НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

3-4 лекция

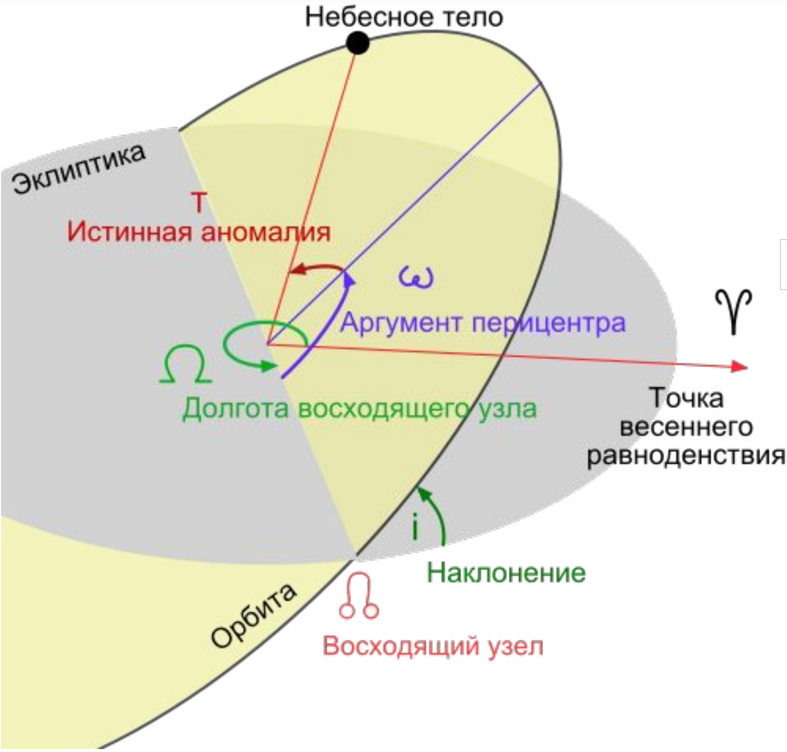
Уравнение орбиты и закон движения в задаче двух тел

$\boldsymbol{m, M}$

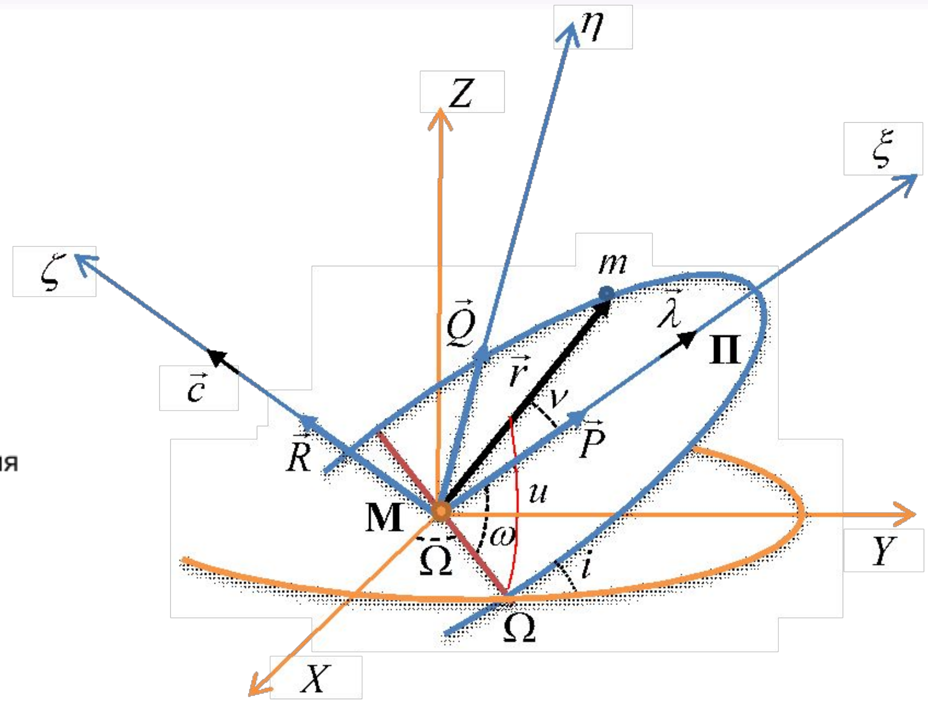
$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0\,,$$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0\,,$$

Прямоугольная система координат – ξ, η
Полярная система координат – r, ν
ν - истинная аномалия
ξ, η, ζ - орбитальная система координат



Небесное тело
Эклиптика
Т
Истинная аномалия
ω
Аргумент перицентра
♈
Ω
Долгота восходящего узла
Точка
весеннего
равноденствия
i
Наклонение
Орбита
☊
Восходящий узел



η
Z
ξ
ζ
m
$\vec{Q}$
$\vec{\lambda}$
П
$\vec{c}$
$\vec{r}$
ν
$\vec{P}$
$\vec{R}$
u
M
ω
Ω
i
Y
Ω
X

$$r\lambda \cos v = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r}^{\,2}}{r} = c^2 - \mu r .$$

$$r = \frac{\dfrac{c^2}{\mu}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\cos v}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \; p = \frac{c^2}{\mu}, \; e = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (2.13)$$

p - фокальный параметр кривой

$e = 0$ **- круг,**
$e \prec 1$ - эллипс,
$e = 1$ - парабола,
$e \succ 1$ - гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.14)$$

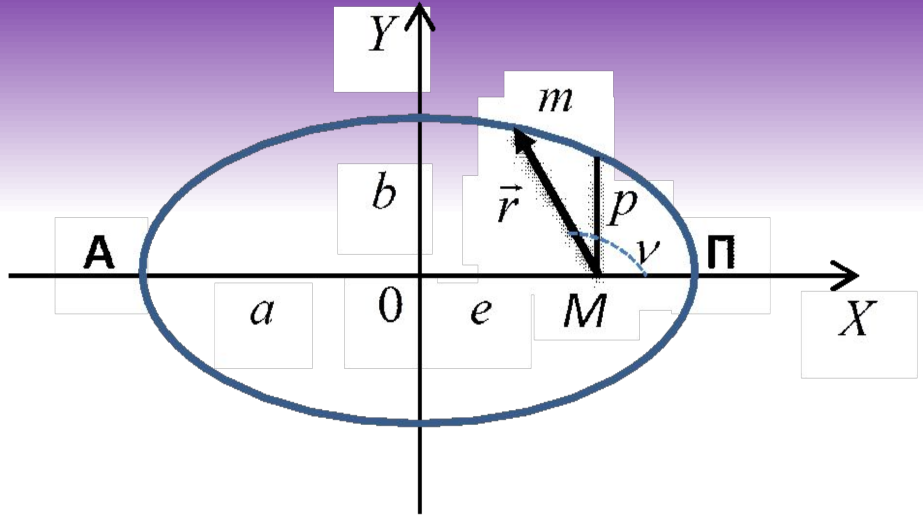
- эллипс,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.15)$$

- гипербола,

$$y^2 = 2px \qquad (2.16)$$

- парабола



$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}, \qquad (2.17)$$

с – фокусное расстояние, «-» элиппс, «+» гипербола

для эллипса

$$p = a\left(1 - e^2\right). \qquad (2.18)$$

для гиперболы

$$p = a\left(e^2 - 1\right). \qquad (2.19)$$

Перицентр, апоцентр - **апсиды**

$$
\begin{aligned}
& rV\sin\left(\vec{V},\vec{r}\right)=c\ ,\\
& V\sin\left(\vec{V},\vec{r}\right)=r\omega, \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

$\omega=\dot{v}$ - угловая скорость

$$
r^2\dot{v}=c\ . \qquad (2.21)
$$

$\vec{\rho}\equiv\left(\xi,\eta,\zeta\right)$

$$
\begin{aligned}
\xi &= r\cos v,\\
\eta &= r\sin v, \qquad (2.23)\\
\zeta &= 0.
\end{aligned}
$$

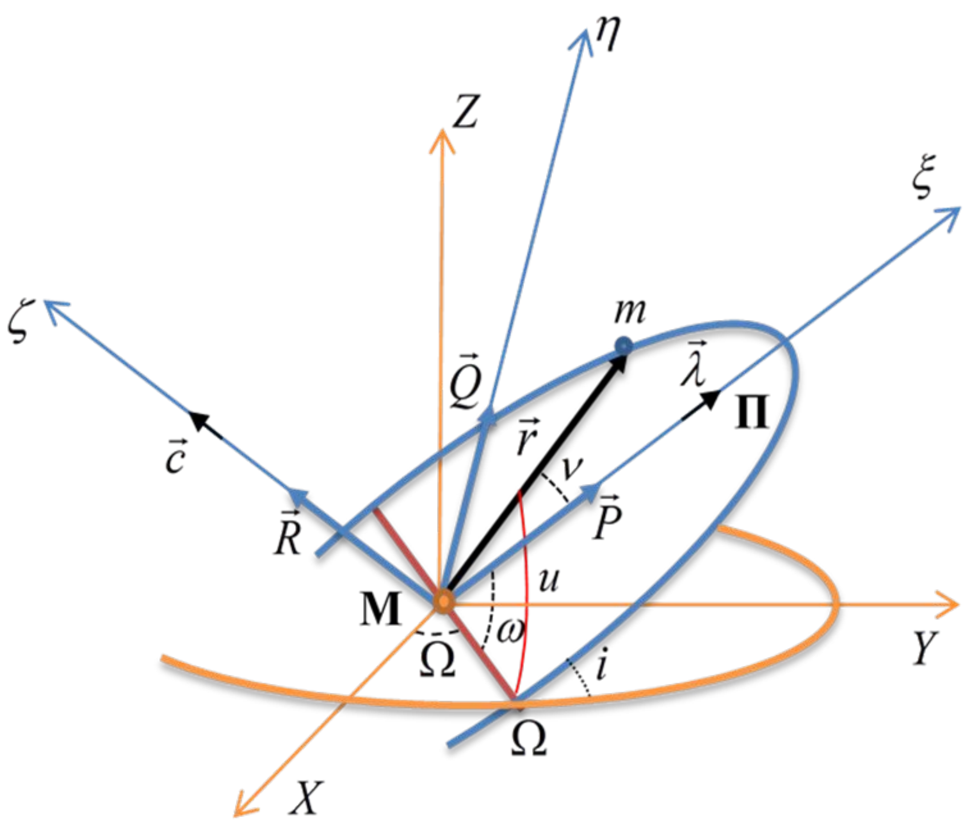
$$
\vec{r}=\begin{pmatrix}\vec{P}\\ \vec{Q}\\ \vec{R}\end{pmatrix}\cdot\vec{\rho}, \qquad (2.24)
$$

$$
\vec{P}=\frac{\vec{\lambda}}{\lambda},\quad \vec{Q}=\frac{\vec{c}\times\vec{\lambda}}{c\lambda},\quad \vec{R}=\frac{\vec{c}}{c}. \qquad (2.25)
$$

$\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R},\ e,\ p,\ \tau$ - элементы орбиты

1. Векторные элементы – $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$,
2. Элементы определяющие параметры орбиты – $e,\ p$
3. Динамический элемент – τ

Углы Эйлера
Кеплероские элементы орбиты $\Omega, \omega, i, e,\ p,\ \tau$



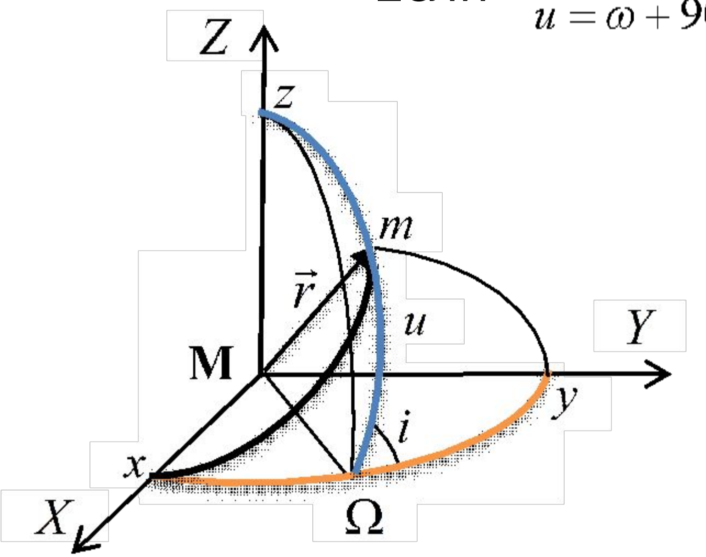
$$\frac{\vec{r}}{r} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

$$x\Omega = \Omega, \;\; \Omega m = \omega + v = u, \;\; x\Omega m = 180 - i. \qquad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos(xm) = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i, \\
\beta &= \cos(ym) = \sin\Omega\cos u - \cos\Omega\sin u\cos i, \qquad (2.30) \\
\gamma &= \cos(zm) = \sin u\sin i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= r\alpha = r\cos(xm) = r(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i), \\
y &= r\beta = r\cos(ym) = r(\sin\Omega\cos u - \cos\Omega\sin u\cos i), \qquad (2.31) \\
z &= r\gamma = r\cos(zm) = r\sin u\sin i.
\end{aligned}$$

Если $\begin{matrix} u = \omega \\ u = \omega + 90^0 \end{matrix}$, тогда векторы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$



будут равны $\vec{r}/r$

$$\begin{aligned}
P_x &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i, \\
P_y &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i, \qquad (2.32) \\
P_z &= \sin\omega\sin i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i, \\
Q_y &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i, \qquad (2.33) \\
Q_z &= \cos\omega\sin i.
\end{aligned}$$

$$R_x = \sin\Omega \sin i,$$
$$R_y = -\cos\Omega \sin i, \quad (2.34)$$
$$R_z = \cos i.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \xi + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \eta. \quad (2.35)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu,$$
$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e\cos\nu), \quad (2.36)$$
$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2}.$$