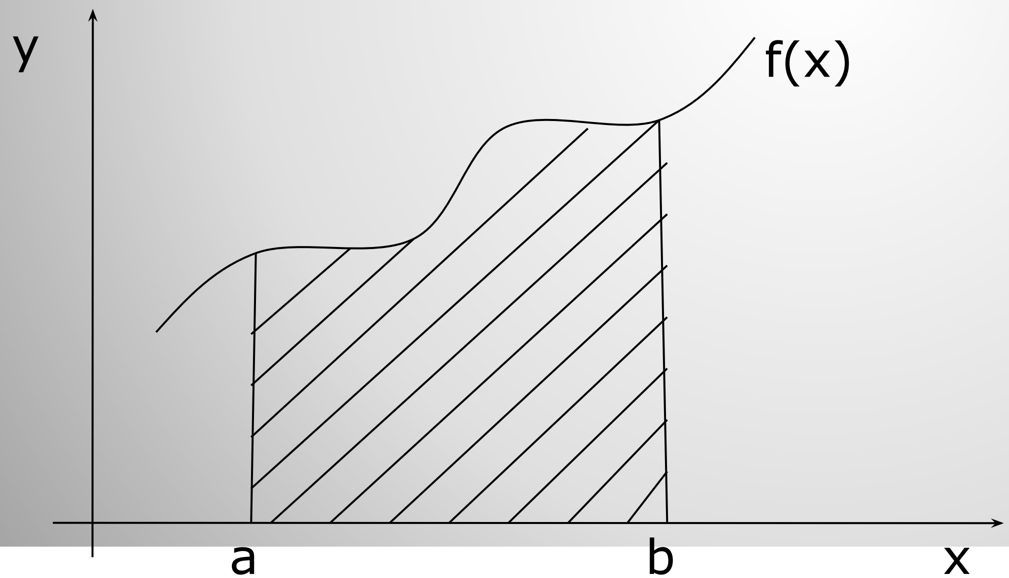
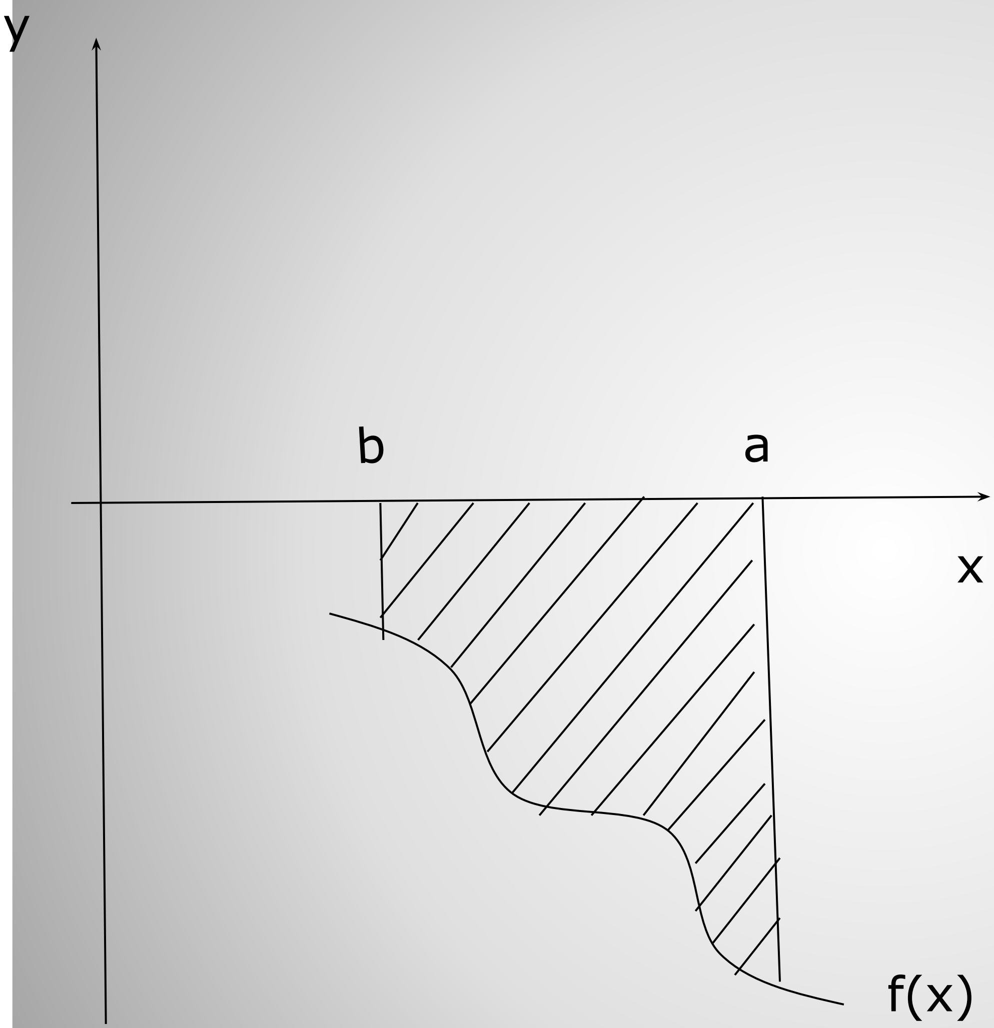
Приложения определенного интеграла

Вычисление площади плоских фигур

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)*, *f(x)≥0*, прямыми *x=a* и *x=b* и отрезком [a,b] оси Ох, вычисляется по формуле:

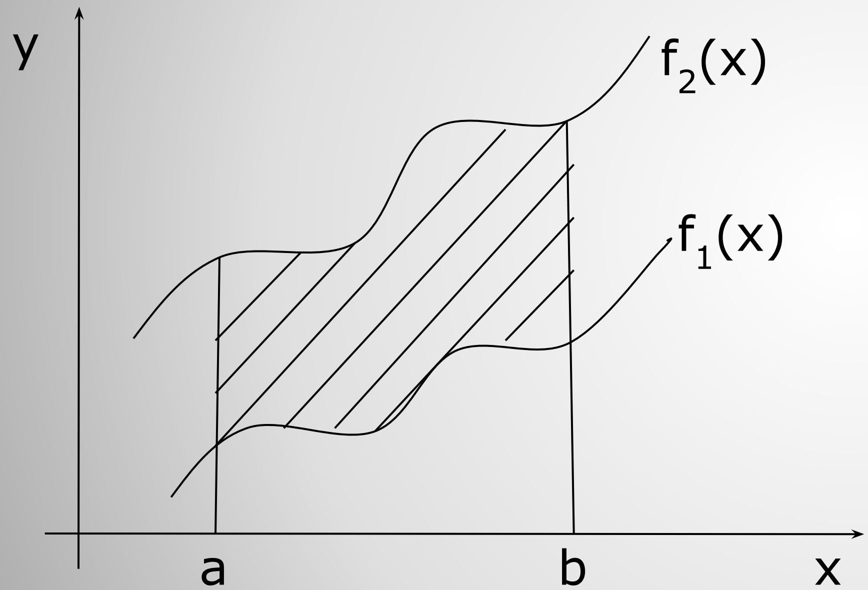


$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$

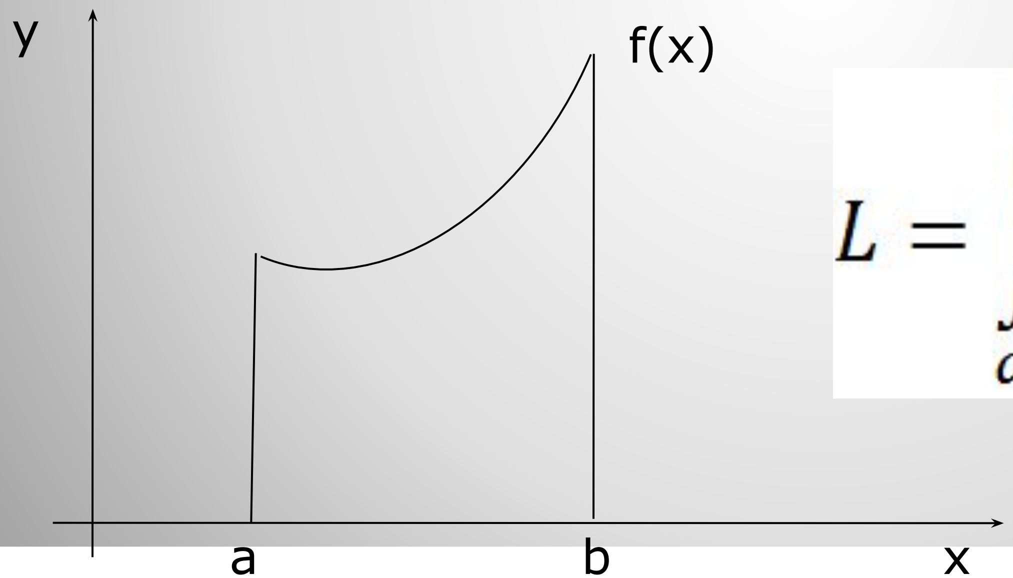
2. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ $[f_1(x) \leq f_2(x)]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, находится по формуле:



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

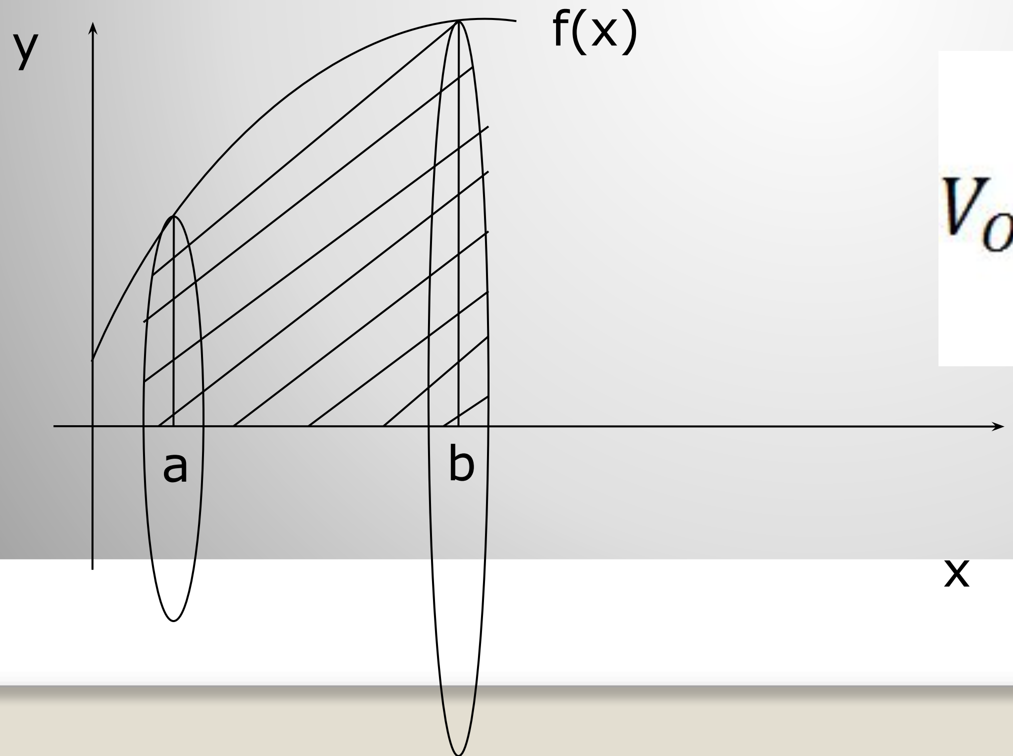
Если кривая *y=f(x)* на отрезке [a,b] – гладкая (т.е. производная *f'(x)* непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле:



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

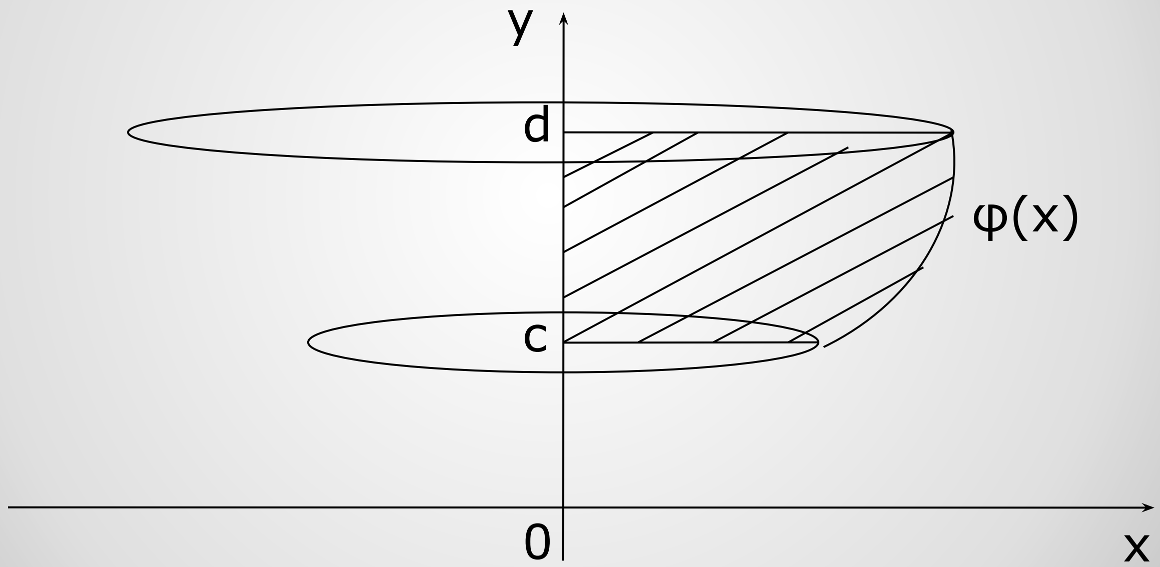
Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой *y=f(x)* и прямыми *y=0*, *x=a*, *x=b*, вращается вокруг оси *Ox*, то объем тела вращения вычисляется по формуле:



$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой *x=φ(y)* и прямыми *x=0*, *y=c*, *y=d*, вращается вокруг оси *Oy*, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

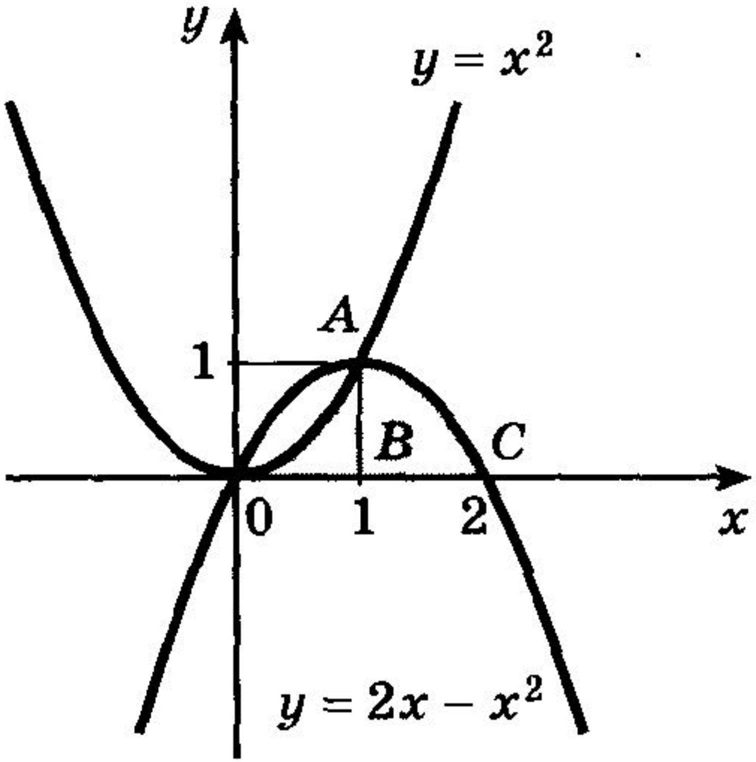


$$V_{Oy} = \pi \int_{c}^{d} \varphi^2(y)\,dy$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ и прямыми x=a, x=b, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения находится по формуле:

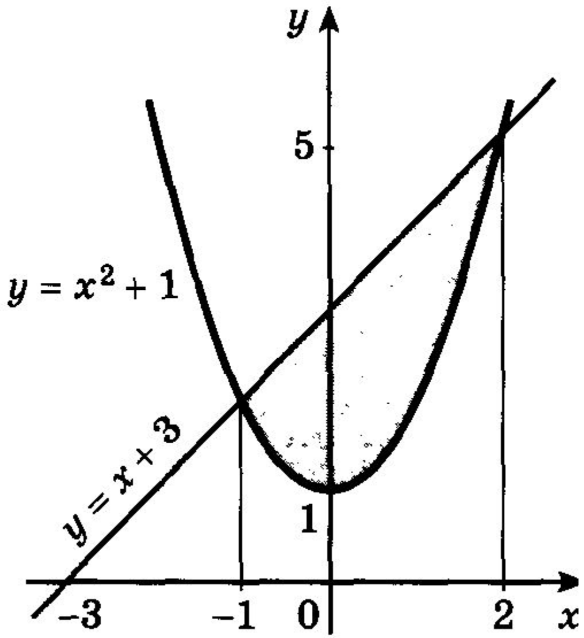
$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx$$

Задача 1:
Найти площади фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2x-x^2$



$$S=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(2x-x^2)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2=1.$$

Задача 2:
Найти площади фигуры, ограниченной линиями: $y=x+3$ и $y=x^2+1$

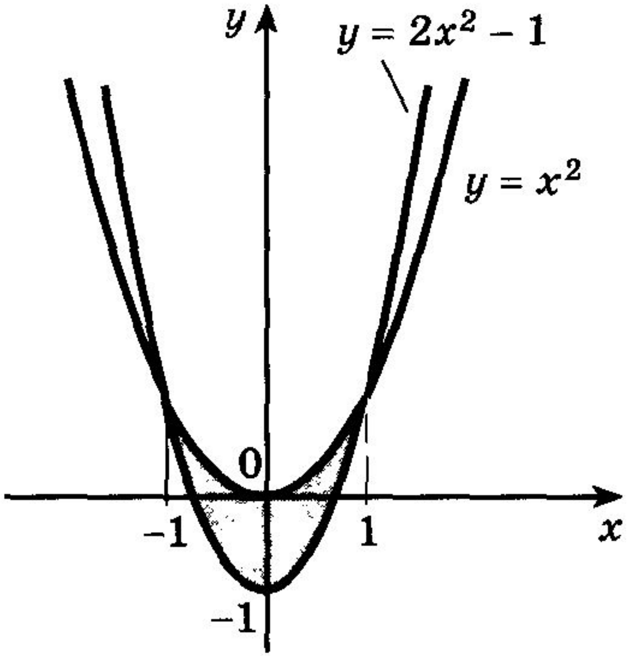


$$S_1 = \int_{-1}^{2} (x+3)\,dx,$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx,$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2} (x+3)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx = 4{,}5.$$

Найти площадь S фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.



$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \quad \triangleleft$$