Оглавление

Линейное программирование

Линейное программирование — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств.

Линейное программирование является частным случаем выпуклого программирования, которое в свою очередь является частным случаем математического программирования. Одновременно оно — основа нескольких методов решения задач целочисленного и нелинейного программирования.

Оглавление

Задачи линейного программирования можно решить **аналитическим путем** и **графическим методом**.

В геометрии есть такое понятие, как "симплекс". С учетом этого понятия аналитический метод решения задач линейного программирования называется **симплекс-методом**.

Оглавление

Симплекс-метод

Идея метода симплекс-таблиц заключается в целенаправленном переборе вершин симплекса. Для начало перебора необходимо выбрать опорную вершину с которой начнется перебор.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, (перебирая симплекс вершины) при котором значение целевой функции возрастает (убывает). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Для составления такого плана необходимо произвести векторный анализ, на основе которого определить опорную вершину, с которой начнется перебор.

Оглавление

Задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max\ (\min,\ const) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \\ d_j \le x_j \le D_j \\ i=1..m;\ j=1..n \end{cases}$$

Оглавление

Аналитический метод решения задач ЛП:

1. Найти вершины ОДР.
2. Определить значения целевой функции в вершинах.
3. Вершина, в которой ЦФ приобретает оптимальное (максимальное или минимальное) значение, является оптимальной вершиной.
4. Координаты этой вершины и являются искомыми оптимальными значениями переменных.

Оглавление

Основная теорема линейного программирования

Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего экстремума (минимума или максимума) в вершине допустимой области. Если целевая функция достигает экстремального значения более, чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин.

Оглавление

В том случае, когда требуется найти минимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

можно перейти к нахождению максимума функции

$$F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$$

поскольку $\min F = -\max(-F)$.

Оглавление

Графический метод решения

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной

Оглавление

Будет изготовлено:

x1 единиц изделий вида А

x2 единиц изделий вида В

Прибыль от их реализации составит:

$$F = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оглавление

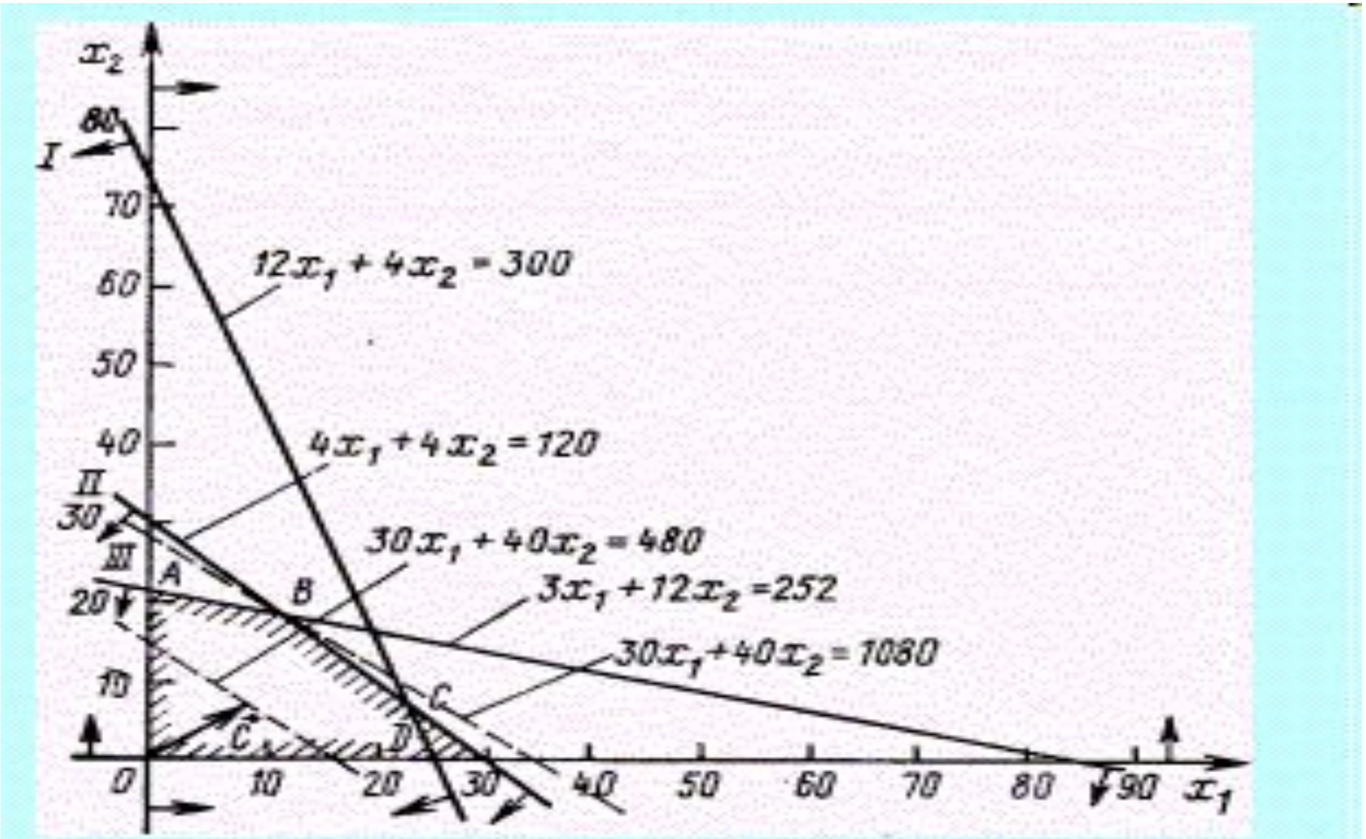


Рис. 5.

Оглавление

Координаты точки *B* и определяют план выпуска изделий А и В, при котором прибыль от их реализации является **максимальной.**

Найдем координаты точки В как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$x_1^* = 12,\ x_2^* = 18.$$

Оптимальный план

$x^* = (12, 18)$

$f(x^*) = 1080$

Оглавление

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часы) на обработку одного изделия каждого вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (часы)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Оглавление

Задача на максимум

Сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной?

Будет изготовлено:
x1 единиц изделий вида А
x2 единиц изделий вида В
x3 единиц изделий вида С
Прибыль от их реализации составит:

$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Оглавление

Решим задачу с помощью симплекс-метода

Шаг 0								
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7
x4	120	2	4	5	1	0	0	0
x5	280	1	8	6	0	1	0	0
x6	240	7	4	5	0	0	1	0
x7	360	4	6	7	0	0	0	1
ИС	0	-10	-14	-12	0	0	0	0

Шаг 1								
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7
x2	30	1/2	1	5/4	1/4	0	0	0
x5	40	-3	0	-4	-2	1	0	0
x6	120	5	0	0	-1	0	1	0
x7	180	1	0	-1/2	-3/2	0	0	1
ИС	420	-3	0	11/2	7/2	0	0	0

Оглавление

Шаг 2								
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7
x2	18	0	1	5/4	7/20	0	-1/10	0
x5	112	0	0	-4	-13/5	1	3/5	0
x1	24	1	0	0	-1/5	0	1/5	0
x7	156	0	0	-1/2	-13/10	0	-1/5	1
ИС	492	0	0	11/2	29/10	0	3/5	0

Получен оптимальный план
$x^* = (24, 18, 0)$
$f(x^*) = 492$

Оглавление

Геометрический метод решения задач линейного программирования

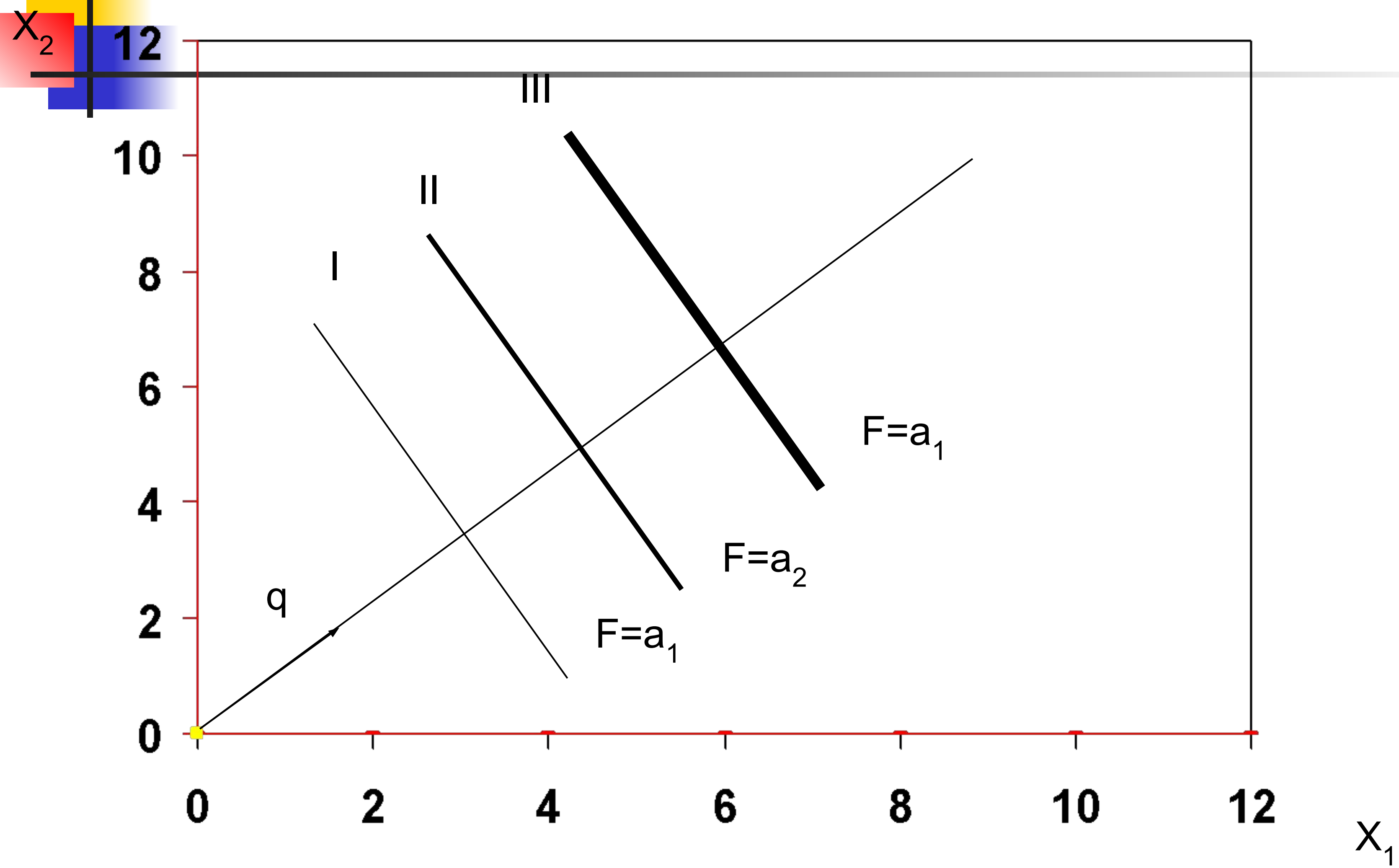
Оглавление

Основные понятия

Линия уровня – линия, вдоль которой целевая функция принимает одно и то же фиксированное значение (a).

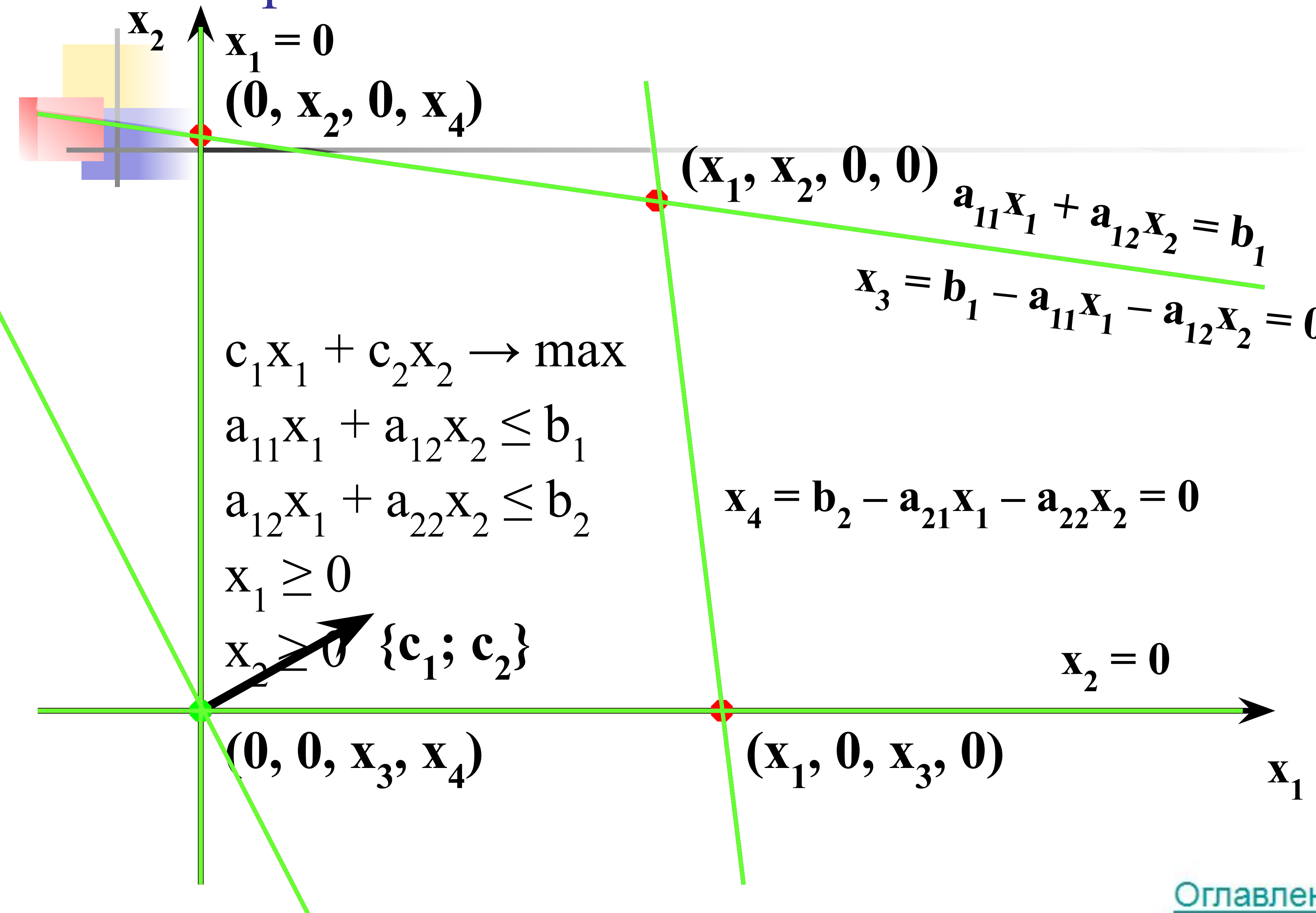
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 = a$$

Оглавление



Оглавление

Геометрический смысл



$$c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Оглавление

Условие задачи

Продукция	Цена (млн. руб. /шт.)	ГО-1 (час/ед.)	ГО-2 (час/ед.)	Гос. Заказ (ед./мес.)
1	4	100	50	
2	2	200	50	
Общие		1200 (час/мес.)	400 (час/мес.)	4

$4x_1 + 2x_2$ □ MAX

$100x_1 + 200x_2 \le 1200$

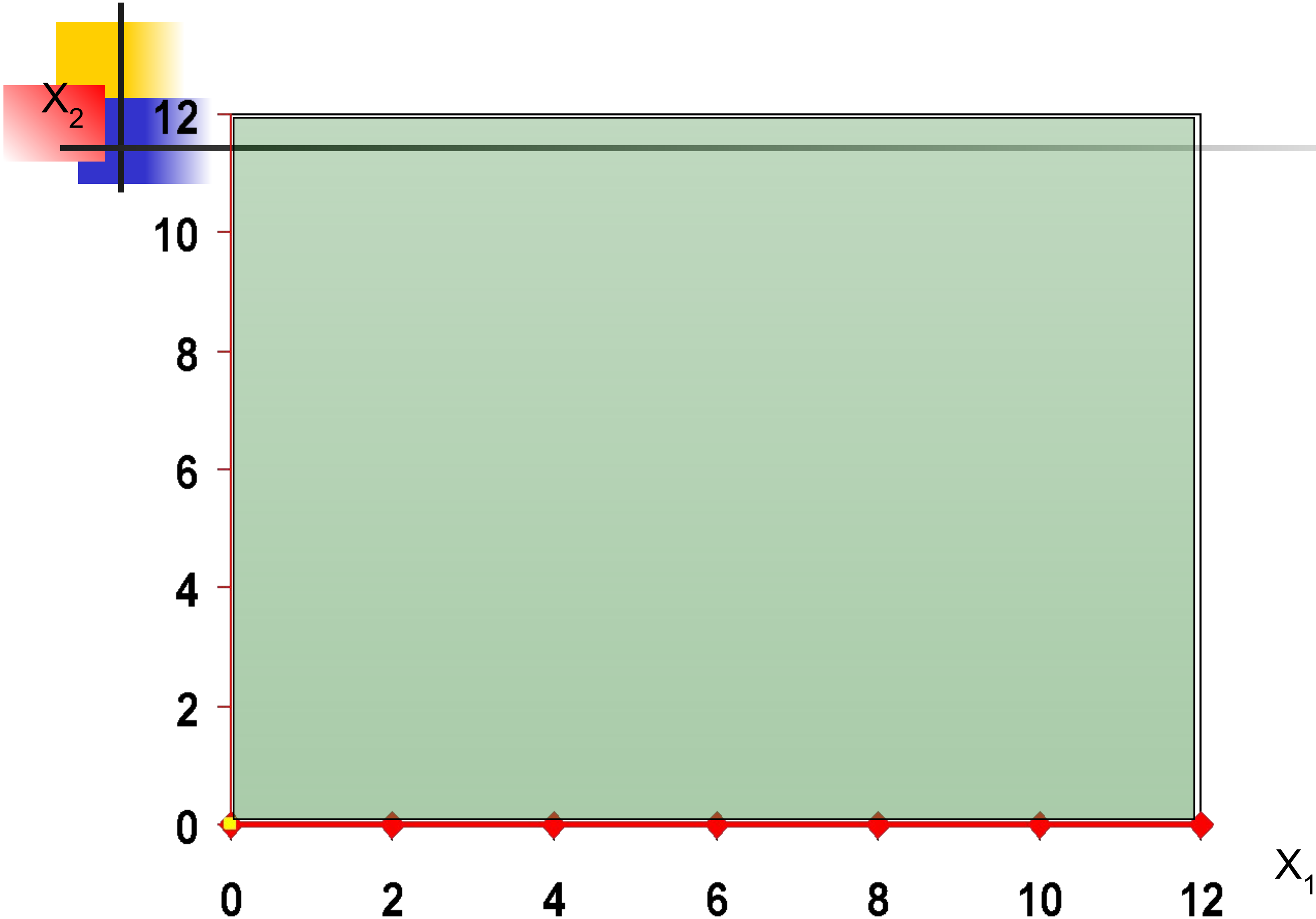
$50x_1 + 50x_2 \le 400$

$x_1 + x_2 \ge 4$

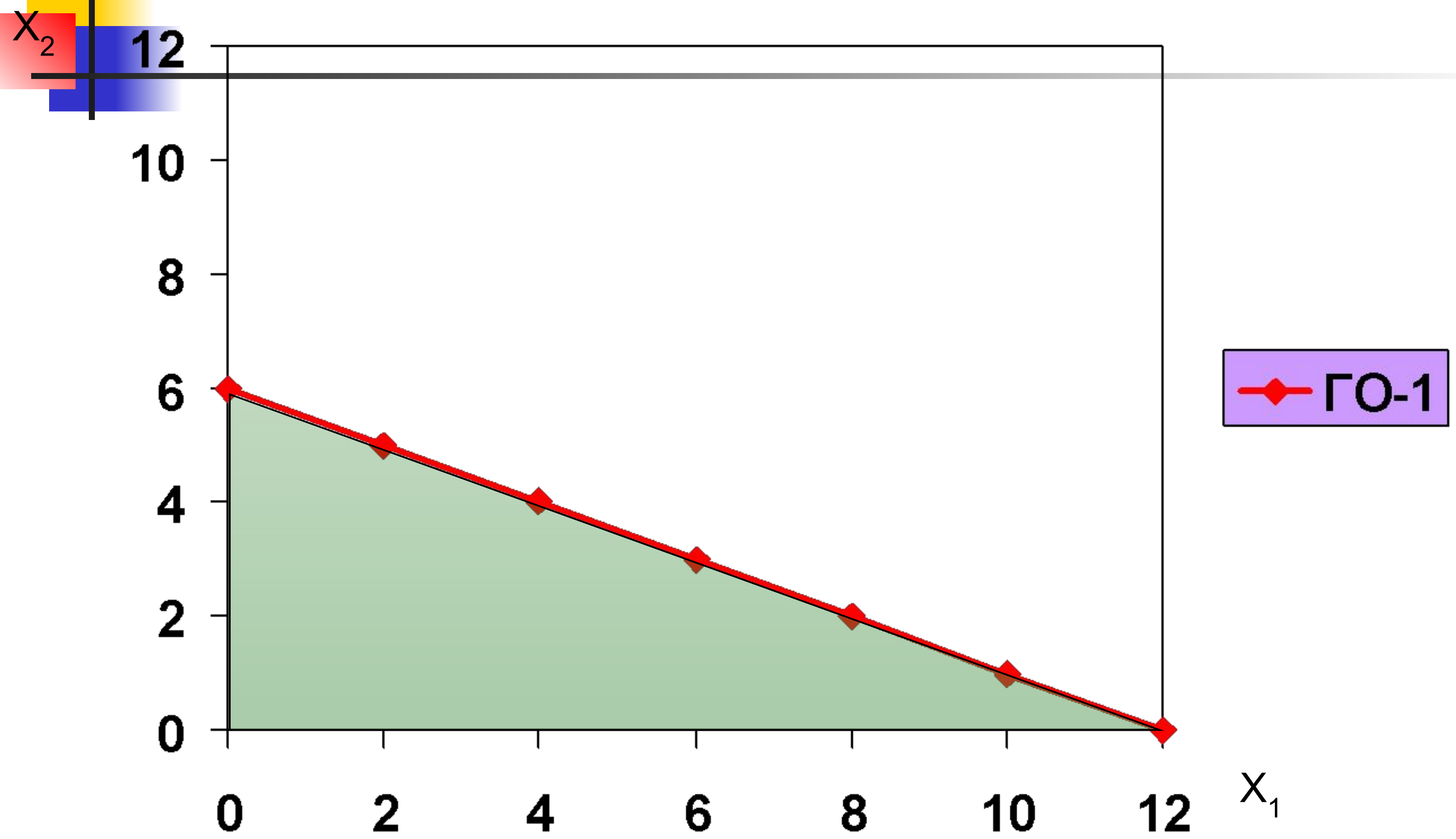
$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$

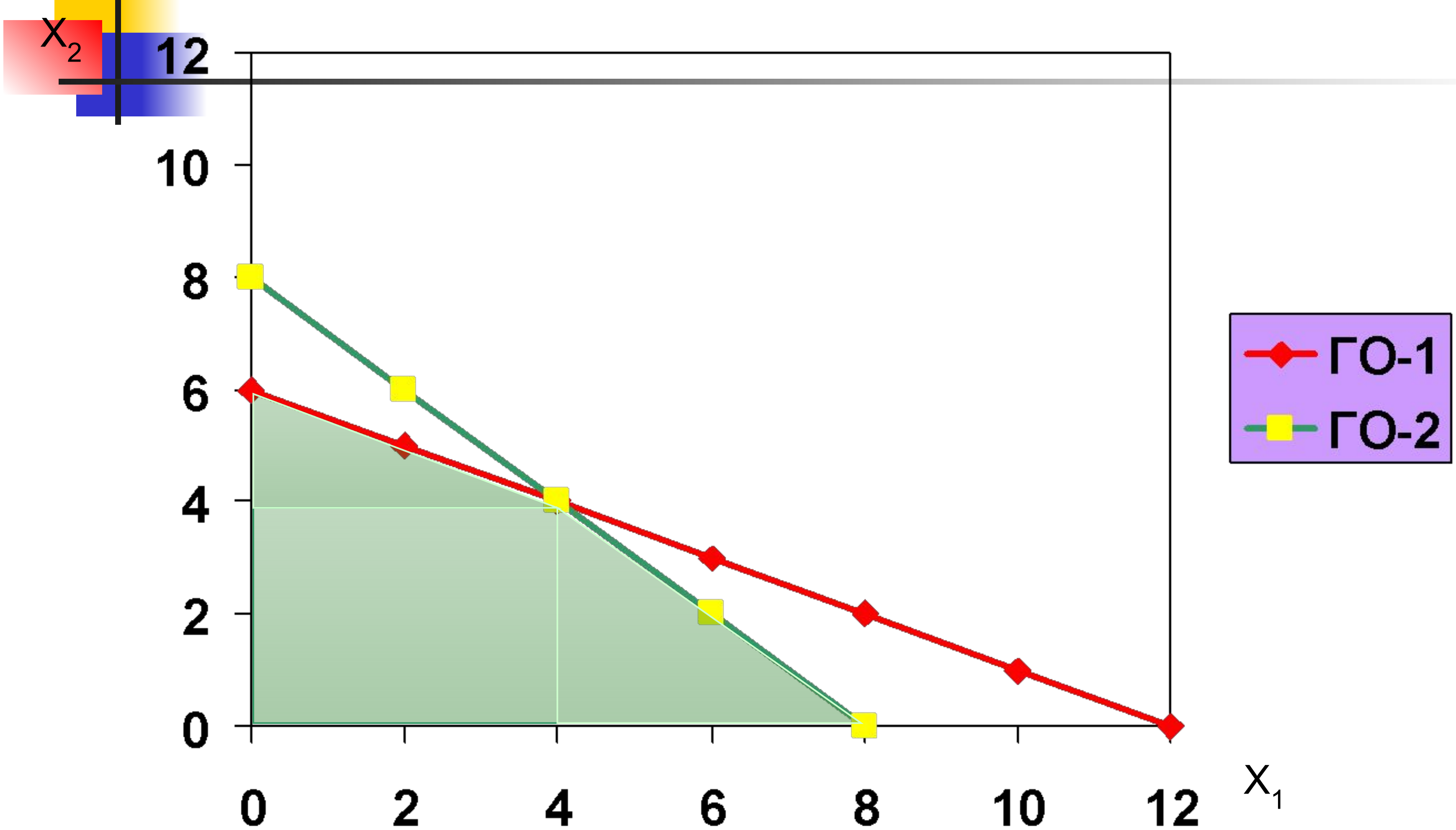
Оглавление



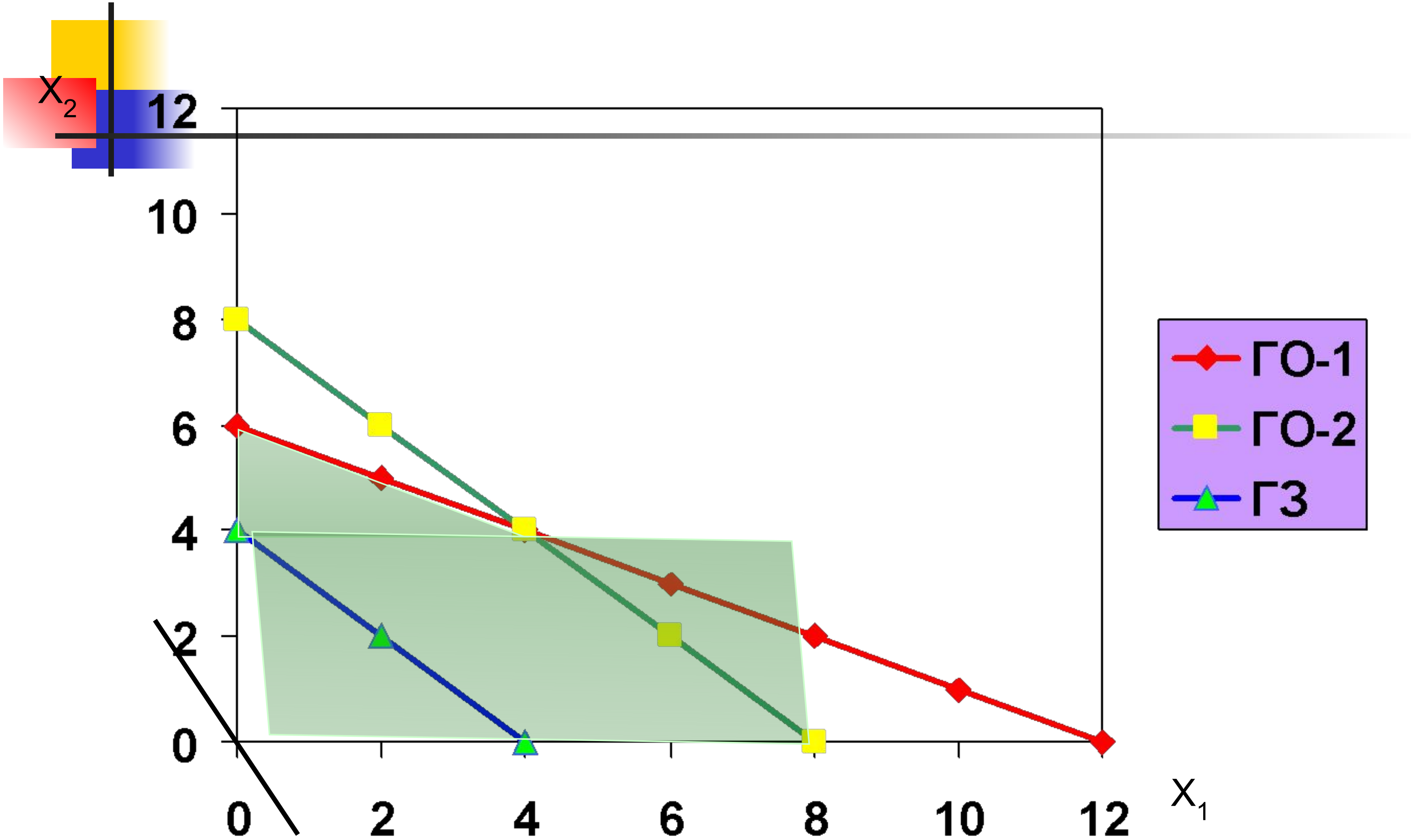
Оглавление



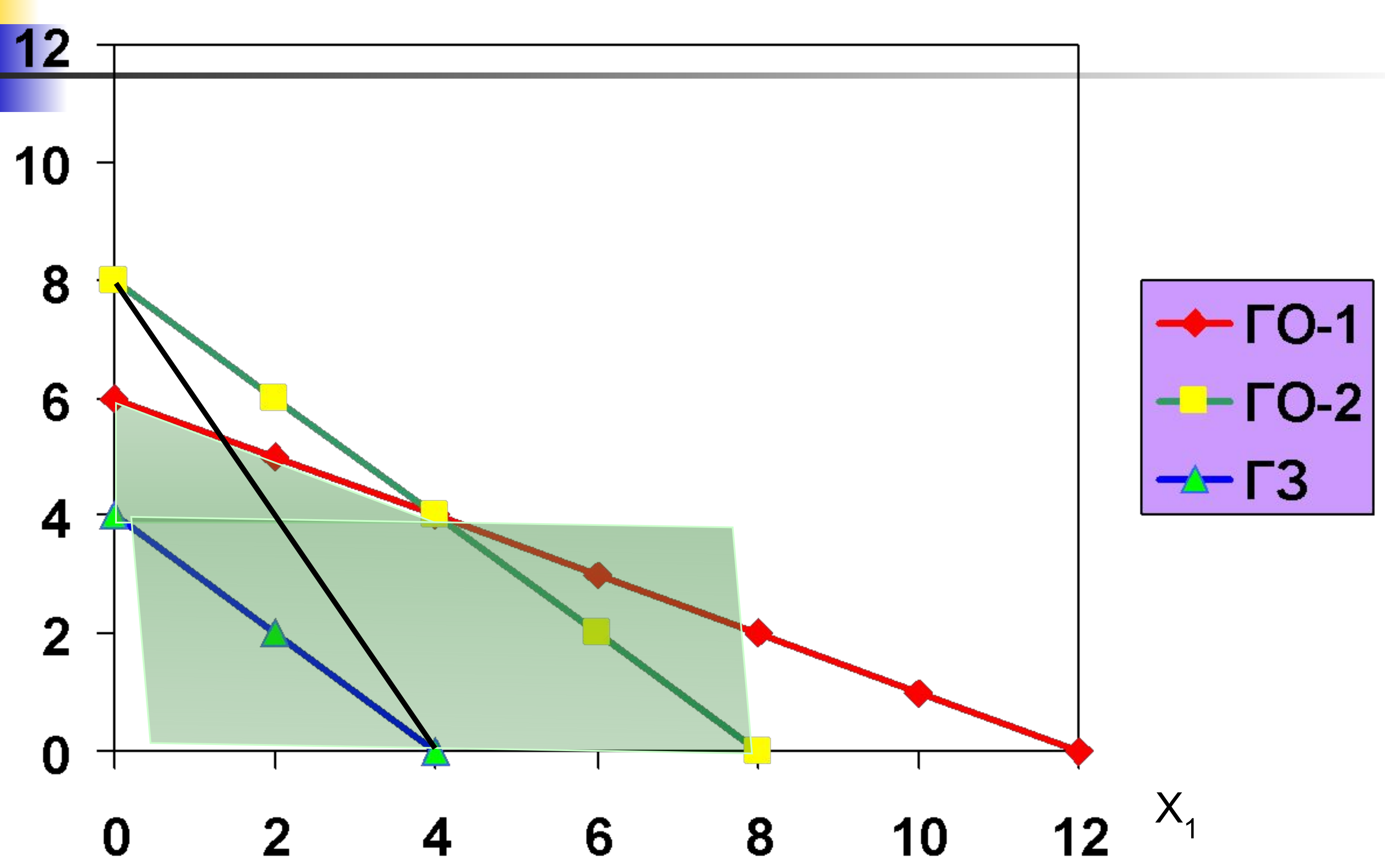
Оглавление



Оглавление



Оглавление



Оглавление

Ответ и проверка

$4x_1 + 2x_2$ □ MAX

$100x_1 + 200x_2 \leq 1200$

$50x_1 + 50x_2 \leq 400$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

4*8 + 2*0 □ MAX

$100*8 + 200*0 \leq 1200$

$50*8 + 50*0 \leq 400$

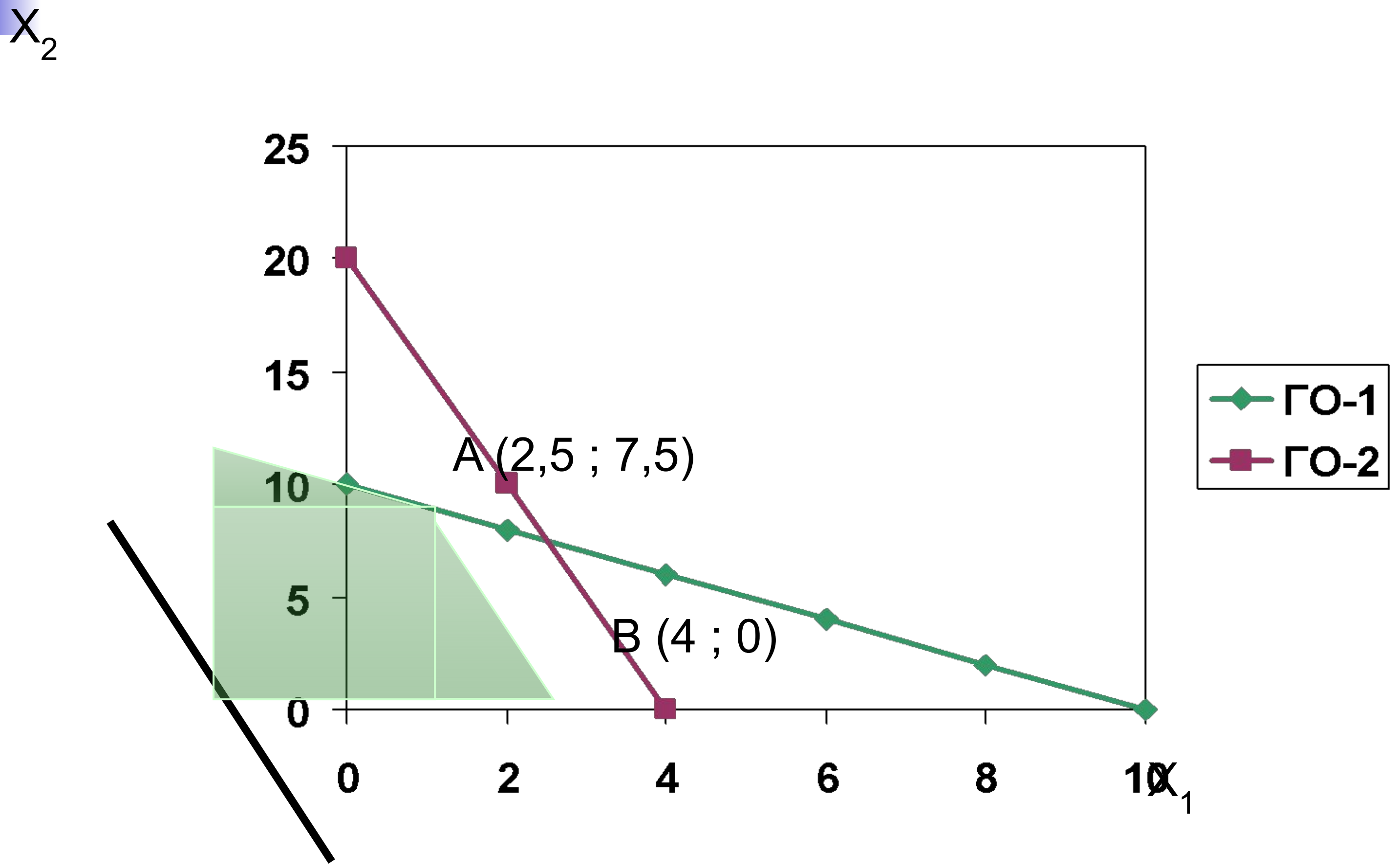
$8 + 0 \geq 4$

$8 \geq 0$

$0 \geq 0$

Оглавление

Задача с бесконечным множеством оптимальных решений



Оглавление

Координаты точек оптимальных решений

$\alpha(2,5\ ;\ 7,5) + (1 - \alpha)(4\ ;\ 0) =$

$=(2,5\alpha\ ;\ 7,5\alpha) + (4 - 4\alpha\ ;\ 0) =$

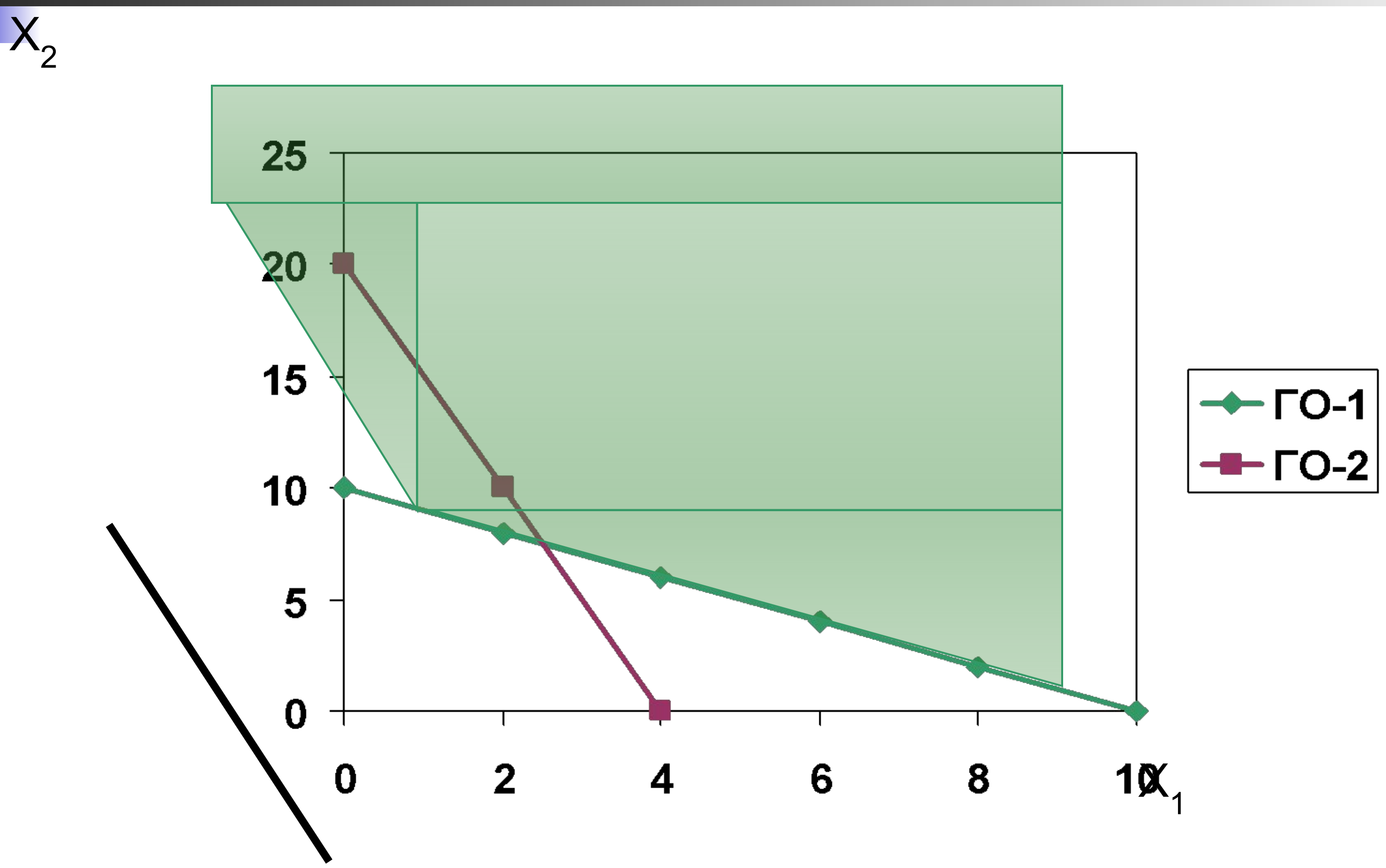
$=(4 - 1,5\alpha\ ;\ 7,5\alpha)$

$(4\ ;\ 0),\ (3\ ;\ 5),\ (2,5\ ;\ 7,5)$

$0 \le \alpha \le 1$

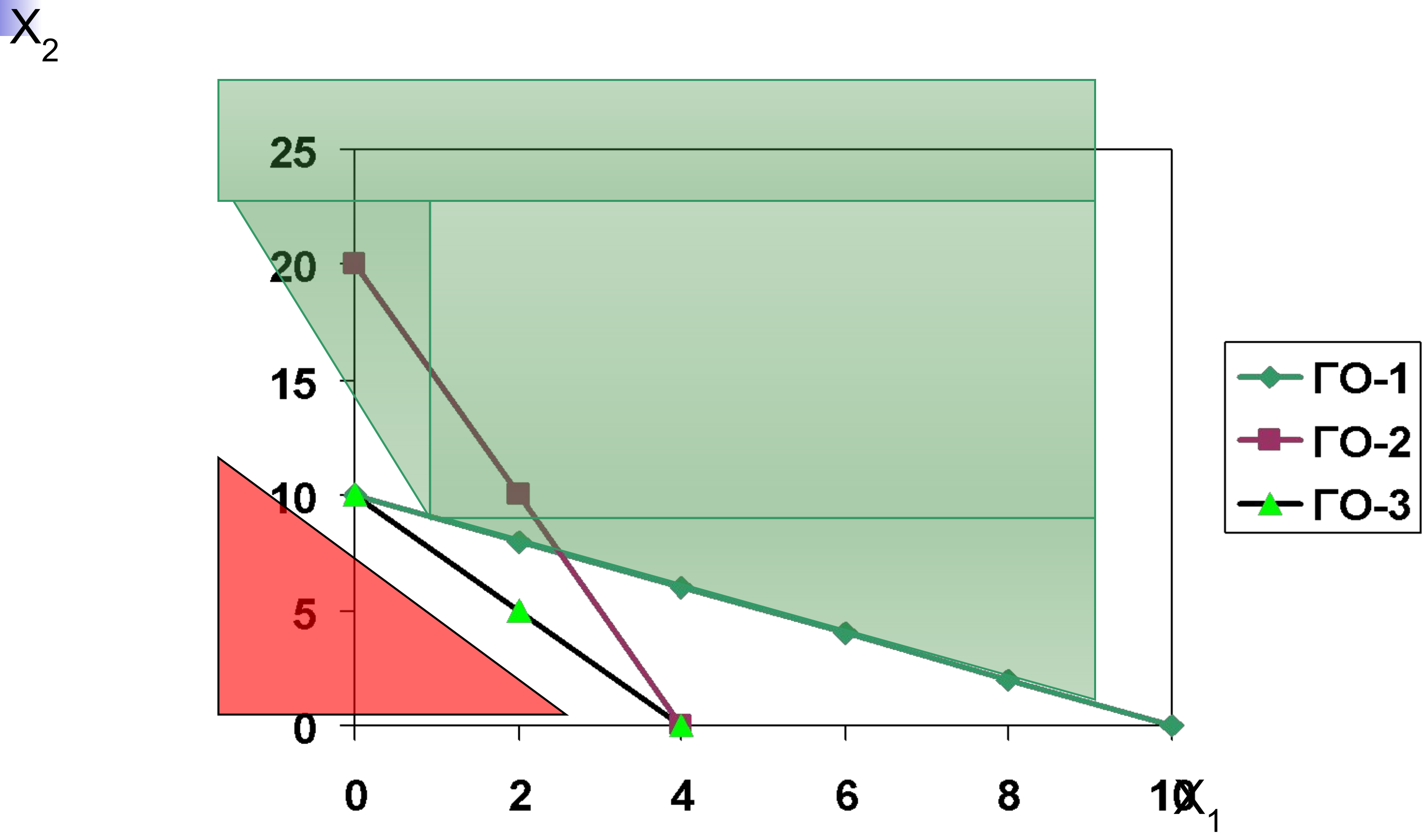
Оглавление

Задача не имеющая оптимального решения



Оглавление

Задача не имеющая оптимального решения



Оглавление

Усложнённые постановки транспортной задачи

Оглавление

Ограничения пропускной способности:

- В стандартной постановке транспортной задачи предполагается, что из любого пункта по любой дороге может быть перевезено любое количество груза. Однако в реальных условиях и задачах так бывает далеко не всегда.
- При использовании нескольких видов транспорта может оказаться, что количество транспортных средств определённого вида, используемого на данном направлении, ограничено и т.д.
- Наиболее простой, но самый эффективный способ учёта ограничений по пропускной способности заключается в следующем:

Оглавление

- Известно, что на участке дороги от поставщика А2 до потребителя В1 пропускная способность ограничена и здесь можно провезти не более 15 единиц данного груза.
- Каких-либо ограничений по другим участкам сети дорог нет.

Таблица 1	**Потребители и их спрос**		
Поставщики и их мощности	**В1** **35**	**В2** **25**	**В3** **90**
А1 55	6	5	4/ 55
А2 45	1 /35	2/ 10	4
А3 50	3	2/15	3/35

Оглавление

- Дополнительные ограничения, если они существенны, т.е. если их учёт влечёт за собой изменение плана, приводят к ухудшению функционала.
- Понятно, что подобное построение матрицы может быть сделано введением дополнительно строки, а не столбца (Таблица 3)

Таблица 3	**Потребители и их спрос**		
Поставщики и их мощности	**B1** **35**	**B2** **25**	**B3** **90**
A1 55	6	5	4/ 55
A2 15	1 /15	2/	4
A2* 30	100	2/25	4/5
A3 50	3/20	2	3/30

Оглавление

Столбец, соответствующий участку с ограниченной пропускной способностью, разбивается на два столбца.

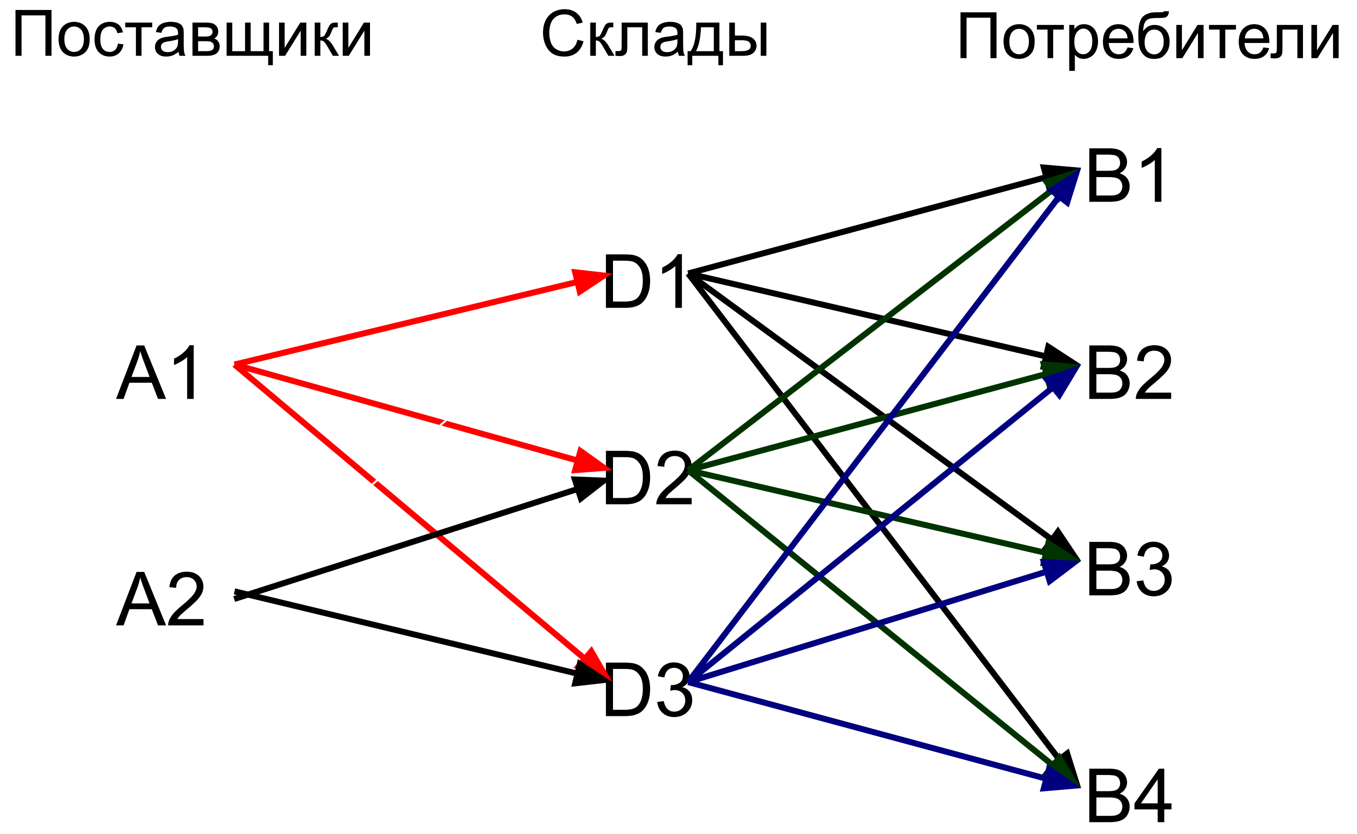
В первом из них спрос принимается равным разности между действительным спросом данного потребителя и размером ограничения пропускной способ-ности, во втором – равным ограничению.

Таблица 2	**Потребители и их спрос**				
Поставщики и их мощности	**B1** **20**	**B1*** **15**	**B2** **25**	**B3** **90**	
A1 55	6	6	5	4/ 55	
A2 45	100	1/15	2/25	4/5	
A3 50	3/20	3	2	3/30	

Показатели cij одинаковы в обоих столбцах, но в первом, в том месте, которое соответствует участку с ограни-ченной пропускной способностью, вместо истинного показателя cij ставится число, намного большее, чем все остальные элементы матрицы.

Оглавление

Многоэтапная задача



Оглавление

$$\sum d_k = \sum a_i = \sum b_j$$

Если суммарная ёмкость складов равна суммарной мощности и суммарному спросу потребителей ёмкость каждого склада будет использоваться полностью и схема перевозок груза со складов к потребителям не зависит от схемы перевозок груза от поставщиков на склады и со складов потребителям.

Оглавление

Способ Ордена-Маша

Таблица 1		Потребители и промежут. пункты, спросы						
Поставщики и промежут. пункты	Мощ-ности	D1	D2	D3	B1	B2	B3	B4
		550	550	550	200	300	150	350
A1	400	1	2	3	M	M	M	M
A2	600	6	4	3	M	M	M	M
D1	550	0	M	M	5	3	1	3
D2	550	M	0	M	1	2	3	4
D3	550	M	M	0	8	7	6	5

Оглавление

Таблица 2		Потребители и промежут. пункты, спросы							
Поставщики и промежут. пункты	Мощ-ности	D1	D2	D3	B1	B2	B3	B4	потенциалы
		550	550	550	200	300	150	350	
A1	400	1 400	2	3	M	M	M	M	1
A2	600	6 100	4 500	3	M	M	M	M	6
D1	550	0 50	M	M	5	3	1 150	3 350	0
D2	550	M	0 50	M	1 200	2 300	3	4	2
D3	550	M	M	0 550	8	7	6	5	3
Потенциалы		0	-2	-3	-1	0	1	3	

Оглавление

Таблица 3		Потребители и промежут. пункты, спросы							
Поставщики и промежут. пункты	Мощности	D1	D2	D3	B1	B2	B3	B4	потенциалы
		550	550	550	200	300	150	350	
A1	400	1 400	2	3	M	M	M	M	1
A2	600	6	4 550	3 50	M	M	M	M	5
D1	550	0 150	M	M	5	3	1 150	3 250	0
D2	550	M	0	M	1 200	2 300	3	4 50	1
D3	550	M	M	0 500	8	7	6	5 50	2
Потенциалы		0	-1	-2	0	1	1	3	

Оглавление

Двойственные задачи

Оглавление

Любая задача линейного программирования (даже не имеющая решений) имеет двойственную задачу.

- Прежде чем строить двойственную задачу в задаче на max все неравенства приводят к знаку $\leq$, а в задаче на min – к $\geq$.
- Т. о. в задаче на max знаки могут быть либо «$\leq$», либо «=».

Оглавление

Правило построения двойственной задачи:

- Если исходная задача на max, то двойственная на min и наоборот.
- В двойственной задаче столько переменных, сколько ограничений в исходной, прием эти переменные соответствуют ограничениям и наоборот.
- Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи.
- Матица коэффициентов ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов ограничений исходной задачи.
- Правыми частями ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции исходной.
- Ограничениям неравенствам исходной задачи соответствуют неотрицательные переменные двойственной задачи, а ограничениям равенствам – переменные любого знака и наоборот.

$$f(x) = 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 5$$
$$5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 7$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$
$$x_4 \ge 0$$

$$g(y) = 5y_1 + 7y_2 \to \min$$
$$y_1 \ge 0$$
$$y_2 \ge 0$$
$$y_1 + 5y_2 \ge 12$$
$$2y_1 + 4y_2 \ge 3$$
$$y_1 + y_2 \ge 5$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 1$$

- **$f(x) \le g(y)$** - основное неравенство двойственности
- **Теорема1:** Если исходная задача имеет оптимальный план x*, то двойственная задача также имеет оптимальный план y*, причем значения функций на этих планах равны: $f(x^*)=g(y^*)$
- **Теорема2:** Если исходная и двойственная задачи имеют планы, то они имеют и оптимальные планы, причем $f(x^*)=g(y^*)$

Оглавление

Признаки оптимальности для двойственных задач

- **Признак1:** Если исходная и двойственная задачи имеют планы X и Y, причем f(X)=g(Y), то эти планы оптимальные.
- **Определение:** Ограничения расположенные на одной строке в схеме пары двойственных задач называют сопряженными.
- **Признак2:** Для того, чтобы планы X и Y исходной и двойственной задач были оптимальны, необходимо и достаточно чтобы на этих планах хотя бы одно из каждой пары сопряженных ограничений являлось равенством.
- **Второй признак** позволяет зная оптимальный план одной из задач найти оптимальный план другой задачи.

Оглавление

Решим исходную задачу симплекс методом:

$$f(x) = 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 5$$
$$5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 7$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$
$$x_4 \ge 0$$

$$g(y) = 5y_1 + 7y_2 \to \min$$

$$y_1 \ge 0$$
$$y_2 \ge 0$$
$$y_1 + 5y_2 \ge 3$$
$$2y_1 + 4y_2 \ge 12$$
$$y_1 + y_2 \ge 5$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 1$$

Ц	Б	П	x1	x2	x3	x4	x5	x6
			3	12	5	1	0	0
0	x5	5	1	2	**1**	1	1	0
0	x6	-7	5	4	1	2	0	1
		0	-3	-12	-5	-1	0	0

Ц	Б	П	x1	x2	x3	x4	x5	x6
			3	12	5	1	0	0
5	x3	5	1	2	1	1	1	0
0	x6	2	4	**2**	0	1	-1	1
		25	2	-2	0	4	5	0

Ц	Б	П	x1	x2	x3	x4	**x5**	**x6**
			3	12	5	1	0	0
5	x3	3	-3	0	1	0	2	0
12	x2	1	2	1	0	1/2	-1/2	1/2
		27	6	0	0	5	**4**	**1**

X*=(0,1,3,0)

Оптимальные значения переменных двойственной задачи можно найти в последней симплекс таблице в индексной строке под соответствующими добавленными переменными.

Y*=(4,1)

Закрытая транспортная задача. Метод потенциалов

Определение

Закрытая транспортная задача – задача о перевозке однородной продукции, когда имеется m поставщиков, для которых известны запасы, и n потребителей, для которых известны потребности, а также известны стоимости перевозки одной единицы продукции от каждого поставщика к каждому потребителю, причем суммарные запасы поставщиков равны суммарным потребностям потреби

Оглавление

Постановка задачи

Требуется составить план перевозок – указать, какое кол-во продукции нужно перевезти от каждого поставщика каждому потребителю, чтобы:

- Суммарная стоимость перевозок была минимальна
- Все поставщики были разгружены
- Все потребители были удовлетворены

Оглавление

Обозначения

- b_i – множество поставщиков
- a_j – множество потребителей
- c_{ij} – цены перевозок единицы товара от i-го поставщика к j-му потребителю
- x_{ij} – планируемый объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю

Оглавление

Целевая функция

$$f(X)=\sum\sum c_{ij}x_{ij}\rightarrow min$$

Оглавление

Представление задачи в виде таблицы

	b_1	b_2	b_3
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}

Оглавление

Двойственная задача

$f(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}\to\min$	$g(U,V)=a_1u_1+a_2u_2+b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3\to\max$
$x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1$	$u_1 \in R$
$x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2$	$u_2 \in R$
$x_{11}+x_{21}=b_1$	$v_1 \in R$
$x_{12}+x_{22}=b_2$	$v_2 \in R$
$x_{13}+x_{23}=b_3$	$v_3 \in R$
$x_{11}\geq 0$	$u_1+v_1\leq c_{11}$
$x_{12}\geq 0$	$u_1+v_2\leq c_{12}$
$x_{13}\geq 0$	$u_1+v_3\leq c_{13}$
$x_{21}\geq 0$	$u_2+v_1\leq c_{21}$
$x_{22}\geq 0$	$u_2+v_2\leq c_{22}$
$x_{23}\geq 0$	$u_2+v_3\leq c_{23}$

Оглавление

Метод потенциалов

	b_1	b_2	b_3	
a_1	c_{11} - x_{11}	c_{12} + x_{12}	c_{13} $<$	u_1
a_2	c_{21} + $>$	c_{22} - x_{22}	c_{23} x_{23}	u_2
	v_1	v_2	v_3	

Оглавление

Практический пример

Σ=60	12	15	17	16
10	14	13	12	15
20	16	17	18	22
30	14	15	16	11

Оглавление

Практический пример

Σ=60	12	15	17	16
10	14	13 10	12	15
20	16	17 3	18 17	22
30	14 12	15 2	16	11 16

Оглавление

Практический пример

Σ=60	12	15	17	16	
10	14	13 10	12	15	-2
20	16	17 3	18 17	22	2
30	14 12	15 2	16	11 16	0
	14	15	16	11	

Оглавление

Практический пример

Σ=60	12	15	17	16	
10	14 <	13 - 10	12 + >	15 <	-2
20	16 =	17 + 3	18 - 17	22 <	2
30	14 12	15 2	16 =	11 16	0
	14	15	16	11	

Оглавление

Практический пример

Σ=60	12	15	17	16	
10	14 <	13 =	12 10	15 <	-2
20	16 =	17 13	18 7	22 <	2
30	14 12	15 2	16 =	11 16	0
	14	15	16	11	

Оглавление

Практический пример

X*=	0	0	10	0
	0	13	7	0
	12	2	0	16

f(X*)= 120+221+126+168+30+176=841

Оглавление