Функции

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Определение

Функция из множества A в множество B представляет собой специальное отношение $A \times B$, обладающее следующими свойствами:

1. Областью определения отношения является все множество A. Для каждого элемента a из A существует элемент b из B такой, что a и b связаны данным отношением.
2. Если а относится к b и a относится к $b`$, то $b = b`$. В терминах упорядоченных пар это утверждение означает, что если (a, b) и $(a, b`)$ принадлежат отношению, то $b = b`$.

Определение

Отношение f на $A \times B$ называется функцией из A в B и обозначается

$$f: A \to B,$$

если для каждого $a \in A$ существует единственный элемент $b \in B$ такой, что $(a, b) \in f$.

Если $f : A \to B$ - функция, и $(a, b) \in f$, то $b = f(a)$.

Множество A называется ***областью определения*** функции f, а множество B называется ***областью потенциальных значений***.

Если $E \subseteq A$, то множество $f(E) = \{b: f(a) = b$ для некоторого a из $E\}$ называется образом множества E. Образ всего множества A называется областью значений функции f.

Если $F \subseteq B$, то множество $f^{-1}(F) = \{a: f(a) \in F\}$ называется прообразом множества F.

Функция $f : A \to B$ называется отображением, при этом f отображает A в B.

Если $f : A \to B$, так что $b = f(a)$, то элемент a отображается в элемент b.

Пример

Пусть A = {-2, -1, 0, 1, 2}, а B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Отношение $f \subseteq A \times B$ определяется как f = {(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)}. Отношение f – функция A из B, так как $f \subseteq A \times B$ и каждый из элементов A присутствует в качестве первой компоненты упорядоченный пары из f ровно один раз.

Пример

Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Функция $f : A \rightarrow B$ определена соотношением $f(x) = x^2 + 1$.

Если $E = \{1, 2\}$, то

$$f(E) = \{b : (a, b) \in f \text{ для некоторого } a \text{ из } E\} =$$

$$= \{b : b = f(a) \text{ для некоторого } a \text{ из } E\} = \{2, 5\}$$

является образом E при отображении f. Если $F = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, то

$$f^{-1}(F) = \{b : \text{существует } a \in A \text{ такое, что } f(a) = b\} = \{-1, 1, -2, 2\}$$

Является прообразом F, где $-1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-1) = 2$,

$1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(1) = 2$,

$-2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-2) = 5$

и $2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(2) = 5$.

Элементы 0, 3 и 4 не вносят никаких элементов в $f^{-1}(F)$, поскольку они не принадлежат области значений функции f.

Прообраз может быть пустым.

Область значений функции f имеет вид:

$f(A) = \{b : f(a) = b$ для некоторого $a \in A\} = \{1, 2, 5\}$.

Элементами $f(A)$ являются те и только те элементы области потенциальных значений B, которые используются функцией f.

Если R – отношение на $A \times B$, а S - отношение на $B \times C$, то можно определить отношение $S \circ R$ на $A \times C$, называемое композицией S и R.

Если R и S – функции, то $S \circ R$ - тоже функция, называемая композицией S и R.

Теорема

Пусть $g : A \to B$ и $f : B \to C$.

Тогда а) композиция $f \circ g$ есть композиция из A и C.
Обозначение $f \circ g : A \to C$;

б) если $a \in A$, то $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Теорема

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$.

Тогда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, то есть композиция двух функций ассоциативна.

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x + 3$ - функции, заданные на множестве действительных чисел.

Функция $$f(g(x)) = f(x+3) = \sqrt{x+3}$$

Функция $$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 3$$

Определение

Функция $f : A \to B$ называется ***инъективной***, или ***инъекцией***, если из $f(a) = f(a')$ следует $a=a'$.

Функция f называется ***отображением "на"*** или ***сюръективной функцией***, или ***сюръекцией***, если для каждого $b \in B$ существует некоторое $a \in A$ такое, что $f(a) = b$.

Функция, которая является одновременно и инъективной, и сюръективной, называется ***взаимно однозначным соответствием***, или ***биекцией***.

Если $A = B$ и $f : A \to B$ является взаимно однозначным соответствием, то f называется ***перестановкой*** множества A.

Пример

Пусть A и B - множества действительных чисел и $f : A \to B$

определена таким образом: $f(x) = 3x + 5$.

Функция f инъективна, так как если $f(a) = f(a')$,

тогда $3a + 5 = 3a' + 5 \Rightarrow a = a'$.

Функция f является также сюръективной:

Для любого действительного числа b требуется найти такое a, что $f(a) = b = 3a + 5$. $\Rightarrow a = (1/3)(b - 5)$, тогда $f(a) = b$.

Поэтому f представляет собой взаимно однозначное соответствие, а в силу $A=B$, f является также перестановкой.

Пример

Пусть A и B – множество действительных чисел, и функция $f : A \to B$ определена как $f(x) = x^2$. Функция f не является инъективной,

так как $f(2) = f(-2)$, но $2 \neq -2$.

Функция f не является также и сюръективной, так как не существует такого действительного числа a, для которого $f(a) = -1$.

Если A и B - множество неотрицательных действительных чисел, тогда f является как инъективной, так и сюрьективной.

Пусть f – функция из множества A во множество B,
то есть $f : A \to B$.

$f \subseteq A \times B$, так как f является отношением на $A \times B$.

Обратное отношение $f^{-1} \subseteq B \times A$ определяется как

$$f^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in f\}.$$

При этом отношение f^{-1} может не быть функцией из B в A, даже если f является функцией из A в B.

Если f^{-1} действительно является функцией, то ее называют обращением функции f, или ее ***обратной функцией***.

Теорема

Если $f : A \to B$ является биекцией. То обратное отношение f^{-1} является функцией из B в A, причем биекцией.

Обратно, для $f : A \to B$, если f^{-1} – функция из B в A, то f является биекцией.

Теорема

Если $f : A \to B$ является биекцией, то

а) $f(f^{-1}(b)) = b$ для любого b из B;

б) $f^{-1}(f(a)) = a$ для любого a из A.

Доказательство:

Пусть $b \in B$ и $a = f^{-1}(b)$. Тогда $f(a) = b$.

Поскольку $a = f^{-1}(b)$), то $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

Аналогично доказывается

$$f^{-1}(f(a)) = a \text{ для любого } a \text{ из } A.$$

Пример

Требуется найти обратную функцию для $y = 3x + 6$.

Обращая функцию, получается

$$\{(x, y): y = 3x + 6\}.$$

Это тоже самое, что

$$\{(x, y): x = 3y + 6\}.$$

Решение этого уравнения относительно y:

$$\{(x, y): y = (x - 6) / 3\}.$$

Теорема

Если $f : A \rightarrow A$ и I - тождественная функция на A,

то $I \circ f = f \circ I = f$.

Если для f существует обратная функция,

то $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

Теорема

Пусть $g : A \to B \quad f : B \to C$.

Тогда а) если g и f - сюръекции A на B и B на C соответственно, то $f \circ g$ есть сюръекция A на C.

Иначе: композиция двух сюръекций – сюръекция.

б) если g и f - инъекции, то $f \circ g$ - также инъекция.

Иначе: Композиция двух инъекций – инъекция.

в) если g и f - биекции, то $f \circ g$ - также биекция.

Иначе: Композиция двух биекций – биекция.

г) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Специальные функции

Если f – перестановка на множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

- Может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

Тождественная специальная функция – тождественная функция I, определенная соотношением

$I(a) = a$ для всех $a \in A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Пример

Если $A = \{1, 2, 3\}$ и функция $f : A \to B$ определена соотношениями

$$f(1) = 3,\ \ f(2) = 2,\ f(3) = 1$$

Тогда f может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $g : A \to A$ определена соотношением

$$g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 1$$

Тогда g можно представить в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Композиции этих функций: $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Является тождественной функцией. $I \circ f = f \circ I = f$ для любой перестановки f на множестве A.

Чтобы построить обратную перестановку, необходимо найти число, стоящее над 1 и поместить его под 1. Затем найти число, стоящее над 2 и поместить его под 2. Затем найти число, стоящее над 3 и поместить его под 3.

,

Определение

Функция $f : A \to B$, где А – множество действительных чисел, B – множество целы чисел, называется ***нижним округлением*** и обозначается

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Если каждому числу $a \in A$ ставит в соответствие наибольшее целое число, меньшее или равное a.

Функция $f : A \to B$ называется ***верхним округлением*** и обозначается

$$f(x) = \lceil x \rceil$$

Если каждому числу $a \in A$ ставит в соответствие наименьшее целое число, большее или равное a.

Пример

$$\lfloor 2.99 \rfloor = 2, \quad \lfloor 4 \rfloor = 4, \quad \lfloor -4 \rfloor = -4, \quad \lfloor -4.1 \rfloor = -5$$

$$\lceil 2.99 \rceil = 3, \quad \lceil 4 \rceil = 4, \quad \lceil -4 \rceil = -4, \quad \lceil -4.1 \rceil = -4$$

Пусть A и B совпадают со множеством неотрицательных целых чисел. Факториалом называют функцию $f: A \to B$, определяемую соотношениями:

0! = 1

1! = 1 = 1 · 0!

2! = 1 · 2 = 2 = 2 · 1!

3! = 1 · 2 · 3 = 6 = 3 · 2!

4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24 = 4 · 3!

…

k! = 1 · 2 · 3 · … · *k* = k · (k – 1)!

Пример

$$\frac{12!}{10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 132$$

Определение

Бинарной операцией на множестве A называется функция $b: A \times A \to A$. Образ пары (r, s) при отображении b записывается

$$b((r, s)) \quad \text{или } rbs.$$

Последовательность является частным видом функции.

Конечной последовательностью называют функцию из $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ в некоторое множество S.

Любая конечная или бесконечная последовательность может быть названа просто ***последовательностью***.

Если A – конечная последовательность, может быть представлена

$A(1), A(2), A(3), \ldots, A(n)$ или $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$.

Пример

Пусть $A(n) = n^2 - 3$. Первые пять элементов последовательности:

$A(1) = 1^2 - 3$, $A(2) = 2^2 - 3$, $A(3) = 3^2 - 3$, $A(4) = 4^2 - 3$, $A(5) = 5^2 - 3$.

Определение

Сумма $A_r + A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_{r+s}$ может быть записана

$$\sum_{i=r}^{r+s} A_i$$

Сумма первых n элементов арифметической прогрессии

$$S = a + (a + c) + (a + 2c) + \cdots + [a + (n - 1)c]\,,$$

$$S = [a + (n - 1)c] + [a + (n - 2)c] + [a + (n - 2)c] + \cdots + a,$$

$$\begin{aligned} 2S = {} & [a + (a + (n - 1)c)] + [a + (a + (n - 1)c)] + [a + (a + (n - 1)c])+ \\ & + \cdots + [a + (a + (n - 1)c] = \\ & = [2a + (n - 1)c] + [2a + (n - 1)c] + [2a + (n - 1)c] + \cdots + [2a + (n - 1)c]. \end{aligned}$$

$$2S = n(2a + (n - 1)c)\,,$$

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)c))\,.$$

$$A_1 = a \text{ и } A_n = a + (n - 1)c)$$

$$S = \frac{n}{2}(A_1 + A_n)\,.$$

Пример

S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 6(3 + 13)/2 = 48

Сумма геометрической прогрессии:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$rS - S = ar^n - a$$

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Последний слайд лекции