Сергиенко Л.С.

МАТЕМАТИКА

Видео - презентация курса лекций
для бакалавров технических вузов

ИРКУТСК – 2015 г.

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Электронное учебное пособие для интернет - обучения бакалавров технических вузов.

Издательство
Иркутского государственного технического университета,
2015 г. .

Сергиенко Л.С. МАТЕМАТИКА. Электронное учебное пособие для интернет - обучения бакалавров технических вузов

Пособие содержит необходимые для обучения в техническом вузе фундаментальные сведения из элементарной и высшей математики.
Предельно кратко изложены основные понятия, формулы, теоремы (без доказательств), правила и методы, даны образцы решения примеров и задач.

Рецензент: *Щепин В. И.*, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой общеобразовательных дисциплин заочно-вечернего факультета Ир ГТУ

Вступление

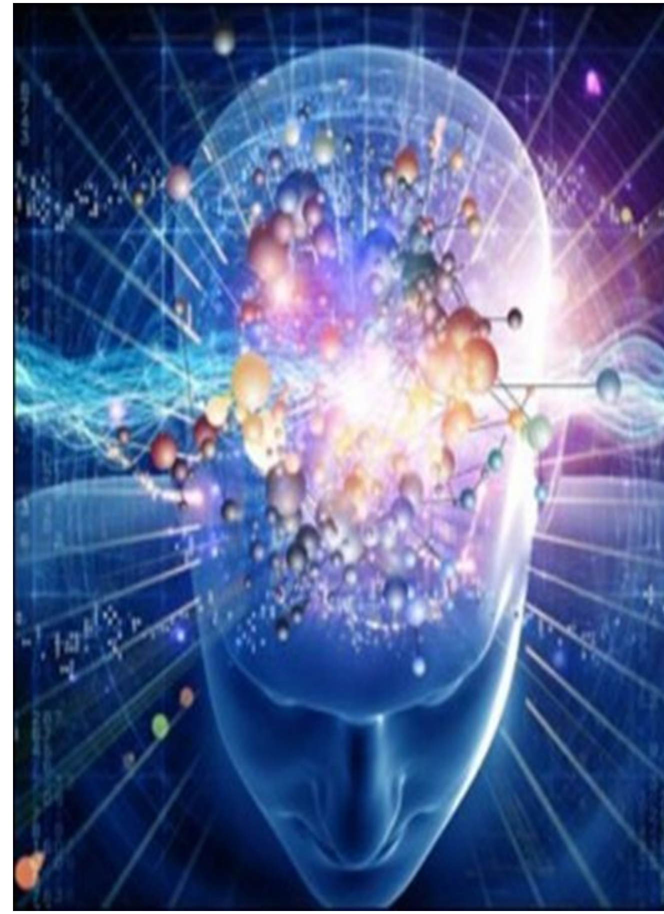
Математику уже за то
любить надо, что она ум
в порядок приводит

Леонардо Да Винчи

Суть математики –
в познаньи мироздания.
Царица разума, наук кумир,
вооружая силой знания
уводит в виртуальный мир

. . . .

Людмила Сергиенко



Содержание

ВВЕДЕН ИЕ

Данное электронное пособие представляет собой видео-презентацию первой части курса установочных лекций для дистанционного Интернет - обучения бакалавров заочно – дистанционного факультета Национального Исследовательского Иркутского государственного технического университета..

Пособие содержит необходимые для обучения в техническом вузе фундаментальные сведения из элементарной и высшей математики в соответствии с требованиями Федерального Государственного Стандарта третьего поколения.

Предельно кратко изложены основные понятия, формулы, теоремы (без доказательств), правила и методы, даны образцы решения примеров и задач.

Альбом презентаций составлен в программе Microsoft Power Point и содержит 164 слайда.

На каждом слайде автор стремился расположить логически замкнутый материал из своего электронного курса лекций.

В начале курса приводятся справочно – информационные сведения из элементарной математики. В этом разделе особое внимание в геометрии обращается на строгое определение декартовой системы координат на плоскости и в трёхмерном евклидовом пространстве, а в тригонометрии - на введение и связь градусной и радианной мер плоского угла.

Раздел высшей математики включает шесть глав: 1) элементы линейной алгебры, 2) элементы аналитической геометрии, 3) основные понятия математического анализа, 4) дифференциальное исчисление функции одной переменной, 5) интегральное исчисление функции одной переменной, 6) функции нескольких переменных

В первой главе рассматриваются матрицы, определители, системы линейных алгебраических уравнений и способы их решения по правилу Крамера и методу Жордана – Гаусса.

При рассмотрении векторных величин подробно разобраны задачи с использованием скалярного, векторного и смешанного произведения векторов, приведён оригинальный пример на вращение твёрдого тела прямоугольной формы вокруг неподвижной оси.

Во второй главе представлены элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

Ввeлeние

В начале на плоскости рассматриваются различные способы задания и построения прямой
(уравнение прямой, проходящей через заданную точку ортогонально заданному вектору;
уравнение прямой, проходящей через две заданные точки; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой в отрезках и др.).
Затем изучаются кривые второго порядка и линии, уравнения которых заданы в параметрической форме – эллипс, циклоида, астроида и др.
Рассматривается пример построения кривой в полярных координатах, даётся представление о работе с комплексными числами.
В геометрии пространства рассматриваются прямая и плоскость, поверхности второго порядка (эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры), поверхности вращения (однополостный гиперболоид, трехосный эллипсоид) и др.

В третьей главе даются основные понятия математического анализа: предел функции в точке и на бесконечности, первый и второй замечательные пределы, бесконечно малые и бесконечно большие функции, некоторые эквивалентные бесконечно малые функции и др.

Четвёртая глава «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» содержит определение производной, раскрывает её геометрический и физический смысл. Даны таблица производных основных элементарных функций, методы дифференцирования сложных функций, правила нахождения производных высших порядков, формула Тейлора. Рассмотрены разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена и алгоритм исследования и построения графика функции одного аргумента.

Пятая глава посвящена интегральному исчислению функции одной переменной. Рассмотрены неопределённый интеграл, его свойства и приёмы нахождения (способ подстановки, метод замены переменных, разложение дробно - рациональной функции на элементарные дроби по методу неопределённых коэффициентов, интегрирование простейших элементарных дробей, общая схема интегрирования рациональных дробей и др.)

ВВЕДЕНИЕ

При изучении определенного интеграла рассматриваются его приложения в геометрии (вычисление длины кривой при различных способах её задания, нахождение площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах, определение объёмов тел вращения и др.) Рассмотрены несобственные интегралы первого и второго рода и интегралы от разрывной функции.

В главе «Функции нескольких переменны» изучаются частные производные, экстремумы, касательная плоскость и нормаль к поверхности. Рассматриваются производная по направлению и градиент, его геометрический и физический смысл.

В конце пособия рекомендуются информационные источники для самостоятельной работы по дисциплине: даётся список основной и дополнительной учебной литературы, перечень электронных образовательных ресурсов.

Краткие справочно – информационные сведения

Основные обозначения

$\equiv$ означает «тождественно равно»;

$\cong$ или $\approx$ означает «тождественно равно»;

$\neq$ означает « не равно»;

$\|$ означает « параллельно»;

$\perp$ означает « перпендикулярно»;

(a, b) – интервал означает «$a < x < b$»;

$(a,b]$ - полуинтервал означает «$a < x \leq b$»;

$[a, b]$ – сегмент означает «$a < x < b$»;

$[a,b)$ – полусегмент означает «$a \leq x < b$»;

exp x - экспонента означает $exp\ x = e^x$

Логические символы

$=>$	означает	« следует » или « влечёт » ;
$<=>$	означает	« эквивалентно » или «тогда и только тогда »;
$\forall$	означает	« для всех » (квантор всеобщности);
$\exists$	означает	« существует » (квантор существования);
$\overline{\exists}$ или $\nexists$	означает	« не существует ».
$\in$	означает	« принадлежит »
$\overline{\in}$ или $\notin$	означает	« не принадлежит»
$\ni$	означает	« содержит»
$\overline{\ni}$ или $\not\ni$	означает	«не содержит»
$\emptyset$	означает	« пустое множество»
$A \cup B$	означает	«объединение множеств «
$A \cap B$	означает	«пересечение множеств»

Латинский алфавит

Заглавные буквы	Строчные буквы	Название буквы	Заглавные буквы	Строчные буквы	Название Буквы
A	**a**	а	**N**	**n**	эн
B	**b**	бэ	**O**	**o**	о
C	**c**	цэ	**P**	**p**	пэ
D	**d**	дэ	**Q**	**q**	Ку
E	**e**	е	**R**	**r**	эр
F	**f**	эф	**S**	**s**	эс
G	**g**	гэ (же)	**T**	**t**	тэ
H	**h**	ха (аш)	**U**	**u**	у
I	**i**	и	**V**	**v**	вэ
J	**j**	йот (жи)	**W**	**w**	дубль-вэ
K	**k**	ка	**X**	**x**	Икс
L	**ℓ**	эль	**Y**	**y**	игрек
M	**m**	эм	**Z**	**z**	зет

Греческий алфавит

Заглавные буквы	Строчные буквы	Название буквы	Заглавные буквы	Строчные буквы	Название буквы
Α	[illegible]	альфа	Ν	ν	ню
Β	[illegible]	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	[illegible]	гамма	Ο	ο	омикрон
Δ	[illegible]	дельта	Π	[illegible]	пи
Ε	[illegible]	эпсилон	Ρ	[illegible]	ро
Ζ	ζ	дзета	[illegible]	[illegible]	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
[illegible], [illegible]	[illegible]	тэта	Φ	[illegible]	фи
Ι	ι	йота	Χ	χ	хи
Κ	[illegible]	каппа	Υ	γ	ипсилон
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси
Μ	[illegible]	мю	[illegible]	[illegible]	омега

Математические константы

C = const - обозначение константы - произвольной постоянной;

$\boldsymbol{\pi}$ **= 3.14159…** $\approx \mathbf{3.14}$ отношение длины окружности к диаметру;

e = 2.71828… $\approx \mathbf{2.72}$ основание натурального логарифма.

Числовые множества

R – множество действительных чисел.

C - множество комплексных чисел.

N = $\{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \ldots; \boldsymbol{n}; \ldots\}$ - множество натуральных чисел.

Z = $\{\ldots; \mathbf{-3}; \mathbf{-2}; \mathbf{-1}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \ldots\}$ **-** множество целых чисел.

Q = $\left\{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}},\ m \ni Z, n \ni Z, n \neq 0\right\}$ - множество рациональных чисел.

Признаки делимости целых чисел

Число без остатка делится:

на 2 - если его последняя цифра чётная (без остатка делится на 2);

на 3 - если сумма его цифр без остатка делится на 3;

на 5 - если оно оканчивается на 0 или на 5;

на10 - если его последняя цифра 0.

Правила действий с обыкновенными дробями

1. Сложение и вычитание

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}= \frac{a^{\backslash f}}{m}+\frac{b^{\backslash q}}{n}-\frac{c^{\backslash r}}{p}= \frac{af+bq-cr}{\beta}$$

$(mnp\beta \neq 0)$

Общий знаменатель β – наименьшее целое число, которое делится на все знаменатели слагаемых дробей без остатка - наименьшее общее кратное чисел m, n, p: β = Н.О.К. (m, n, p). Число β равно произведению наибольшего из этих чисел на простые делители следующего знаменателя, не являющиеся одновременно делителями первого выбранного знаменателя, умноженному на простые делители оставшегося третьего знаменателя, не являющиеся одновременно делителями первых двух знаменателей.

Дополнительные множители

$f=\beta : m, \qquad q=\beta : n, \qquad r=\beta : p.$

П р и м е р 1: Вычислить $A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60}$.

Р е ш е н и е. Разложим знаменатели на простые делители

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} \underline{\mathbf{81}} & 3 \\ 27 & \underline{3} \\ 9 & \underline{3} \\ 3 & \underline{3} \\ 1 & \end{array} \quad \text{И} \quad \begin{array}{r|l} \underline{\mathbf{12}} & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r|l} \underline{\mathbf{60}} & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Общий знаменатель

[illegible] = Н. О. К. (81,12, 60) =

= 81 x (2x2) x 5 = 1620.

Дополнительные множители

$f = 1620 : 81 = 20,$ $q = 1620 : 12 = 135,$ $r = 1620 : 60 = 27$ $\Rightarrow$

$$A = \frac{11}{81} - \frac{5}{12} + \frac{7}{60} = \frac{11^{\backslash 20}}{81} - \frac{5^{\backslash 135}}{12} + \frac{7^{\backslash 27}}{60} = \frac{11x20 - 5x135 + 7x27}{1620} =$$

$$= \frac{220 - 675 + 189}{1620} = -\frac{266}{1620} = -\frac{133x2}{810x2} = -\frac{133}{810}.$$

О т в е т: $A = -\frac{133}{810}$.

Умножение и деление

$$\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}=\frac{a\cdot b}{m\cdot n}\quad (mn\neq 0),$$

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}=\frac{a\cdot n}{m\cdot b}\ (mnb\neq 0)$$

- **1. Модуль действительного числа и его свойства.**

$$|a|=\left[\begin{array}{lll} a & \text{при} & a\geq 0, \\ -a & \text{при} & a<0. \end{array}\right]$$

$$|a|\geq 0,\qquad |ab|=|a|\cdot|b|,\qquad |a+b|\leq|a|+|b|,$$

$$|-a|=|a|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0),\qquad a^2+b^2\geq 2|ab|.$$

* Арифметический корень $|a|=\sqrt{a^2}$

2. Определение и свойства степени

1. $a^0 = 1 \;\; (a \neq 0)$, 2. $a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n}$,

3. $a^n a^m = a^{n+m}$, 4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

5. $$\frac{a^n}{a^m} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{a^{n-m}}{1} = a^{n-m}, & \text{при} \quad n > m \quad (n - m > 0), \\ \dfrac{1}{a^{m-n}}, & \text{при} \quad m > n \quad (m - n > 0); \end{array}\right.$$

6. $\dfrac{1}{a^c} = a^{-c} \;\; (a \neq 0)$, 7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$,

8. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \; (b \neq 0)$, 9. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

10. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($\sqrt[2]{a}$ обозначают $\sqrt{a}$, $a \geq 0$)

11. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, 12. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, 13. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{m \cdot k}}$.

* $\sqrt{a^2} = \sqrt[2]{a^2} = \sqrt[2]{(-a)^2} = |a|$ — арифметический корень

3. Формулы сокращённого умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — разность квадратов;
4. $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$ — сумма квадратов
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;
6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;
7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов;
8. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов..

4. Арифметическая прогрессия

Последовательность чисел вида $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{2d},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{3d},\ \dots\}$ называется *арифметической прогрессией.*

Константа $d \neq 0$ называется *разностью арифметической прогрессии.*

$\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\cdot\boldsymbol{d},\quad n=1;2;3;\ \cdots$ - *общий член прогрессии.*

$$\boldsymbol{a_n}=\frac{\boldsymbol{a_{n-1}}+\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{2}}$$ - *характеристическое свойство прогрессии.*

Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

$$\boxed{\boldsymbol{S_n}=\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}+\cdots+\boldsymbol{a_n}=\frac{(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_n})\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}=\frac{[\boldsymbol{2a_1}+(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{d}]\cdot\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}}.$$

5. Геометрическая прогрессия

- последовательность чисел $\{b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3, \dots\}$

- $q \neq 0$ - *знаменатель геометрической прогрессии.*

$b_n = b_{n-1} \cdot q, b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ n = 1; 2; 3; \dots$, - *общий член прогрессии*.

Геометрическая прогрессия называется:

возрастающей, если $|q| > 1$; *убывающей*, если $0 < |q| < 1$;

знакочередующейся, если $q < 0$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q}}\ .$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boxed{S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \cdots b_1 q^n + \cdots = \frac{b_1}{1-q}}\ .$$

6. Логарифмы и их свойства

При $a > 0, \ a \neq 1, \ b > 0$ $\boxed{a^c = b \quad <=> \quad log_a b = c.}$

В переводе с французского слово «*логарифм*» означает *показатель*. Обозначают :

$\boxed{log_{10} a = lg\ a}$ - д е с я т и ч н ы й л о г а р и ф м,

$\boxed{log_e b = ln\ b}$ – *н а т у р а л ь н ы й л о г а р и ф м ,* основание которого - трансцендентное число $e = 2.71828... \approx 2.72.$

Основные свойства логарифмов

$\boxed{a^{log_a b} = b}$ - основное логарифмическое тождество.

1. $log_a a = 1;$
2. $log_a 1 = 0:$
3. $log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c;$
4. $c \cdot log_a b = log_a (b^c);$
5. $log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot log_a b;$
6. $log_a \left(\frac{b}{c} \right) = log_a b - log_a c$
7. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a};$
8. $log_a b = \frac{1}{log_b a}.$

7. Решения квадратного уравнения

7.1 Полное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

с действительными (вещественными) коэффициентами $a \neq 0$, b, c

и **дискриминантом** $D = b^2 - 4ac$ *имеет*:

при $D > 0$ – *два различных действительных корня* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

при $D = 0$ – *один двукратный действительный корень* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

при **D** < 0 – *два различных мнимых корня* (пара комплексно – сопряжённых чисел)

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{-D}}{2a}.$$

З а м е ч а н и е .

- Действительные (вещественные) числа изображаются десятью арабскими знаками - цифрами 0;1;2; … ; 9. Вводится ещё один знак – так называемая ***мнимая единица***, которая обозначается символом «$\boldsymbol{i}$» (в технической литературе «**j** »), и удовлетворяет условию $\boxed{i^2 = -1.}$
Выражение $z = \alpha + i\,\beta$ с действительными (вещественными) числами α и β называется ***комплексным или мнимым числом***.
Число $\bar{z} = \alpha - i\,\beta$ называется комплексно-сопряжённым числу z.

П р и м е р. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0.$

Р е ш е н и е. Так как $a = 1$, $b = -4$, $c = 13$, $D = -36$, $D < 0$, имеем $\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2\mathrm{a}} = \frac{4\pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{4\pm 6\mathrm{i}}{2} = 2 \pm 3i.$

О т в е т: корнями квадратного уравнения являются комплексно – сопряжённые числа $x_1 = 2 + 3i$ и $x_2 = 2 - 3i$.

7.2. Приведённое квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0$$

- Коэффициенты p, q – действительные (вещественные числа).

Корни определяются по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

7.3. Теорема Виета

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту p с обратным знаком, а произведение - свободному члену q:

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

П р и м е р. В уравнении $x^2 - 6x + 8 = 0$ имеем $p = -6$, $q = 8$, корни

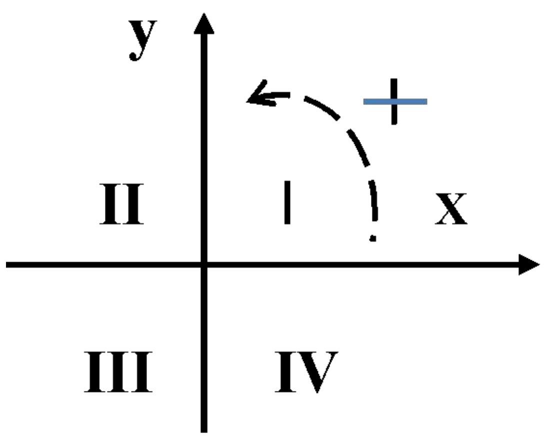
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 = \{3-1; 3+1\} = \{2; 4\}$, $\begin{cases} 2+4 = 6 = -p, \\ 2 \cdot 4 = 8 = q/ \end{cases}$

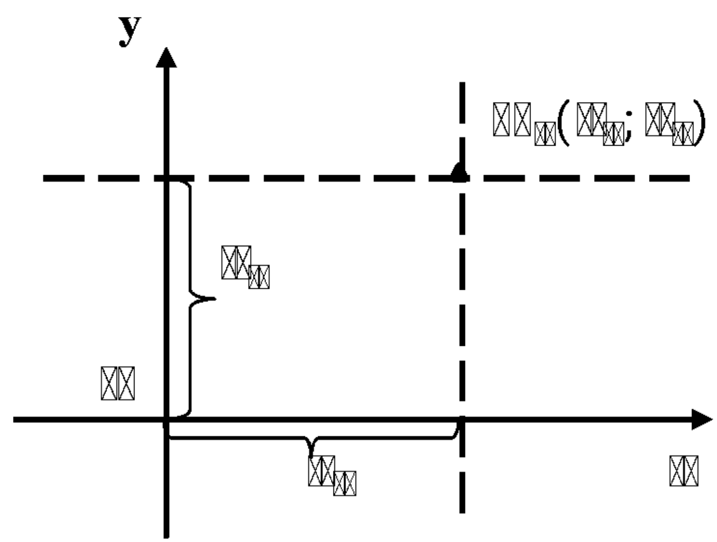
8.1. *Декартова система координат на плоскости* –

в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^2 = \{-\infty < \boldsymbol{x} < +\infty;\ \ -\infty < \boldsymbol{y} + \infty\}$:

пара взаимно ортогональных ориентированных против часовой стрелки

четверти или квадранты

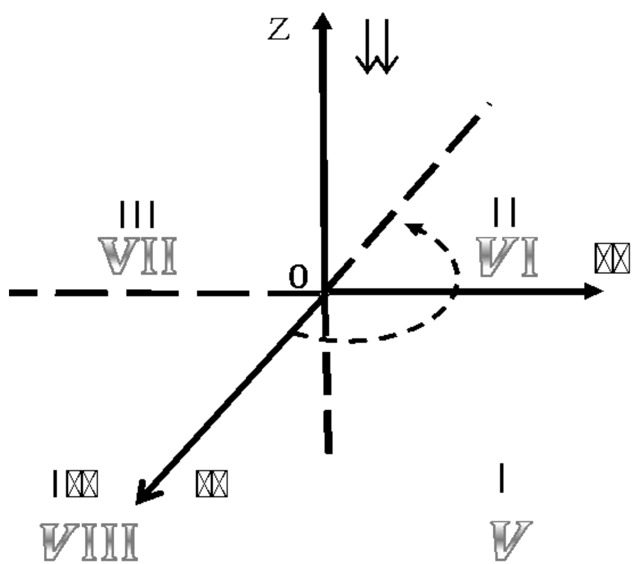


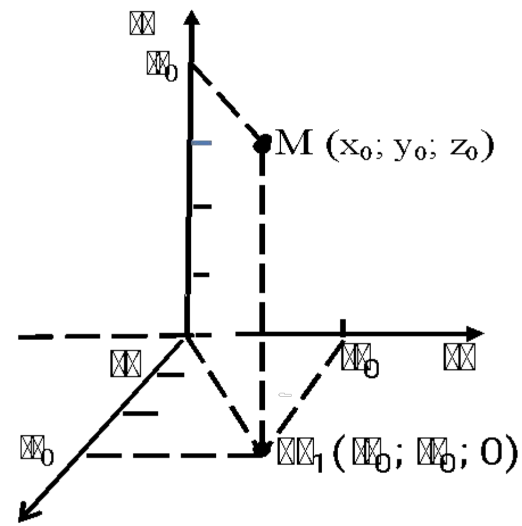


8.2. Декартова система координат в евклидовом пространстве $R^3 = \{x; y; z\}$:

x – а б с ц и с с а, y – о р д и н а т а, z – а п п л и к а т а

о к т а н т ы I – [illegible]II





З а м е ч а н и е. Единица масштаба по оси OX по длине составляет примерно 0.8 от одинаковых единиц масштаба по осям OY и OZ.

9. Тригонометрия

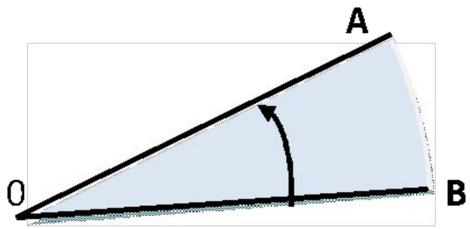


Рис. 1

Плоский угол - часть плоскости между двумя лучами, выходящими из одной точки (вершины).

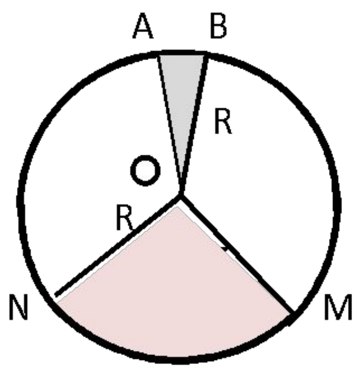


Рис. 2

1° - **один градус** – центральный угол $\angle$ AOB, опирающийся на дугу длиной

$\ell_{AB} = \frac{C}{360}$, где C - длина окружности;

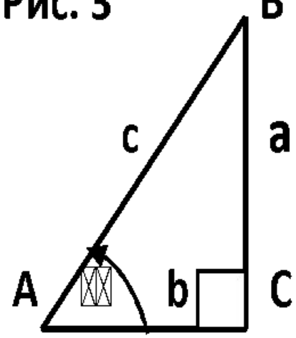
1- один радиан – центральный угол $\angle$ MON, опирающийся на дугу длиной $\ell_{MN} = R$.

$C \sim 360^0 \sim 2\pi \quad => $

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,рад. \approx 0,017\,рад., \quad 1\,рад. = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17'\ldots \approx 57^\circ$$

9.1. Тригонометрические функции острого угла

Рис. 3



$\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $0° \le \alpha \le 90°$

Синус: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{длина противолежащего } \alpha \text{ катета}}{\text{длина гипотенузы}}$

Косинус: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{длина прилежащего к } \alpha \text{ катета}}{\text{длина гипотенузы}}$

Тангенс:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{длина противолежащего катета}}{\text{длина прилежащего катета}}$;

Котангенс:

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{длина прилежащего катета}}{\text{длина противолежащего катета}}$

Секанс:

$\sec\alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{длина гипотенузы}}{\text{длина прилежащего катета}}$;

Косеканс:

$\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{длина гипотенузы}}{\text{длина противолежащего катета}}$

9.2 Таблица значений тригонометрических функций «острого» угла

Угол [illegible] (радиан/ градус)	0 / 0^0	[illegible] / 30^0	[illegible] / 45^0	[illegible] / 60^0	[illegible] / 90^0
sin [illegible]	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
cos [illegible]	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
tg [illegible]	0	[illegible]	1	[illegible]	[illegible] $+\infty$
ctg [illegible]	[illegible] $+\infty$	[illegible]	1	[illegible]	0

9.3 Тригонометрические функции произвольного угла

$$\mathbf{0 + 2\pi k \le \alpha \le \pi/2 + 2\pi k, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots}$$

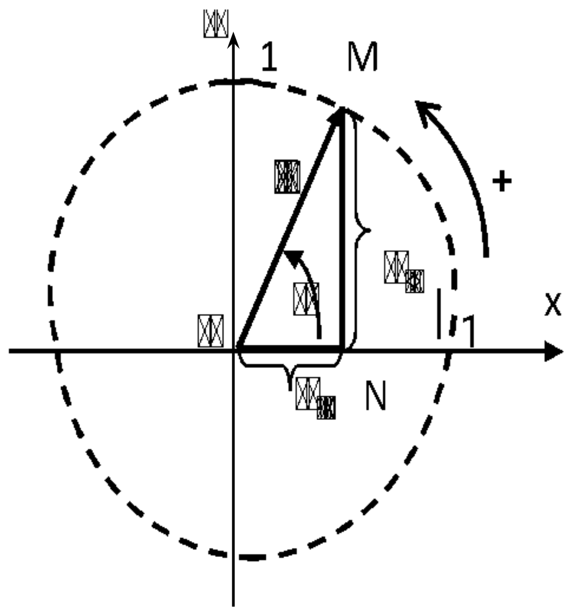


Рис. 4

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ - единичный радиус - вектор

$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}| = 1.$ Из ΔOMN =>

$\cos\alpha = x_M/1, \quad \sin\alpha = y_M/1.$

=> $\overrightarrow{OM} = (x_M; y_M) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$

Синусом и косинусом угла, образованного единичным радиус - вектором с положительным направлением оси абсцисс, являются соответственно ордината и абсцисса этого вектора.

При $x_M \neq 0$: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y_M}{x_M}$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{x_M}$; при $y_M \neq 0$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{x_M}{y_M}$, $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{y_M}$.

9.4 Формулы приведения

	$\beta=\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi\pm\alpha$
sinβ	cosα	∓sinα	-cosα	±sinα
cosβ	∓sinα	-cosα	±sinα	cosα
tgβ	∓ctgα	±tgα	∓ctgα	±tgα
ctgβ	∓tgα	±ctgα	∓tgα	±ctgα

Пример 3. $$\sin 300^0 = \begin{cases} \sin(270^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\sqrt{3}/2, \\ \sin(360^0 - 60^0) = -\sin 60^0 = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Значение тригонометрической функции

$$f(360^0 k \pm \beta) = \pm f(\beta), \qquad k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots .$$

Пример 4.

$$\mathrm{tg}\,585^0 = \begin{cases} \mathrm{tg}(360^0 + 225^0) = \mathrm{tg}\,225^0 = \mathrm{tg}(180^0 + 45^0) = \mathrm{tg}\,45^0 = 1, \\ \mathrm{tg}(720^0 - 135^0) = -\mathrm{tg}\,135^0 = -\mathrm{tg}(180^0 - 45^0) = \mathrm{tg}\,45^0 = 1. \end{cases}$$

9.5 Основные тригонометрические формулы

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$$

9.6. Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$$

$$\boxed{\cos 2x = 2cos^2 x - 1}$$

$$\boxed{\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x}$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2sin^2 x}$$

$$\boxed{\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

$$\boxed{tg\ 2x = \frac{2tg\ x}{1-tg^2 x}}$$

$$\boxed{\sin 2x = \frac{2\ tg\ x}{1+tg^2 x}}$$

$$\boxed{ctg\ 2x = \frac{ctg^2 x-1}{2ctg\ x}}$$

9.7 Универсальные тригонометрические подстановки

(выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла при $\boxtimes \neq \boxtimes + 2\boxtimes\boxtimes\boxtimes$, где $\boxtimes\boxtimes\ \boxtimes$)

$$\cos\boxtimes = \frac{1-\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}}{1+\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}};\qquad \sin\boxtimes = \frac{2\boxtimes\boxtimes\frac{\boxtimes}{2}}{1+\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}};\qquad \boxtimes\boxtimes\ \boxtimes = \frac{2\boxtimes\boxtimes\frac{\boxtimes}{2}}{1-\boxtimes\boxtimes^2\frac{\boxtimes}{2}};$$

9.8 Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}$$

9.9. Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

9.10. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$\mathrm{ctg}\, x + \mathrm{ctg}\, y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}\, y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}$$

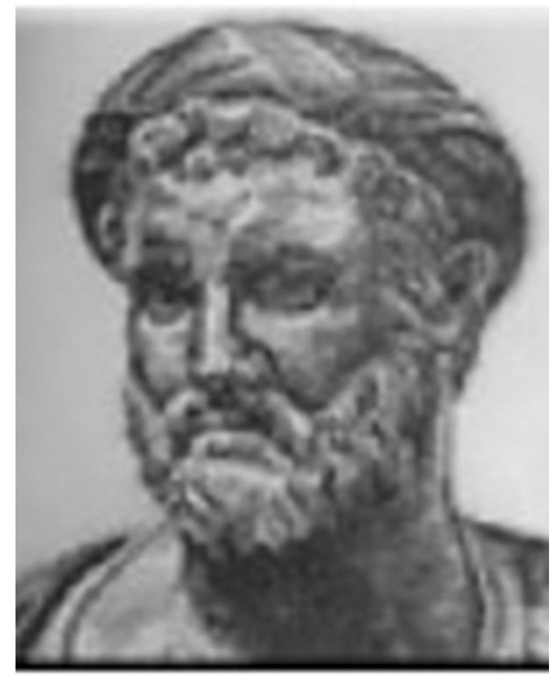
9.11. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

[illegible]



Пифагор
родился в 580 г.
умер в 500 г. до н.э.

Преклонение перед числом в пифагорейском союзе сопровождалось мистическими измышлениями, зачатки которых были заимствованы совместно с началами математических знаний из стран Ближнего Востока… .

Космос (понятие, введенное пифагорейцами) - это гармония, совершенство, строй, мера. Вселенная, созданная числом и противоположными принципами (конечность - бесконечность), ведет себя логически, соразмерно необходимости и меры… .

9.12. Обратные тригонометрические функции

-

$Arc\sin \mathrm{x}$ - («арка», дуга) - это величина, синус которой равен x.

$Arccos\ x$ - это величина («арка», дуга), косинус которой равен x, и т. д.

$$\sin(Arc\sin \mathrm{x}) = x, \quad \cos(Arccos\ x) = x, \quad tg(Arctg\ x) = x, \quad \dots$$

Функция	Область определения	Область изменения	Главное значение
$y = Arcsin\ x = (-1)^n \arcsin x + \pi n.$	$-1 \leq x \leq 1,$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$	$\arcsin x.$
$y = Arccos\ x = \pm \arccos x + 2\pi n.$	$-1 \leq x \leq 1,$	$0 \leq y \leq \pi,$	$\arccos x.$
$y = Arctg\ x = arctg\ x + \pi n.$	$-\infty < x < +\infty,$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$	$arctg\ x,$
$y = Arcctg\ x = arcctg\ x + \pi n$	$-\infty < x < +\infty,$	$0 < y < \pi,$	$arcctg\ x.$

9.13. Решения тригонометрических уравнений

- $\sin x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$

$\cos x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$tg\ x = a, \quad x = arctg\ a + \pi n, \quad n \in Z$

$ctg\ x = a, \quad x = arcctg\ a + \pi n, \quad n \in Z$

Частные случаи

1) $sin\ x = 0, \quad x = \pi n;$

2) $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

3) $\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

4) $cos\ x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

5) $\cos x = 1, \quad x = 2\pi n\ ;$

6) $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n$

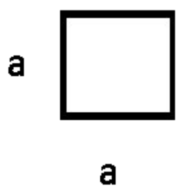
7) $tg = 0, \quad x = \pi n\ ;$

8) $ctg\ x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

10. Геометрия

10.1 Некоторые из основных геометрических фигур на плоскости

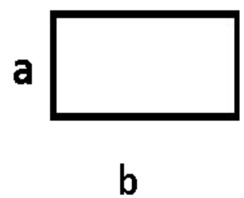
Квадрат



Площадь: [illegible] = [illegible]^2

Периметр: [illegible] = 4[illegible]

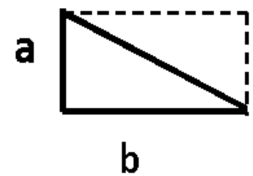
Прямоугольник



Площадь: [illegible] = [illegible]

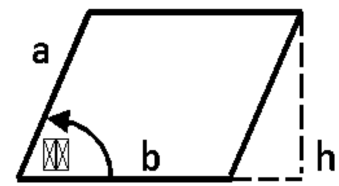
Периметр: [illegible] = 2([illegible] + [illegible])

Прямоугольный треугольник



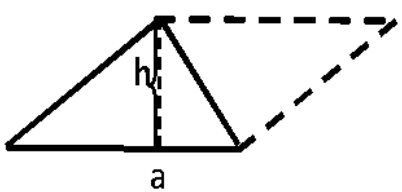
Площадь: [illegible] = $\frac{1}{2}$ [illegible]

Параллелограмм



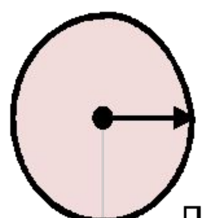
Площадь: [illegible] = [illegible] sin [illegible] = [illegible]

Косоугольный треугольник



Площадь: [illegible] = $\frac{1}{2}$ [illegible]

Круг

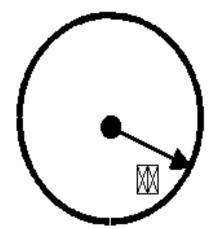


радиуса r

Площадь круга:

[illegible] = [illegible]^2

Окружность



Длина окружности

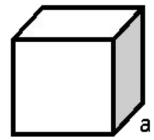
C = 2π[illegible]

[illegible] ≈ 3.14

10.2 Некоторые из основных геометрических фигур в пространстве

Куб

(гексаэдр)

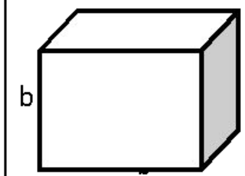


Объём: $V = a^3$

Длина каркаса: $L = 12a$

Площадь поверхности: $S = 6a^2$

Параллелепипед

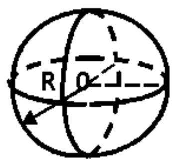


Объём $V = abc$

Длина каркаса $L = 4(a + b + c)$

Площадь поверхности: $S = 2(ab + bc + ac)$

Шар



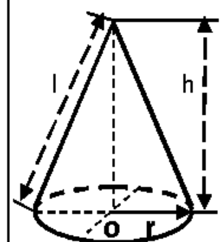
Объём $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Площадь поверхности

Место для фшара (площадь сферы):

$S=4\pi R^2$

Прямой круговой конус



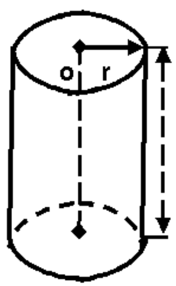
Объём $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Площадь поверхности:

полной $S_{пол} = \pi r l + \pi r^2$;

боковой $S_{бок} = \pi r l$

Прямой круговой цилиндр



Объём $V = \pi r^2 h$

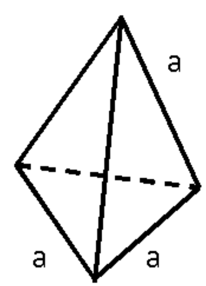
Площадь поверхности:

боковой $S = 2\pi r h$;

полной

$S = 2\pi r(r + h)$

Правильная четрёхугольная пирамида (тетраэдр)



Объём $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \approx 0.1179\, a^3$

Площадь полной поверхности

$S = a^2\sqrt{3} \approx 1.7321\, a^2$

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. МАТРИЦЫ

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij}, $i = 1; 2; 3; \dots; m = \overline{1; m},$ $j = 1; 2; 3; \dots; n = \overline{1; n}$ называются *элементами матриц*

$$A = (a_{ij}) = \{a_{ij}\} = [a_{ij}] = \|a_{ij}\| .$$

Если $m = n$, матрица называется **квадратной**, а число **n** –её **порядком**.

ЭВАРИСТ ГАЛУА

(1811–1832).

Выдающийся французский математик, основатель высшей алгебры, радикальный революционер-республиканец, он был застрелен на дуэли в возрасте двадцати лет

Действия с матрицами

- ***Произведением матрицы на число*** называется матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы А на это число λ:

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{C}$$

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}}) = (\lambda \boldsymbol{a_{ij}}).$$

- ***Суммой матриц*** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ является матрица $C = (c_{ij})$, элементами которой являются сумма соответствующих элементов исходных матриц

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}.$$

Действия с матрицами

- ***Произведением матриц*** $A = (a_{ik}),\, i = \overline{1; n},$ и $B = (b_{kl}),\, l = \overline{1; n},$ называется такая матрица $P = (p_{il})$, элементами которой являются суммы произведений элементов строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы $p_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}$:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \ldots & a_{21}b_{1r} + a_{22}b_{2r} + \cdots + a_{2n}b_{nr} \\ \ldots.\ \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots & \ldots.\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \ldots & a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 1.

Записать данную систему в виде одного матричного уравнения

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -18 \\ x + 3y - z = -11 \\ 4x - 2y - 3z = -12 \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Обозначим А-матрица коэффициентов системы или основная матрица, X - матрица неизвестных B-матрица свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -18 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix} \quad => $$

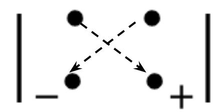
$$\overrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}} \cdot \bigg\downarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - 2z \\ x + 3y - z \\ 4x - 2y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

О т в е т : A·X=B $<=>$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}$

1.2. Определители

Определителем или ***детерминантом*** квадратной матрицы A называется число Δ (обозначается $|A|$ или $\det A$), которое вычисляется по определенному правилу в зависимости от её порядка.

Если порядок матрицы m=n = 2, то ***определитель второго порядка***

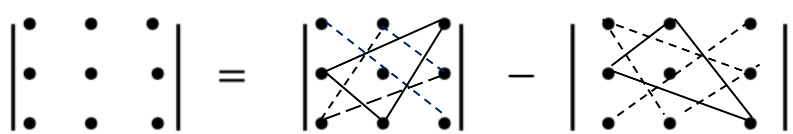
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$ схема вычисления .

Если n = 3, то ***определитель третего порядка***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) -$$

$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}\,a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}),$$

Схема вычисления определителя 3 − го порядка по правилу треугольников



• Вычисление определителя порядка $n > 2$

Определители порядка $\mathrm{n} > 2$ можно вычислять разложением по элементам первой строки матрицы $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ik}})_{\mathrm{n,n}}$ по правилу

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$

где M_{1k} - определитель матрицы A', которая получается из A вычёркиванием 1-ой строки и $k -$ ого столбца.

Процедура последовательно выполняется в убывающем порядке начиная с определителя порядка n и заканчивается определителем порядка 3:

$$\mathrm{n}; (n-1); (n-2); (n-3); \ldots; 4; 3; 2.$$

Например согласно последнему правилу определитель 3 – его порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} . =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

1.3 Обратные матрицы

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к квадратной матрице A, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была *невырожденной*, т.е. чтобы $\det A \neq 0$.

Обратная матрица к матрице A определяется таблицей чисел

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа A_{ij}- *алгебраические дополнения матрицы A* подсчитываются по правилу $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. где M_{ij} – *миноры матрицы A* - определители матрицы A', которая получается из A вычёркиванием i - ой строки и j-го столбца (на пересечении стоит элемент a_{ij}).

11

ПРИМЕР 2. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta(A) = 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-10) + (-2) \cdot 11 = 2.$$

О т в е т :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.4 Решение систем линейных алгебраических уравнений

ПРИМЕР 3. Решить матричное уравнение $AX = B$.

Р е ш е н и е . Умножим обе части матричного уравнения $AX = B$ на матрицу A^{-1}:

$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X$, получаем

О т в е т: $X = A^{-1} \cdot B$.

ПРИМЕР 4

Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -18 \\ x + 3y - z = -11 \\ 4x - 2y - 3z = -12 \end{cases}$$

Р е ш е н и е . $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

О т в е т: $x = -1$, $y = -2$, $z = 4$.

- **Правило Крамера**

Если отличен от нуля главный определитель матрицы А из коэффициентов системы

линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$

то эта система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = \overline{1;n}.$$

Частный определитель Δi находится путем замены i-того столбца в главном определителе Δ на столбец свободных членов b_i.

ПРИМЕР 5.
Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+4y-z=3 \\ -x+3y+2z=7 \\ 3x+2y-2z=-3 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$x = \frac{-21}{7} = -3, \quad y = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{-7}{7} = -1.$$

ОТВЕТ: $x = -3, \quad y = 2, \quad z = -1.$

● Метод Жордана - Гаусса

Основой идеей метода Гаусса является приведение тождественными преобразованиями расширенной матрицы системы к треугольному виду

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad => \quad T = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_n \end{array}\right)$$

Тождественные преобразования матриц,

не меняющие решение исходной системы линейных уравнений, заключаются в следующем:

- перемена местами двух строк матрицы;
- умножение любой строки на любое ненулевое число;
- умножение строки на любое число, отличное от нуля и сложение с соответствующими элементами другой строки.

ПРИМЕР 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+y-2z=5 \\ x+4y+z=-11 \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 \Leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2-3C_1 \\ \sim \\ C_3-2C_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -11 & -5 & 38 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{4C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -44 & -20 & 152 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_2-5C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim \underset{\sim}{C_3+2C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & 0 & -224 & 224 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\frac{1}{224}C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} C_2+25C_3 \\ \sim \\ C_1-C_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1-4C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

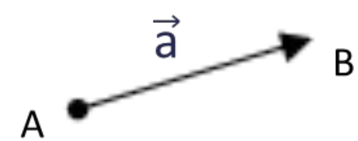
ОТВЕТ: $x=2$, $y=-3$, $z=-1$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. ВЕКТОРЫ

Если для характеристики величины помимо численного значения необходимо указывать направление её изменения, то она называется векторной величиной.

Векторные величины геометрически изображаются направленными отрезками, которые называются векторами. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.



Вектор $\vec{a}$, имеющий длину (**модуль вектора** $|\vec{a}|$), равную единице, называется **ортом.**

Вектор длины 0, не имеющий направления, называется **нулевым вектором** и обозначается $\vec{0}$.

***Коллинеарными* векторами** называются векторы, принадлежащие одной прямой или параллельным прямым.

К**омпланарными векторами** называются векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

●Линейные операции над векторами.

арифметической прогрессией.

Константа $d \neq 0$ называется *разностью арифметической прогрессии.*

$a_n = a + (n-1)\cdot d, \quad n = 1; 2; 3; \cdots$ - *общий член прогрессии.*

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ - *характеристическое свойство прогрессии.*

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \frac{[2a_1+(n-1)d]\cdot n}{2}}.$$

– последовательность чисел $\{b, bq, bq^2, bq^3, \dots\}$

– $q \neq 0$ - *знаменатель геометрической прогрессии.*

$b_n = b_{n-1}\cdot q, b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \ n = 1; 2; 3; \dots,$ - *общий член прогрессии.*

Геометрическая прогрессия называется:
возрастающей, если $|q| > 1$; *убывающей,* если $0 < |q| < 1$;
знакочередующейся, если $q < 0$.
Сумма n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}}.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boxed{S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \cdots b_1 q^n + \cdots = \frac{b_1}{1-q}}.$$

При $a > 0, \ a \neq 1, \ b > 0$ $\boxed{a^c = b \iff log_a b = c.}$

В переводе с французского слово «*логарифм*» означает *показатель*. Обозначают :

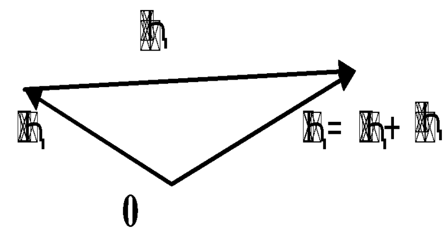
$\boxed{log_{10} a = lg\ a}$ - *десятичный логарифм,*

$\boxed{log_e b = ln\ b}$ — *натуральный логарифм,* основание которого - трансцендентное число $e = 2.71828\ldots \approx 2.72.$

Основные свойства логарифмов

$\boxed{a^{log_a b} = b}$ - основное логарифмическое тождество.

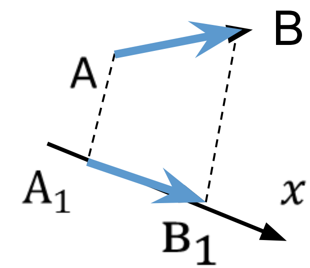
1. $log_a a = 1$;
2. $log_a 1 = 0$:
3. $log_a(b\cdot c) = log_a b + log_a c$;
4. $c \cdot log_a b = log_a(b^c)$;
5. $log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\cdot log_a b$;
6. $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$
7. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$;
8. $log_a b = \frac{1}{log_b a}$.



Разностью двух векторов и называется такой вектор $\vec{d}$, который в сумме с вектором даёт вектор $\vec{a}$: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\cdot\vec{b}$.

Так как нулевые векторы геометрически изображаются одной точкой, то операции с векторами не должны противоречить аналогичным действиям со скалярными величинами.

Геометрической проекцией вектора на ось называется вектор , ограниченный проекциями А1 и В1 точек начала А и конца В на эту ось: $\overrightarrow{A_1B_1} = \text{пр.}_{\overrightarrow{ox}} \overrightarrow{AB}$



Действительные (вещественные) числа изображаются десятью арабскими знаками - цифрами 0;1;2; … ; 9. Вводится ещё один знак – так называемая ***мнимая единица***, которая обозначается символом «i» (в технической литературе «**j** »), и удовлетворяет условию $\boxed{i^2 = -1.}$

Выражение $z = \alpha + i\,\beta$ с действительными (вещественными) **Место для формулы.** числами α и β называется ***комплексным или мнимым числом.***

Число $\bar{z} = \alpha - i\,\beta$ называется комплексно-сопряжённым числу z.

П р и м е р. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + 13 = 0.$

Р е ш е н и е. Так как $a = 1,\ b = -4,\ c = 13,\ D = -36,\ \ D < 0,$ имеем $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$

О т в е т: корнями квадратного уравнения являются комплексно – сопряжённые числа $x_1 = 2 + 3i$ и $x_2 = 2 - 3i.$

В векторной алгебре при выполнении многих операций с вектором работают как с *матрицей – строкой* или *матрицей – столбцом* из его координат, количество которых равно размерности пространства моделирования

Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$, λ – число, то

1. $⅄ \cdot \vec{a} = (⅄x_a;\ ⅄y_a;\ ⅄\, z_a)$, $\qquad |⅄ \cdot \vec{a}| = |⅄| \cdot \overrightarrow{|a|}$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (x_a + x_b;\ y_a + y_b;\ z_a + z_b)$.
3. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} = (x_a - x_b;\ y_a - y_b;\ z_a - z_b)$

Условие параллельности (*коллинеарности)* двух векторов

$\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$

при $x_b \neq 0$, $y_b \neq 0$, $z_b \neq 0$

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = ⅄$$

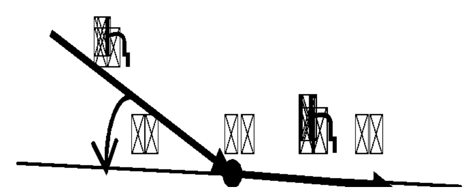
следует из равенства $\vec{a} = ⅄ \cdot \vec{b}$.

1.4. Скалярное произведение векторов

- Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число с (скаляр), равное произведению их модулей на косинус угла φ, образованного при вращении вектора $\vec{a}$ до направления вектора $\vec{b}$ против часовой стрелки

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = c.$$

- **ПРИМЕР** . Пусть материальная точка прямолинейно движется под действием постоянной силы $\vec{F}$. Работа силы по перемещению точки из положения M в положение N численно равна скалярному произведению вектор – силы $\vec{F}$ на вектор – путь $\vec{S}=\overrightarrow{MN}$:



● Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

2. Два ненулевых вектора и ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное ***произведение равно нулю:*** $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad <=> \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

3. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ **- скалярный квадрат вектора** $\vec{a}$,

4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,

5. $\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\overrightarrow{\lambda a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \overrightarrow{\lambda b})$, $\lambda -$ число.

Скалярные произведения базисных ортов $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в R^3:

$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ ***и*** $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Косинусы углов α, β, γ между вектором $\vec{a} = (x_a; \ y_a; z_a)$ и осями координат (ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$. Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора

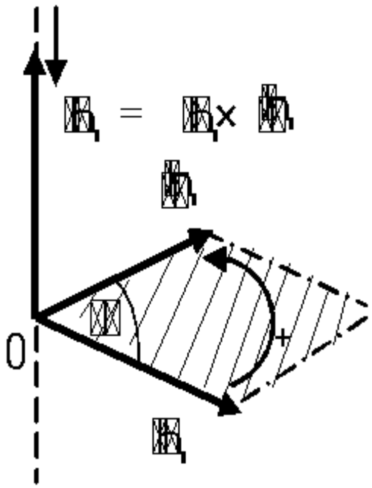
$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.}{\sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2}\ \sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2}}$$

1.5 Векторное и смешанное произведения векторов

- **Векторным произведением** двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{a} \times \bar{b}$, что если начала векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ поместить в одну точку O, то



1) вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{c}$ лежит на перпендикуляре к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$);

2) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют *правую тройку векторов* (вектор $\bar{c}$ ориентирован так, что со стороны его конца кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается против часовой стрелки);

3) длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$

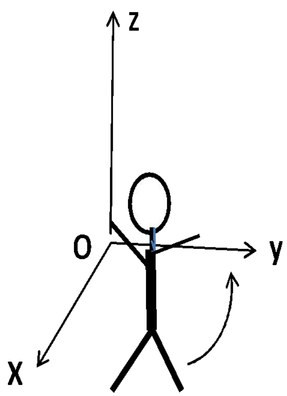
$S = |\bar{a} \times \bar{b}|$

=> $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi$,

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Понятие векторного произведения имеет смысл только в пространстве R^3.

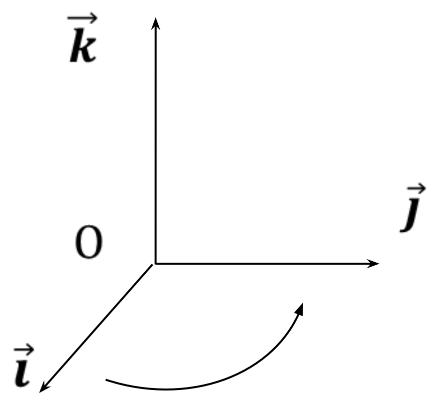
Правая тройка векторов

Направление обхода -
против часовой стрелки

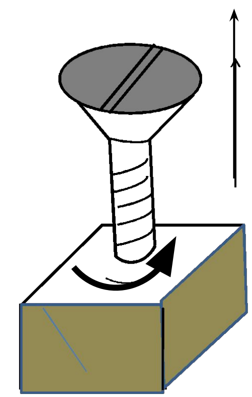


Базисные орты

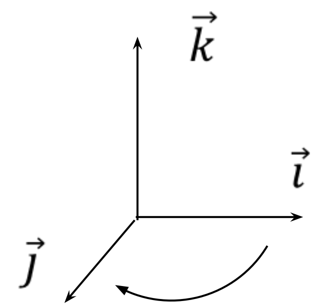
$$|\vec{\boldsymbol{i}}| = |\vec{\boldsymbol{j}}| = \left|\vec{\boldsymbol{k}}\right| = \mathbf{1}$$



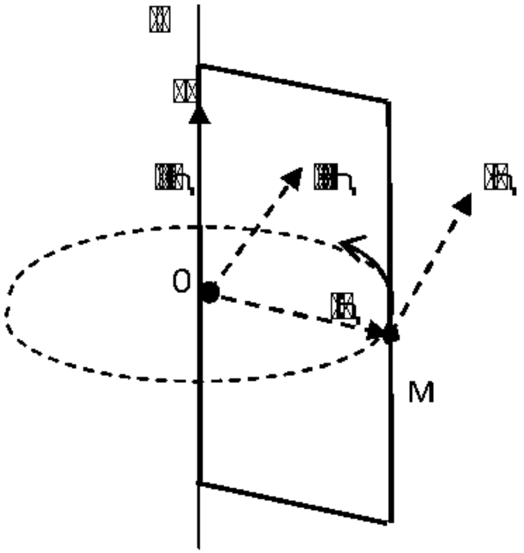
Правило буравчика (правило правого винта)



* ***Левая тройка векторов = >***



ПРИМЕР . Пусть твёрдое тело в форме прямоугольника вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг неподвижной оси l, проходящей через одну из его сторон.



Линейная скорость вращения $\bar{v}$ точки M на поверхности тела определяется как векторное произведение угловой скорости $\bar{\omega} =$ [illegible] на радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \bar{r}$ точки M:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

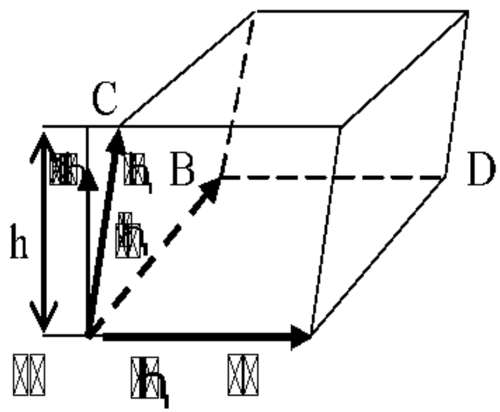
- **Свойства векторного произведения**

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$;
2. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное *произведение равно нулевому вектору:* $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}$
3. $[\bar{a}, \bar{a}] = \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$
4. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$
5. $\lambda[\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}]$, $\lambda -$ число,

● Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число [illegible], равное скалярному произведению вектора [illegible] на вектор [illegible] × [illegible], т. е. [illegible] = [illegible]

Объём параллелепипеда, построенного на трёх некомпланарных векторах [illegible], [illegible], [illegible] равен абсолютной величине - модулю смешанного произведения [illegible]



[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible]

Свойства смешанного произведения

1. [illegible] = [illegible] = [illegible]

2. При перестановке двух рядом стоящих сомножителей смешанное произведение меняет знак:

[illegible] = − [illegible] = [illegible] = − [illegible] = [illegible] = − [illegible]

Доказаны следующие утверждения

1. Если $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ равно определителю третьего порядка из их координат

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. Векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР 7.

Упростить выражение □ = (2□ − 3□ + 4□) × □ − 2□ − 3□ − 4□

РЕШЕНИЕ

□ = 2□ × □ − 2□ − 3□ × □ − 2□ + 4□ × □ − 2□ − 3□ − 4□ =

= 2□ × □ − 4□ × □ − 3□ × □ + 6□ × □ + 4□ × □ − 8□ × □ − 3□ − 4□ =

= □ □ × □ = 0, □ × □ = □, □ × □ = − □, □ × □ = 0, □ × □ = □, □ × □ = − □ □ =

= 20 − 4□ − 3□ − □ + 60 + 4□ − 8□ − □ − 3□ − 4□ =

= 0 − 4□ + 3□ + 0 + 4□ + 8□ − 3□ − 4□ = 5□ − □.

О Т В Е Т: □ = 5□ − □.

ПРИМЕР 8.

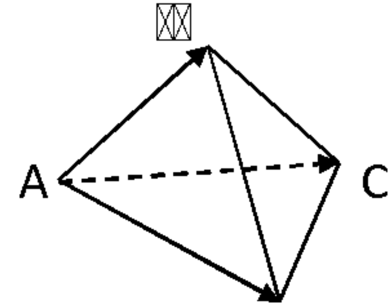
Найти объём пирамиды V, если заданы её вершины

$A(-4; 1; -3)$, $B(2; -5; 1)$, $C(3: 4; 3)$, $D(5: 2: -4)$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим три вектора, исходящие из одной точки A

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; \; y_B - y_A; \; z_B - z_A) = (2 + 4; \; -5 - 1; \; 1 + 3) = (6; -6; 4)$,

$\overrightarrow{AC} = (7; 3; 6)$, $\overrightarrow{AD} = (9; 1; -1)$



$$V = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 9 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-500\right| = \frac{250}{3} = 83\frac{1}{3}$$

О Т В Е Т: объём пирамиды $V = 83\frac{1}{3}$ (ед.)^3