

# Тема занятия: **Действия над векторами**

Лекция по дисциплине «Математика» для студентов 1 курса  
Преподаватель: Федорова Э.Р.

# Понятие вектора

- Рассмотрим произвольный отрезок. На нем можно указать два направления.

Чтобы выбрать одно из направлений, один конец отрезка назовем **НАЧАЛОМ**, а другой – **КОНЦОМ** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

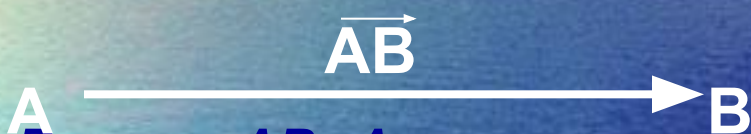


- Определение.

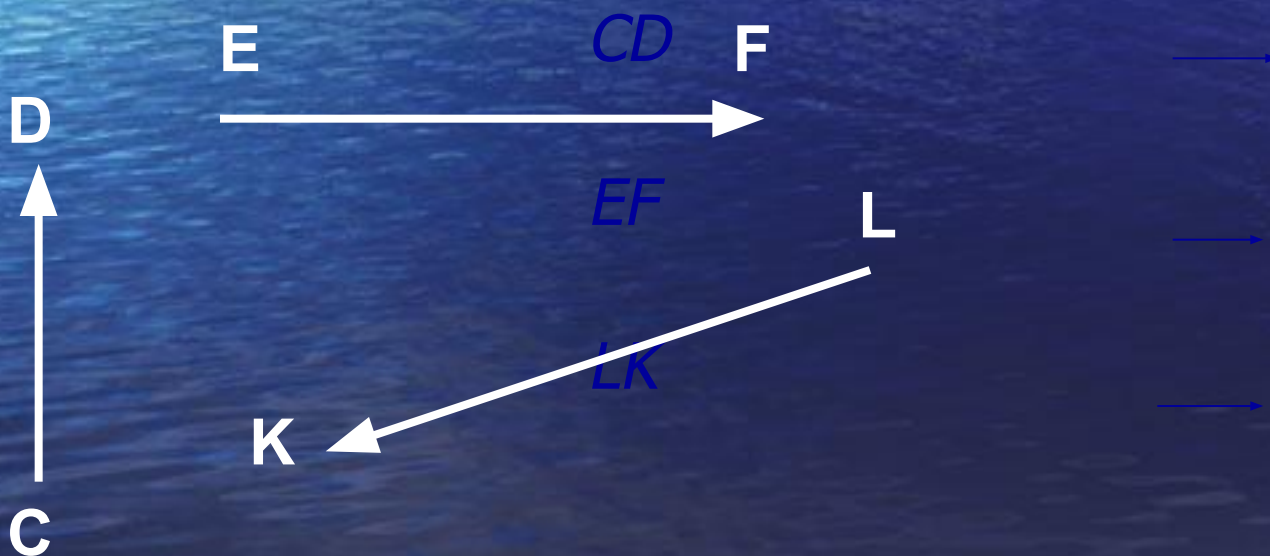
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором.

# Понятие вектора

- На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой

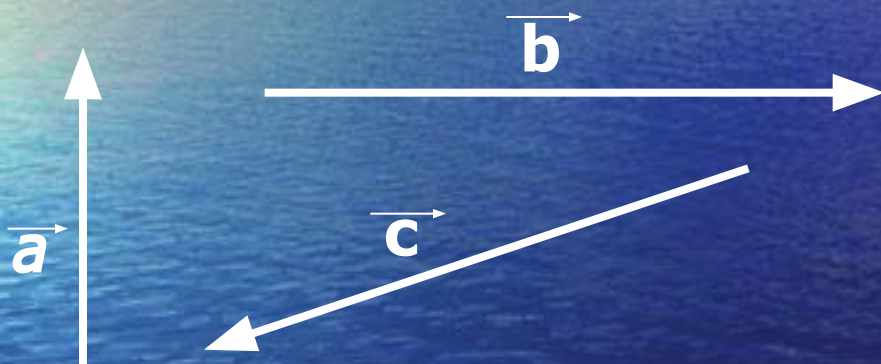


Вектор  $AB$ ,  $A$  – начало вектора,  $B$  – конец.



# Понятие вектора

- Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней:



- Любая точка плоскости также является вектором, который называется **НУЛЕВЫМ**. Начало нулевого вектора совпадает с его концом:

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

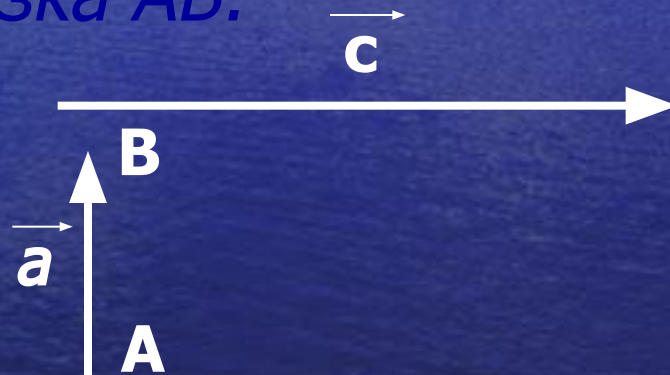
**M**  
○

# Понятие вектора

- Длиной или модулем ненулевого вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ :

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{a}| = AB = 5$$

$$|\overrightarrow{c}| = 17$$



- Длина нулевого вектора считается равной нулю:

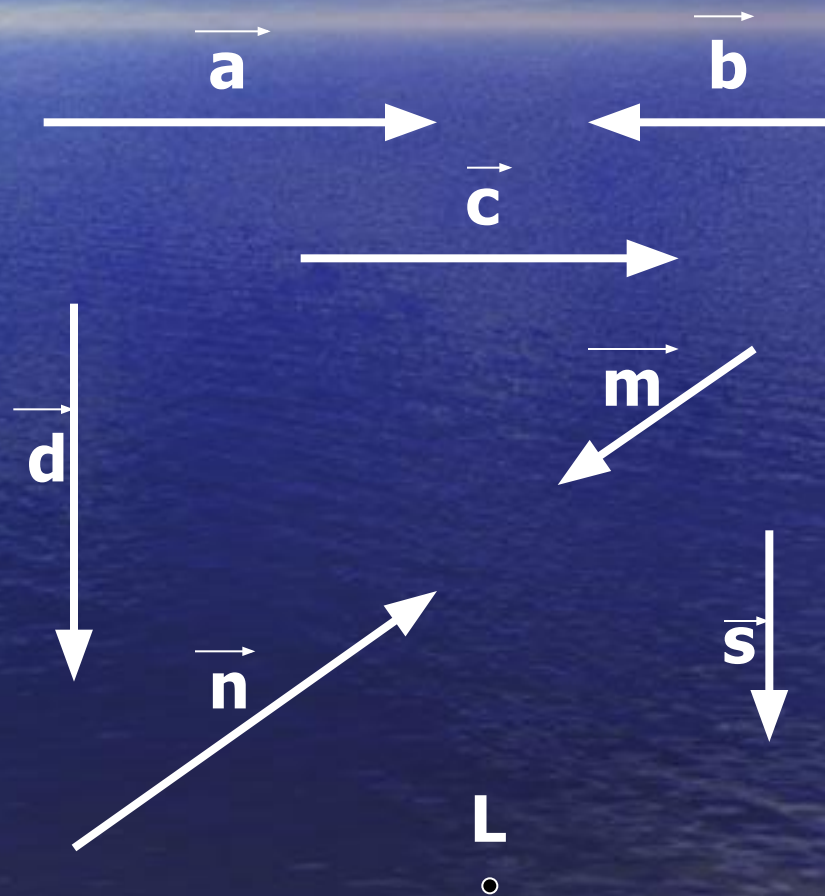
$$|\overrightarrow{MM}| = 0.$$

**M**



# Коллинеарные векторы

- Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть **сонаправленными** или **противоположно направленными**.
- Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

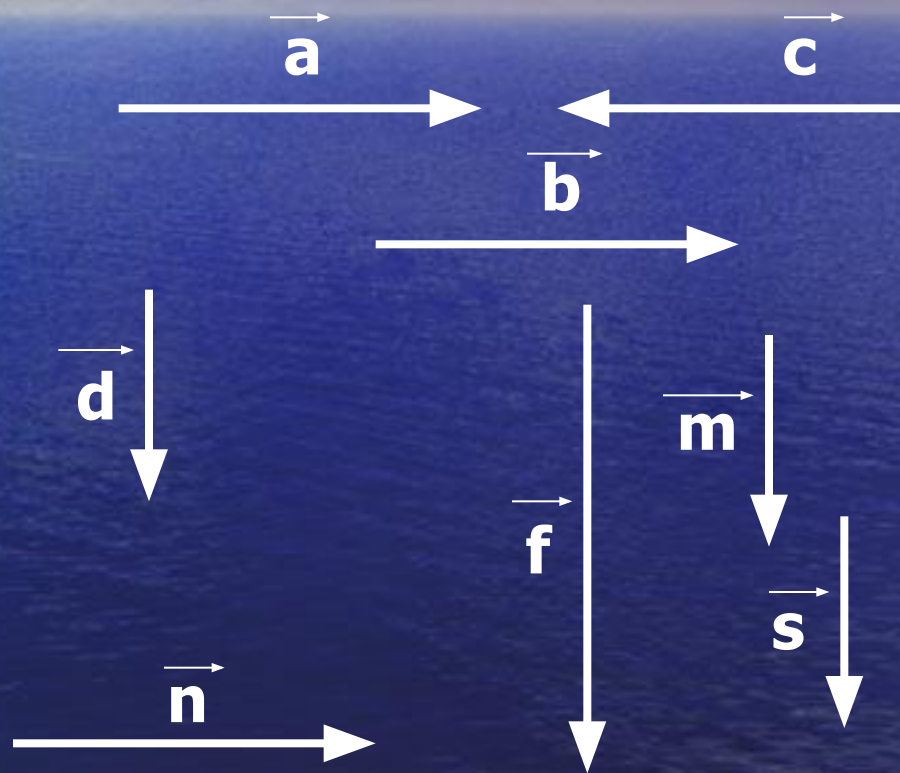


# Равенство векторов

- **Определение.**  
Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

$\vec{a} = \vec{b}$ , если

- 1)  $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- 2)  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



# Откладывание вектора от данной точки

- Если точка  $A$  – начало вектора  $\vec{a}$ , то говорят, что вектор  $\vec{a}$  отложен от точки  $A$ .



- **Утверждение:** От любой точки  $M$  можно отложить вектор, равный данному вектору  $\vec{a}$ , и притом только один.



*Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой*

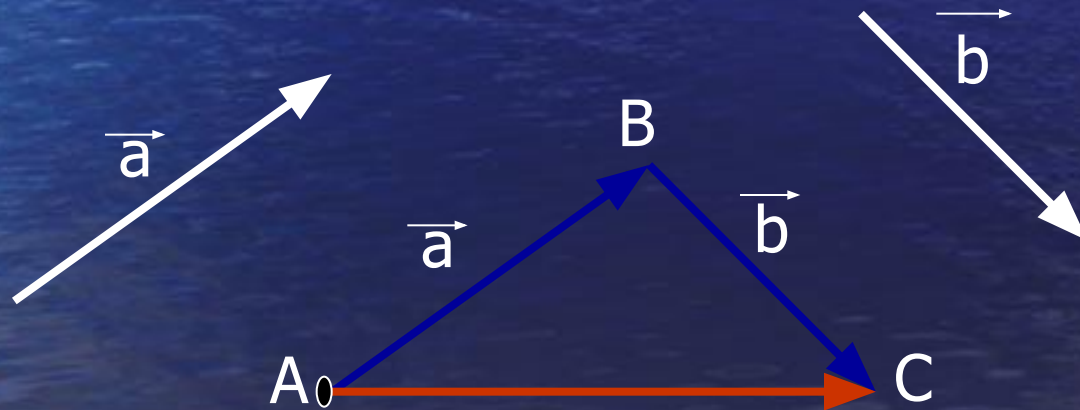


# Сумма двух векторов

## Правило треугольника

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два вектора. Отметим произвольную точку  $A$  и отложим от этой точки  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , затем от точки  $B$  отложим вектор  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



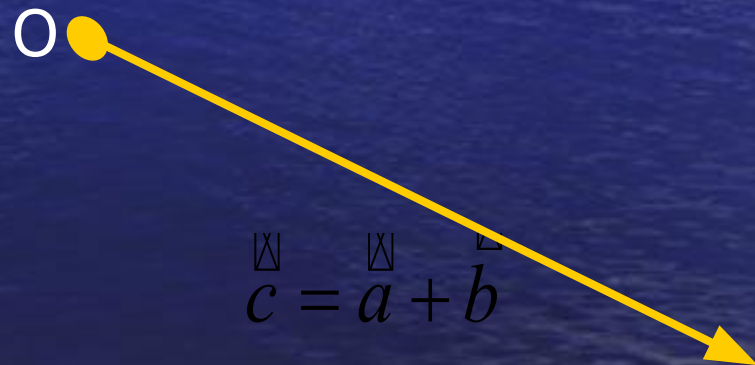
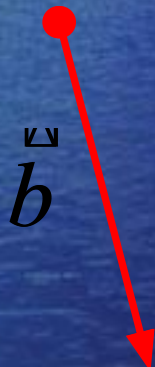
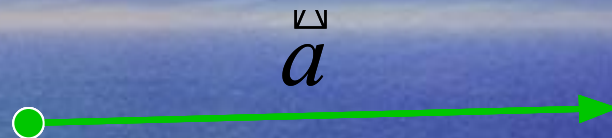
# Сложение векторов

Дано :

$\vec{a}$   $\vec{b}$   
 $a, b$  – векторы

Найти :

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



**Правило  
треугольника**

# Законы сложения векторов

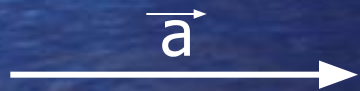
1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (переместительный закон)

## Правило параллелограмма

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два вектора. Отметим произвольную точку  $A$  и отложим от этой точки  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , затем вектор  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . На этих векторах построим параллелограмм  $ABCD$ .

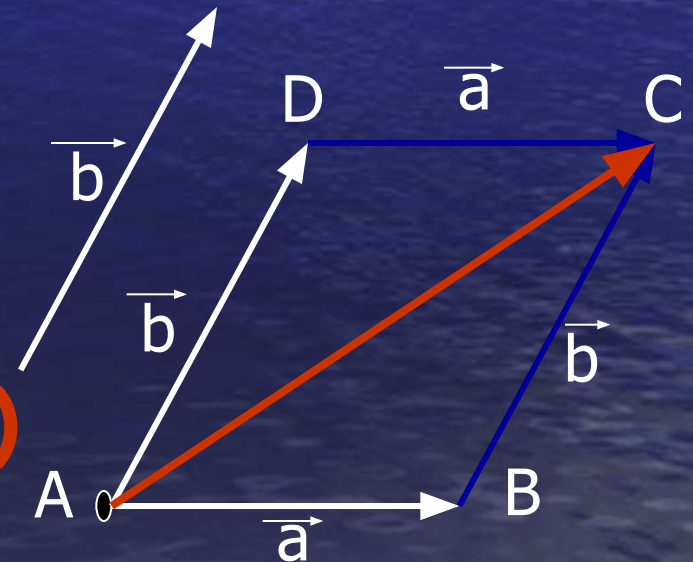
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$$



2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(сочетательный закон)



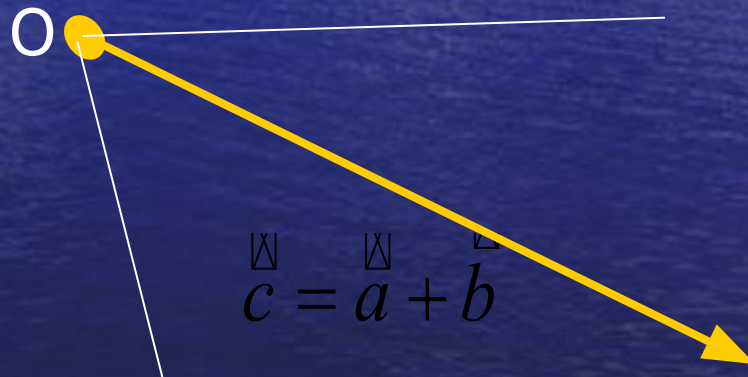
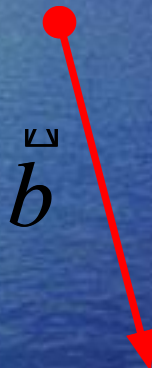
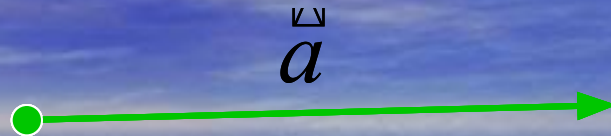
# Сложение векторов

Дано :

$\vec{a}$   $\vec{b}$   
 $a, b$  – векторы

Найти :

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

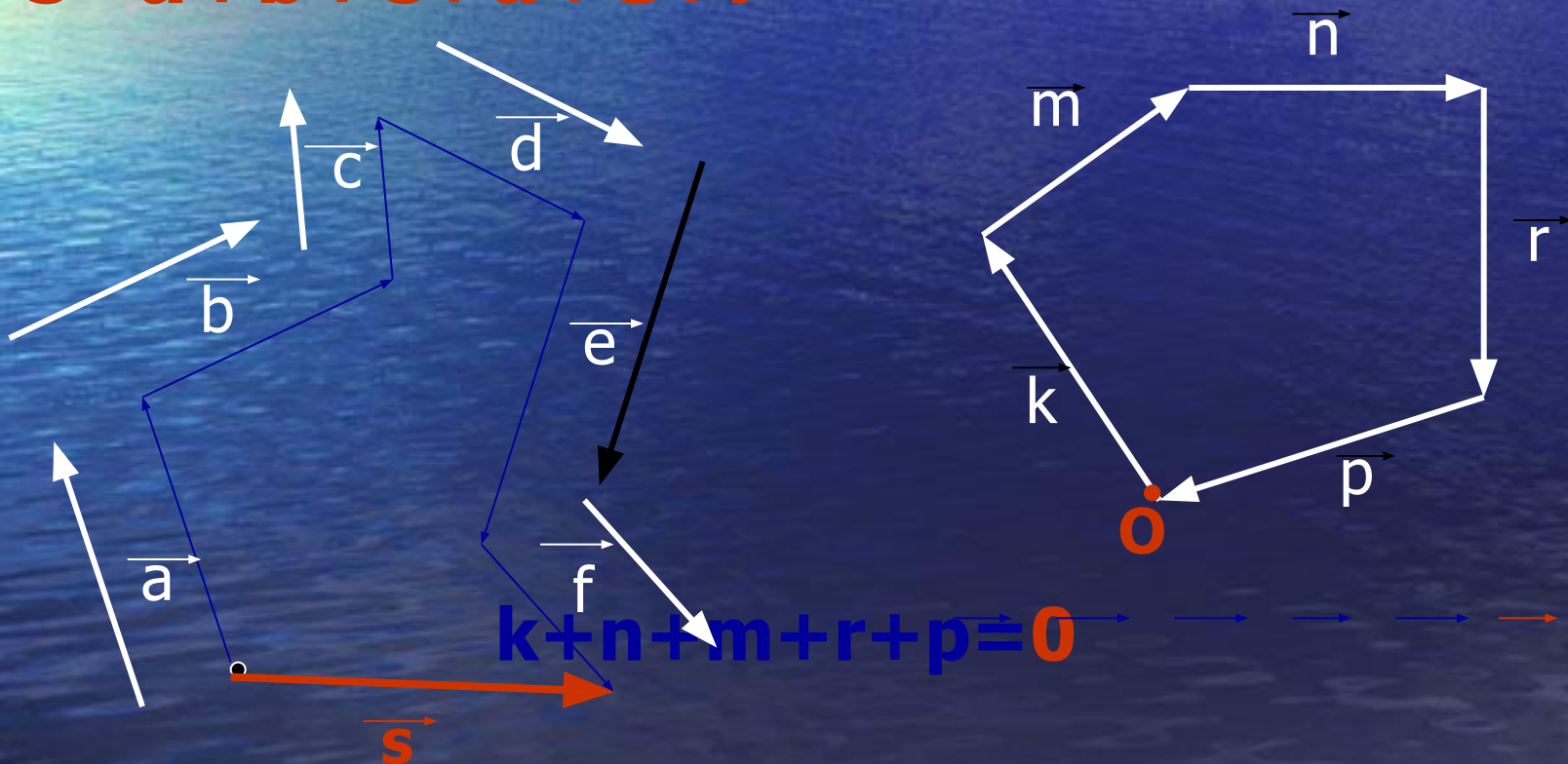


**Правило  
параллелограмма**

# Сумма нескольких векторов

## Правило многоугольника

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$$

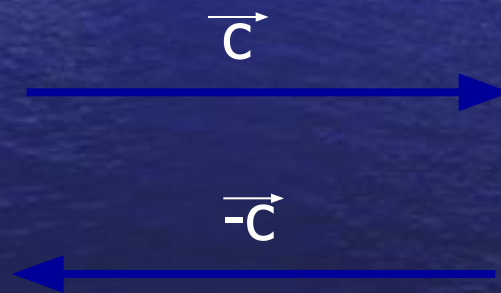
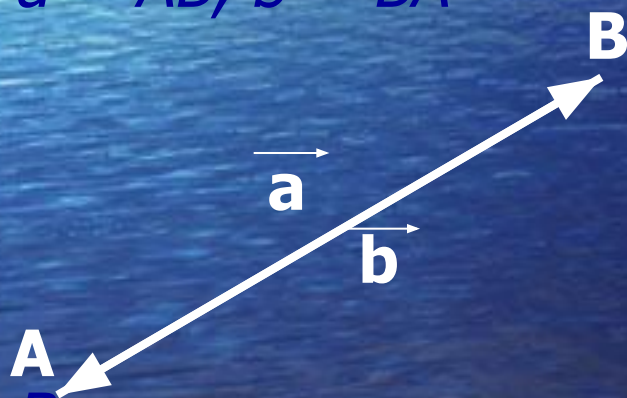


# Противоположные векторы

Пусть  $\vec{a}$  – произвольный ненулевой вектор.

**Определение.** Вектор  $\vec{b}$  называется противоположным вектору  $\vec{a}$ , если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют равные длины и противоположно направлены.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BA}$$



Вектор, противоположный вектору  $\vec{c}$ , обозначается так:  $-\vec{c}$ .

Очевидно,  $\vec{c} + (-\vec{c}) = \vec{0}$  или  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

# Вычитание векторов

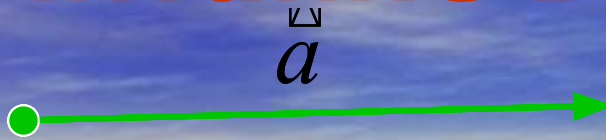
**Определение.** Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор, сумма которого с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ .

**Теорема.** Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  справедливо равенство  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

**Задача.** Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Построить вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ .

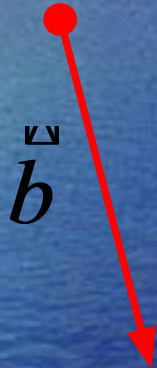


# Вычитание векторов

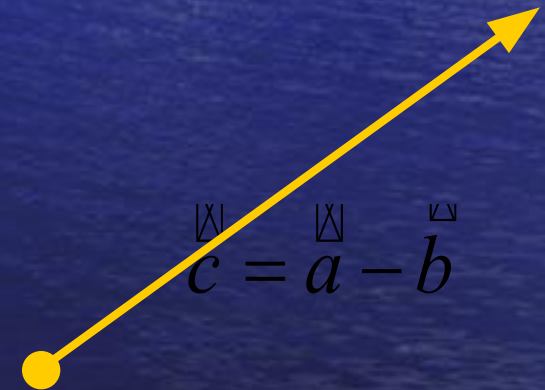


Дано :  
 $\vec{a}, \vec{b}$  – векторы

Найти :  
 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



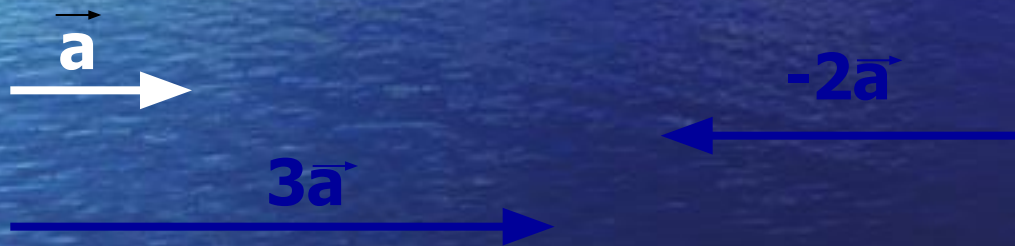
0 •





# Умножение вектора на число

**Определение.** Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна вектору  $|k| |\vec{a}|$ , причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ .



Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любого числа  $k$  и любого вектора  $a$  векторы  $a$  и  $ka$  коллинеарны.

# Законы умножения вектора на число

Для любых чисел  $k, n$  и любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  справедливы равенства:

- 1)  $(kn) \vec{a} = k (n\vec{a})$  (сочетательный закон)
- 2)  $(k+n) \vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$  (первый распределительный закон)
- 3)  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  (второй распределительный закон)

Свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}) = \underline{\quad} \\ &= 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c} \end{aligned}$$

# Задания для закрепления

Решить № 401, 402, 403

Спасибо за занятие

Хорошего Вам дня!!!!