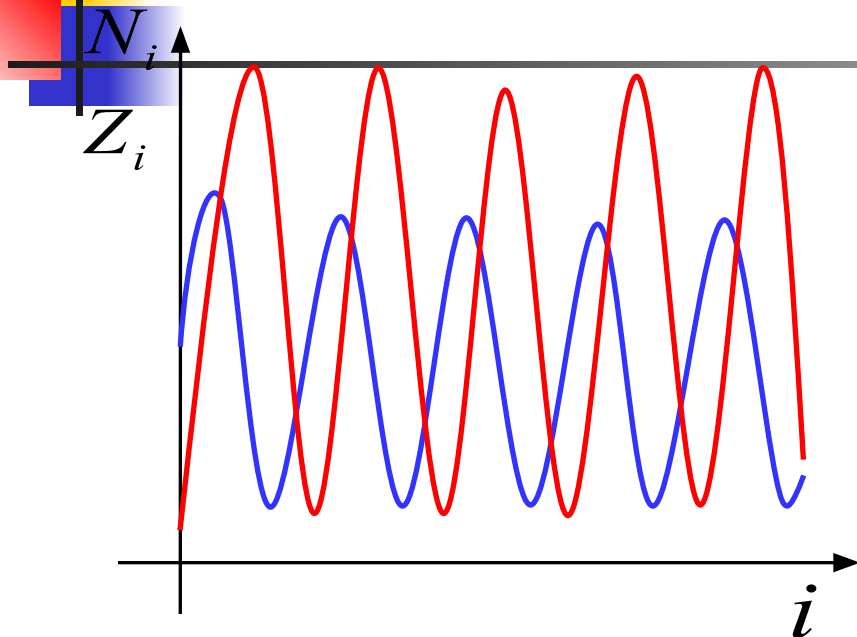
$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,012$$



Модель системы «хищник-жертва»

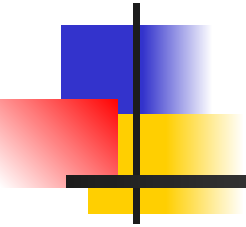
Колебания:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,015$$

Моделирование случайных процессов



Случайные процессы

Случайно...

- 1) встретить друга на улице
- 2) разбить тарелку
- 3) найти 10 рублей
- 4) выиграть в лотерею

Случайный выбор:

- 1) жеребьевка на соревнованиях
- 2) выигравшие номера в лотерее

Как получить случайность?



Случайные числа на компьютере

Электронный генератор



- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

Псевдослучайные числа – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)

564321
318458191041
209938992481

в квадрате малый период
(последовательность
повторяется через 10^6 чисел)

Случайные числа на компьютере

Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \bmod m$$

a, c, m - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \bmod 1073741823$$

простое число

$$2^{30}-1$$



Какой период?

период m

«Вихрь Мерсенна»: период $2^{19937}-1$

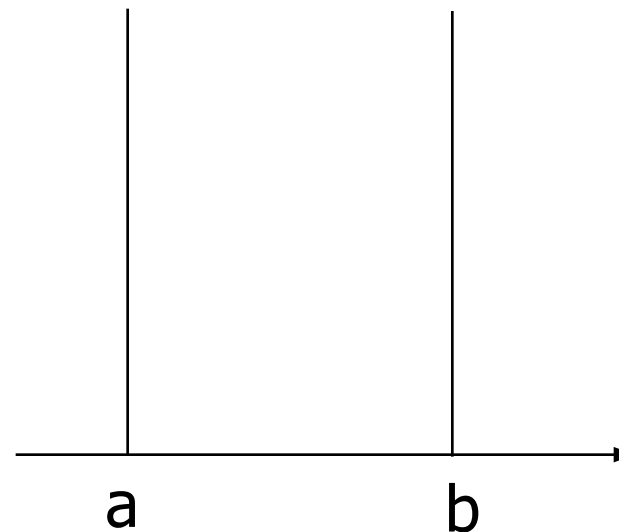
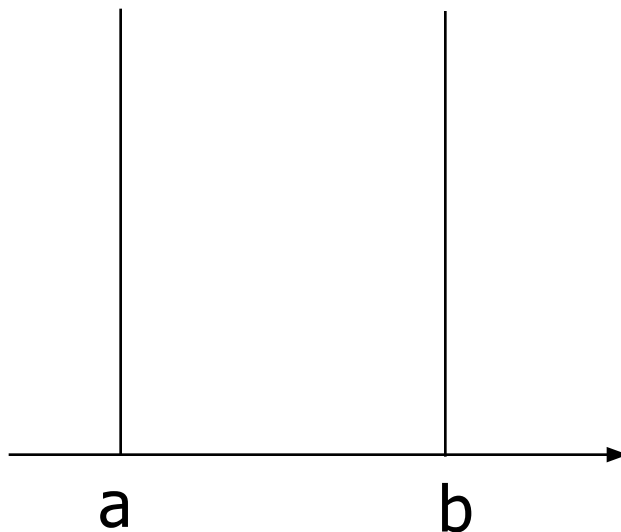
Распределение случайных чисел

Модель: снежинки падают на отрезок $[a, b]$

распределение

равномерное

неравномерное

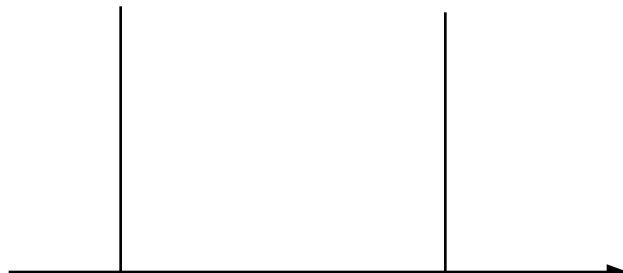


Сколько может быть разных распределений?


Распределение случайных чисел

Особенности:

- распределение – это характеристика всей последовательности, а не одного числа
- равномерное распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- неравномерных – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного



$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$



$x = \frac{x_1 + x_2 + \square + x_{12}}{12}$

x_1, x_2, \square равномерное

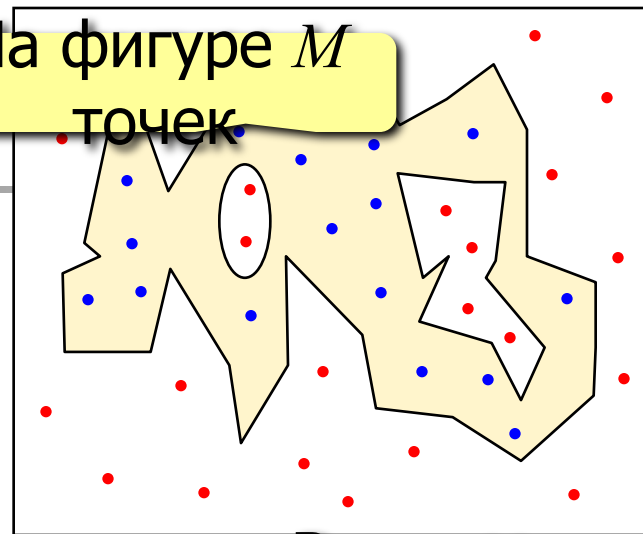
распределение

Вычисление площади (метод Монте-Карло)

1. Вписываем сложную фигуру в другую фигуру, для которой легко вычислить площадь (прямоугольник, круг, ...).
2. Равномерно N точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, попавших на фигуру: M .
4. Вычисляем площадь:

$$\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}$$

На фигуре M
точек

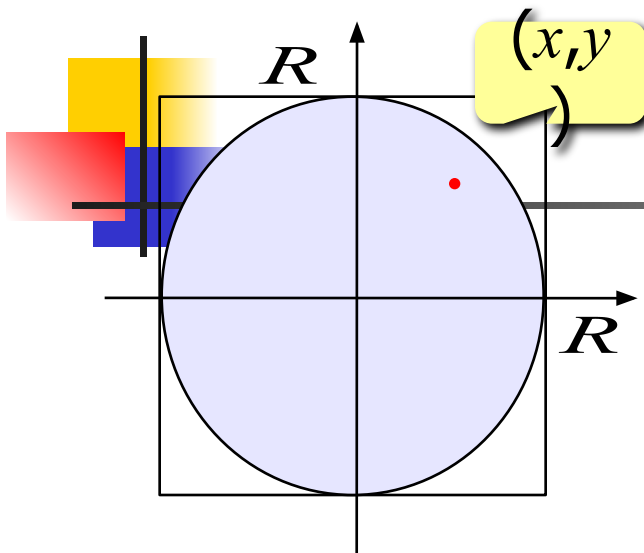


Всего N
точек



1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;
```

```
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

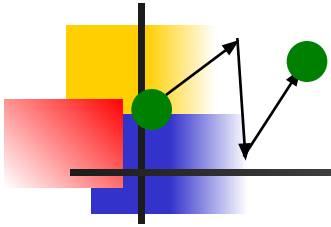
Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайные координаты }
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;
end;
S := 4*R*R*M / N;
```



Как найти число π ?

Броуновское движение



Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:

```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha);
  y := y + h*sin(alpha);
end;
```

Системы массового обслуживания

Примеры:

- 1) звонки на телефонной станции
- 2) вызовы «скорой помощи»
- 3) обслуживание клиентов в банке

сколько линий?

сколько бригад?

сколько операторов?

Особенности:

- 1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
- 2) время обслуживания каждого клиента – случайная величина



Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!

Клиенты в банке



Вход клиентов:

- 1) за 1 минуту – до N человек
- 2) равномерное распределение



Обслуживание:

- 1) от T_{min} до T_{max} минут
- 2) равномерное распределение



Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более Q минут?

Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было

пришли

ушли

```
N := N + in - out;
```



Допущение: клиенты распределены по кассам равномерно!

Количество касс: K

Средняя длина очереди: $\frac{N}{K}$

Допустимая длина очереди: $\frac{N}{K} \leq Q$

Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(N*random);
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```



Каждый оператор за эту минуту обслужит
клиентов!

$$\frac{1}{T}$$

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := K / T;
```

Клиенты в банке (программа)

период моделирования L минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }
for i:=1 to L do begin
  in := { случайное число входящих }
  out := { случайное число обслуженных }
  N := N + in - out;
  if N > Q*K then
    count := count + 1;
end;
writeln(count/L:0:2);
```



Что выводится?

Конец фильма

