Многогранники. Работа с многогранниками в программе Cabri 3D

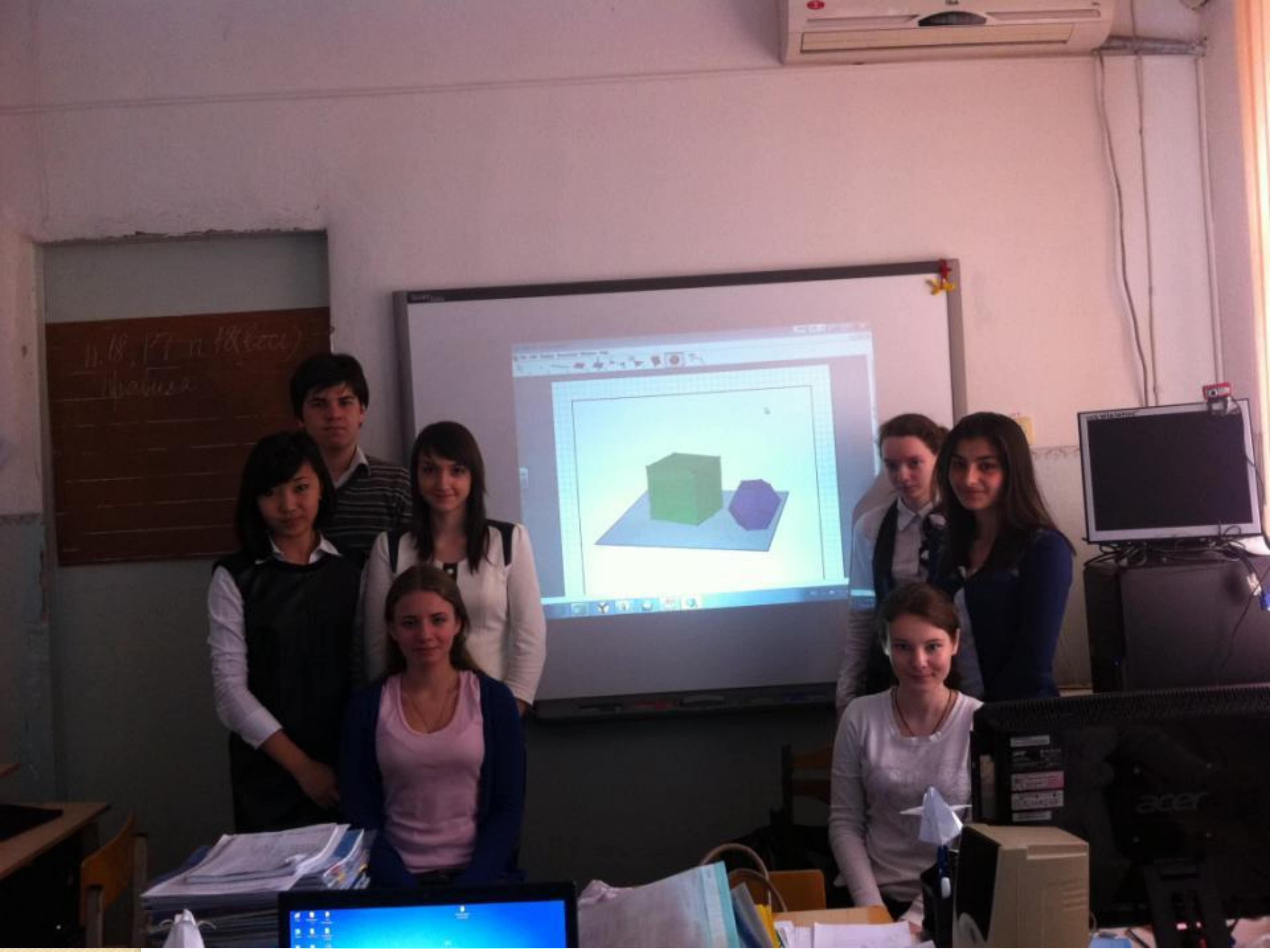
10 «а» класс (хим-био группа)

Авторы:

Учитель математики: Луштей Татьяна Николаевна

Учитель информатики: Романова Марина Игоревна

2014 г.



«Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук».

Л. Кэрролл

Цели создания проекта:

<u>Обучающая цель</u>: Закрепить понятие о выпуклых многогранниках, их некоторых свойствах, выработка навыков решения задач на построение сечений многогранников в программе Cabri 3D, показать связь математики и информатики с жизнью. Повторение формул для вычисления площадей геометрических фигур, площадей поверхностей многогранников; привитие практических навыков решения заданий ЕГЭ; умения работать в программе Cabri 3D.

<u>Развивающая цель</u>: формирование компетентности в сфере самостоятельной познавательной деятельности, навыков самостоятельной работы с большим объёмом информации, формирование навыков работы в команде, развитие творческих способностей личности, умений сравнивать, выявлять закономерности; развитие логического мышления, памяти и математической речи; графической культуры.

Задачи нашего проекта:

- Обобщение и систематизация знаний
- Расширение спектра задач, доступных учащимся
- Формирование у учащихся устойчивого интереса к геометрии и информатике, выявление способностей учащихся к данным предметам
- Ориентация на профессию, существенным образом связанную с математикой и информатикой, подготовка к сдаче ЕГЭ и обучению в ВУЗе

Наглядная топология как средство познания реального мира

- Понятие поверхности
- Аналитическое задание поверхности
- Параметрические уравнения
- Примеры гомеоморфных поверхностей

Ход работы:

- На уроках геометрии ознакомились с многогранниками
- Изготовили модели правильных многогранников
- Составили и решили задачи разного типа на тему «Многогранники»
- Разделились на 4 группы:

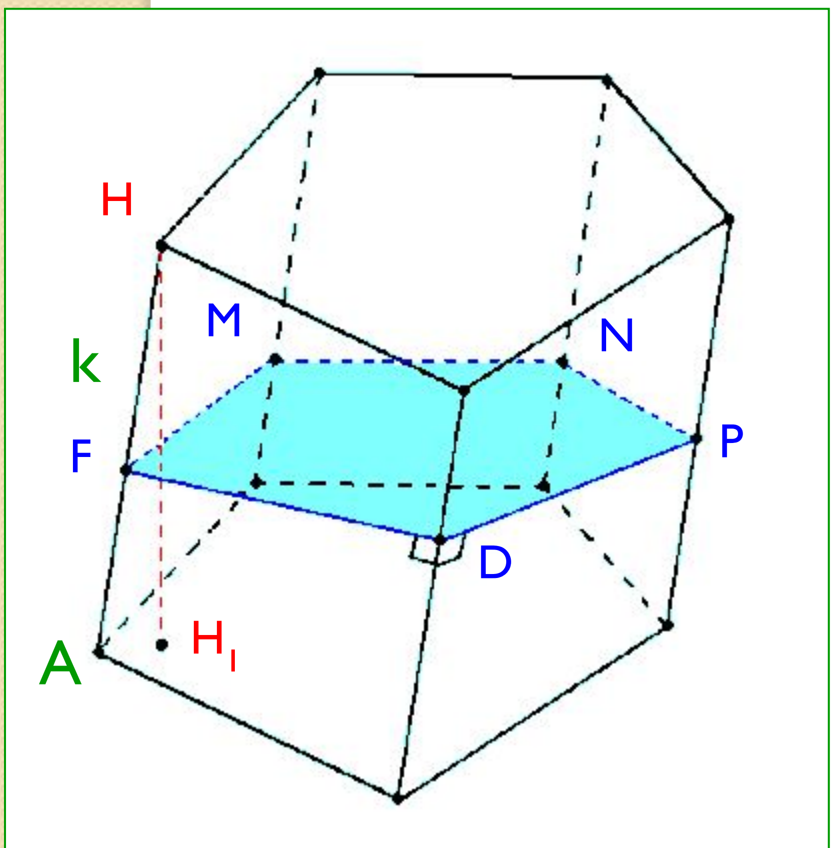
I группа «Призмы»

- Создать презентацию на повторение данной темы: определение призмы, виды призм, элементы призмы, формулы для вычисления площади поверхности призмы (боковой и полной)
- Научиться строить призму в программе Cabri 3D
- Составить и решить 3 задачи на применение формул для вычисления площади призмы, изготовить модель фигуры.

Призма

: основания – равные n – угольники, лежащие в параллельных плоскостях, боковые грани – параллелограммы.

Наклонная – боковые грани – параллелограммы.



HH_1 – высота призмы

AH (k) – боковое ребро призмы

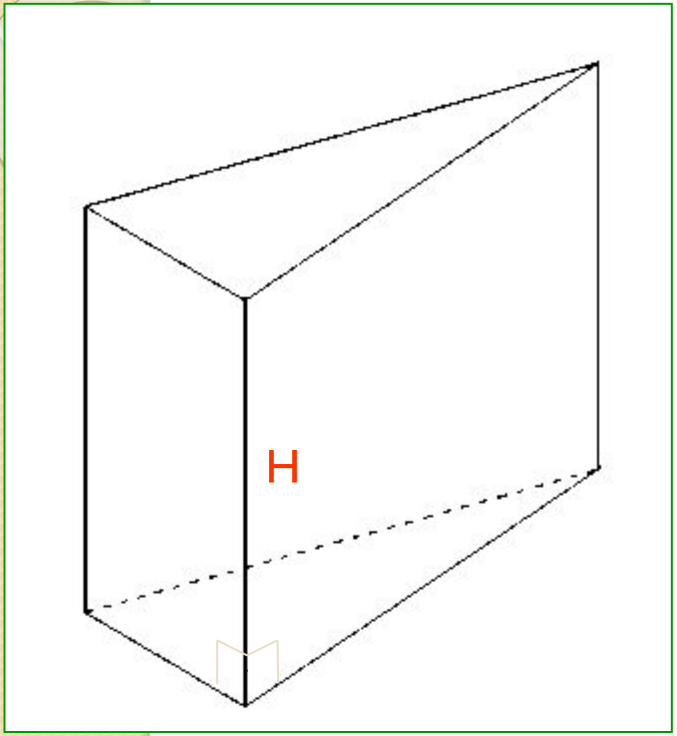
FMNPD – сечение, перпендикулярное боковому ребру

$$S_{бок.} = P_{сеч.} \cdot k$$

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$$

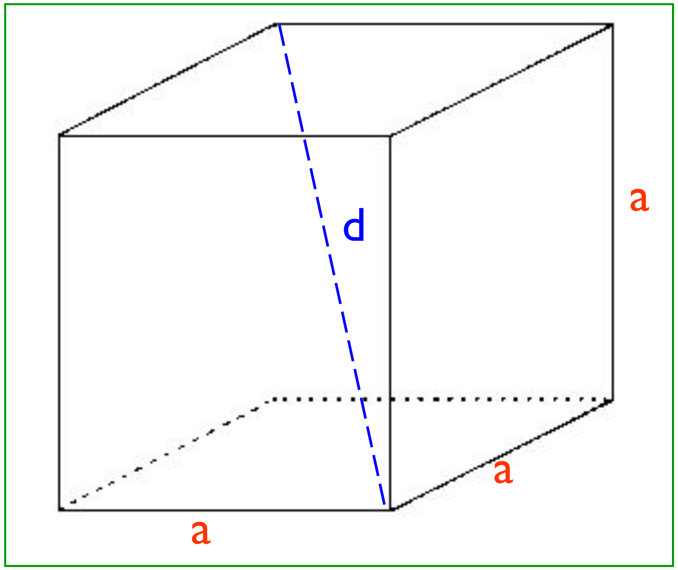
$$V = S_{сеч.} \cdot k$$

Прямая призма – боковые грани – прямоугольники.



Куб

все грани - квадраты



$$V = a^3$$

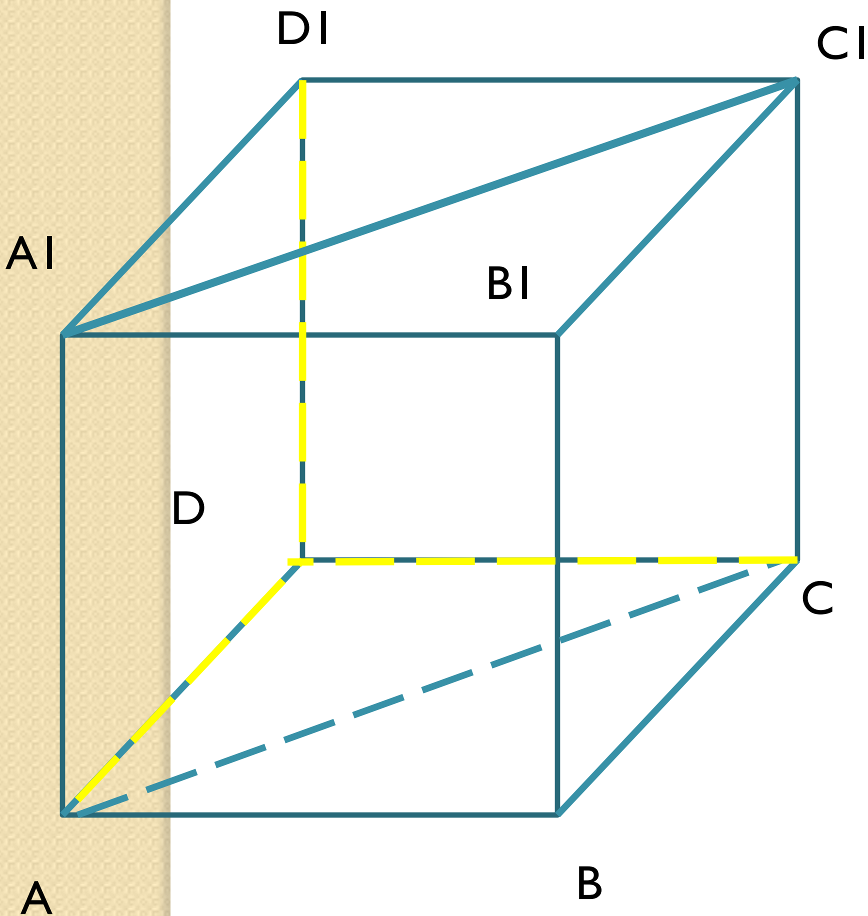
$$d^2 = 3 \cdot a^2$$

$$V = S_{осн.} \cdot H$$

$$L_{каркаса} = 12 \cdot a$$

$$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot H$$

$$S_{п.п.} = 6 \cdot a^2$$

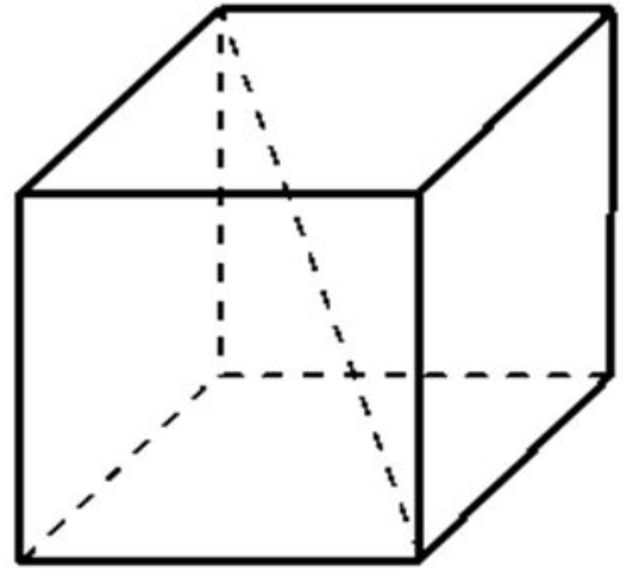


Дано:
ABCDA1D1C1D1-прямая призма,
AA1=10 см, AB=6см, BC=8см.
Найти:
Площадь AA1C1C

Решение:
Диагональные сечения данной призмы равны, так как равны диагонали основания и боковые ребра.
Диагональное сечение AA1C1C-прямоугольник. Сторона AC есть диагональ основания ABCD. Из прямоугольного тр-ка ABC по теореме Пифагора
AC= 6^2 + 8^2= 10 см. Поэтому
Saa1c1c=10*10=100 см^2
Ответ:100см^2

- Диагональ куба равна .

Найдите его объем.



Решение:

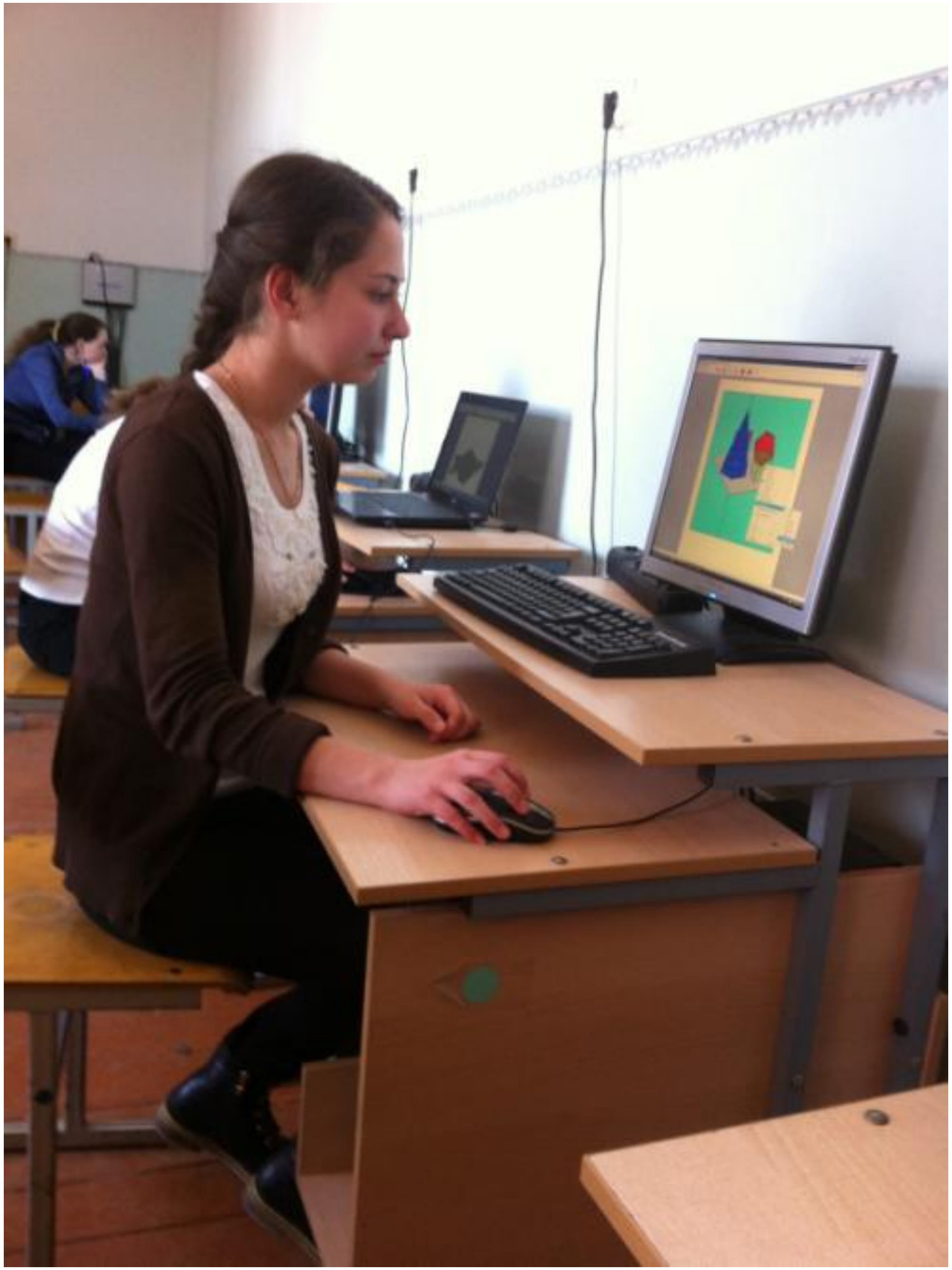
Диагональ куба в раз $\sqrt{3}$ больше его ребра. Получим, что ребро равно $a = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$

Тогда объем куба $V = a^3 = 8$

Ответ: 8

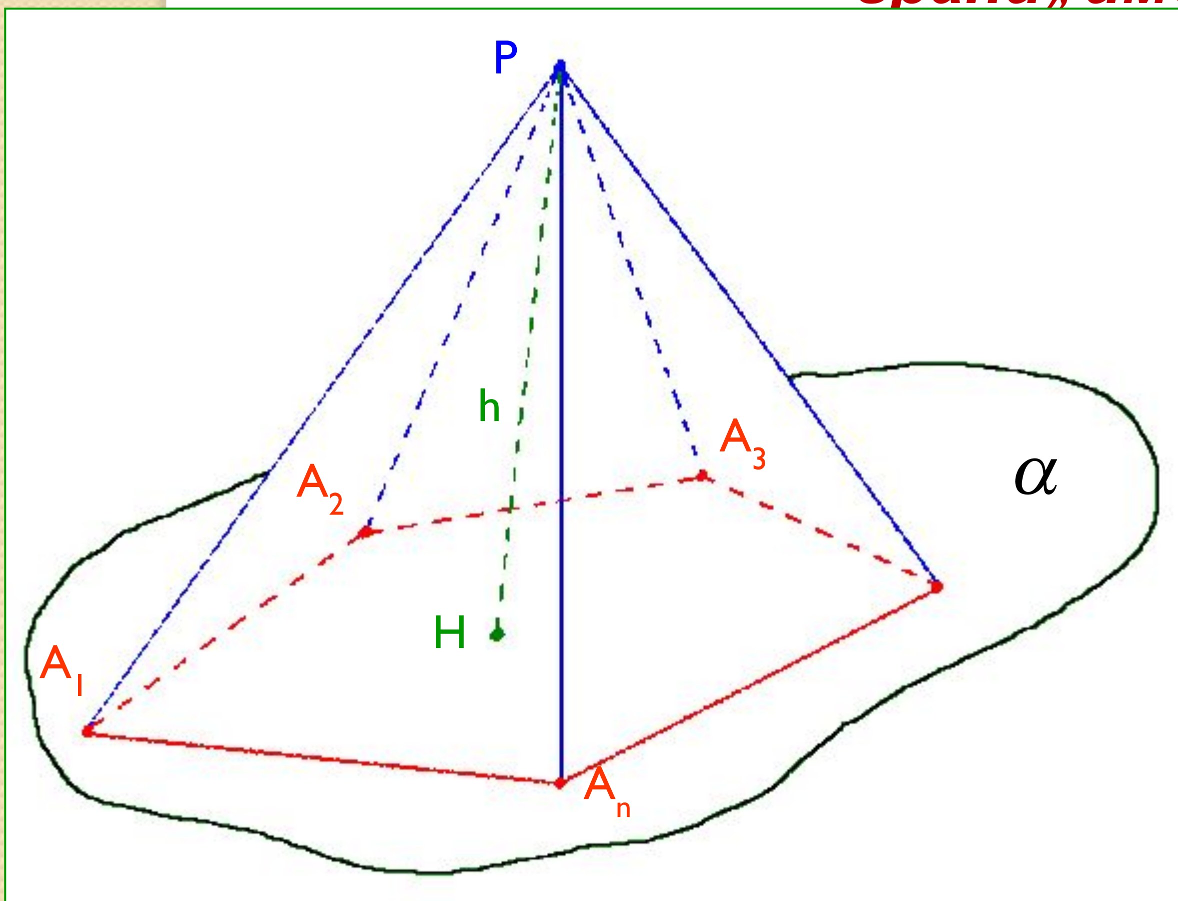
2 группа «Пирамиды»

- Создать презентацию на повторение данной темы: определение пирамиды, виды пирамид, элементы пирамид, формулы для вычисления площади поверхности пирамиды (боковой и полной).
- Научиться строить пирамиду в программе Cabri 3D
- Составить и решить 3 задачи на применение формул для вычисления площади пирамиды, изготовить модель фигуры.



Пирамида

– это многогранник, состоящий из *n*-угольника $A_1A_2A_3...A_n$ (основание) и *n* треугольников (боковые грани), имеющих общую ... Р).



$PA_1; PA_2; PA_3; ... ; PA_n$ – боковые ребра

$A_1A_2; ... ; A_1A_n$ – ребра основания

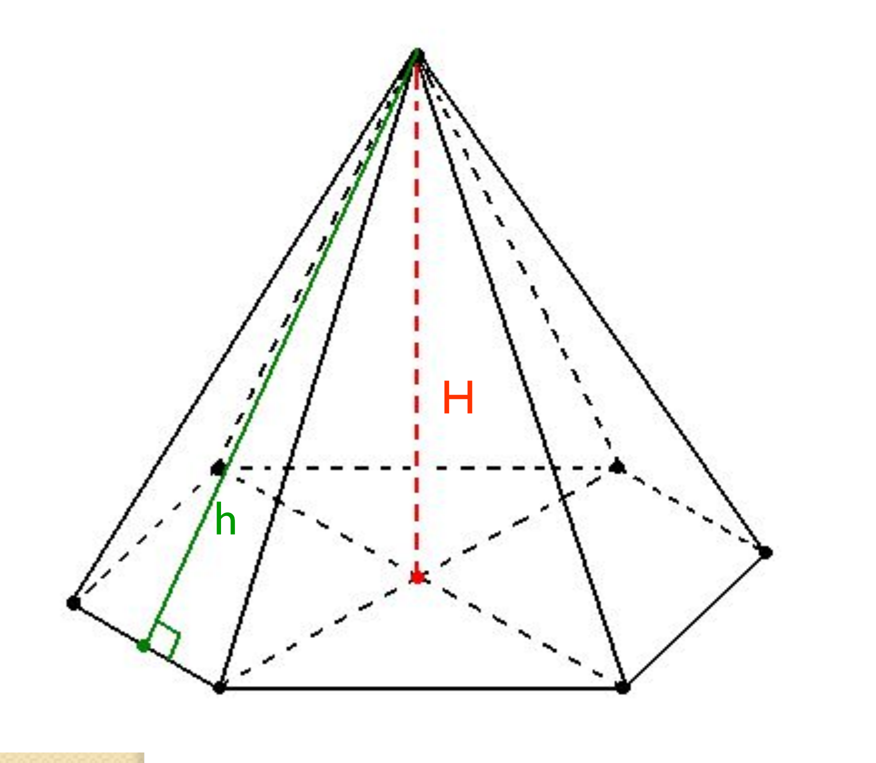
PH – высота пирамиды - h

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Правильная пирамида

- основание – правильный многоугольник, вершина проецируется в центр основания;
- боковые ребра – равны;
- боковые грани – равные равнобедренные треугольники.



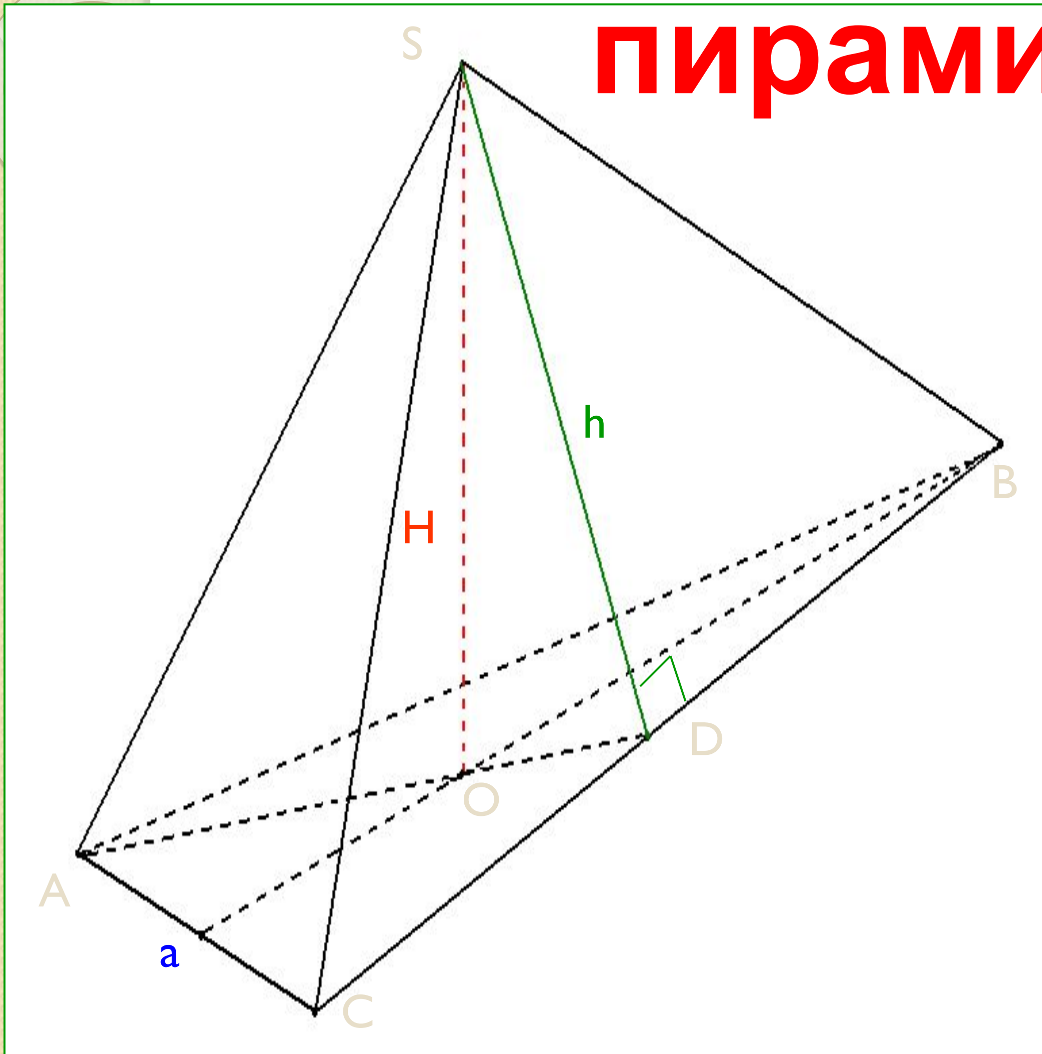
H – высота, h – апофема

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн.} \cdot h$$

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Правильная треугольная пирамида



H – высота, h – апофема

AB = BC = AC = a

$$DO = \frac{1}{3} \cdot AD \qquad AO = \frac{2}{3} \cdot AD$$

$$S_{бок.} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h$$

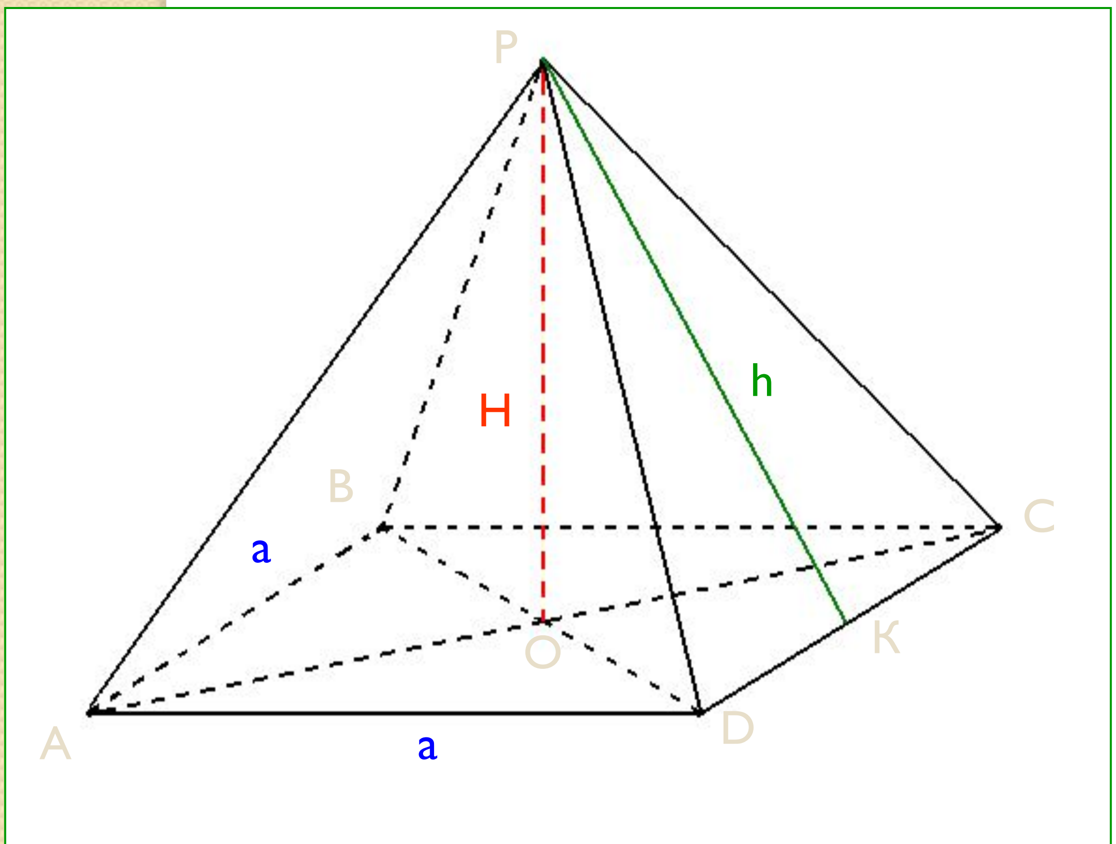
$$S_{п.п.} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Правильная четырехугольная пирамида

H – высота, h – апофема, a – сторона основания

AB = BC = CD = DA = a (в основании – квадрат)



К – середина DC

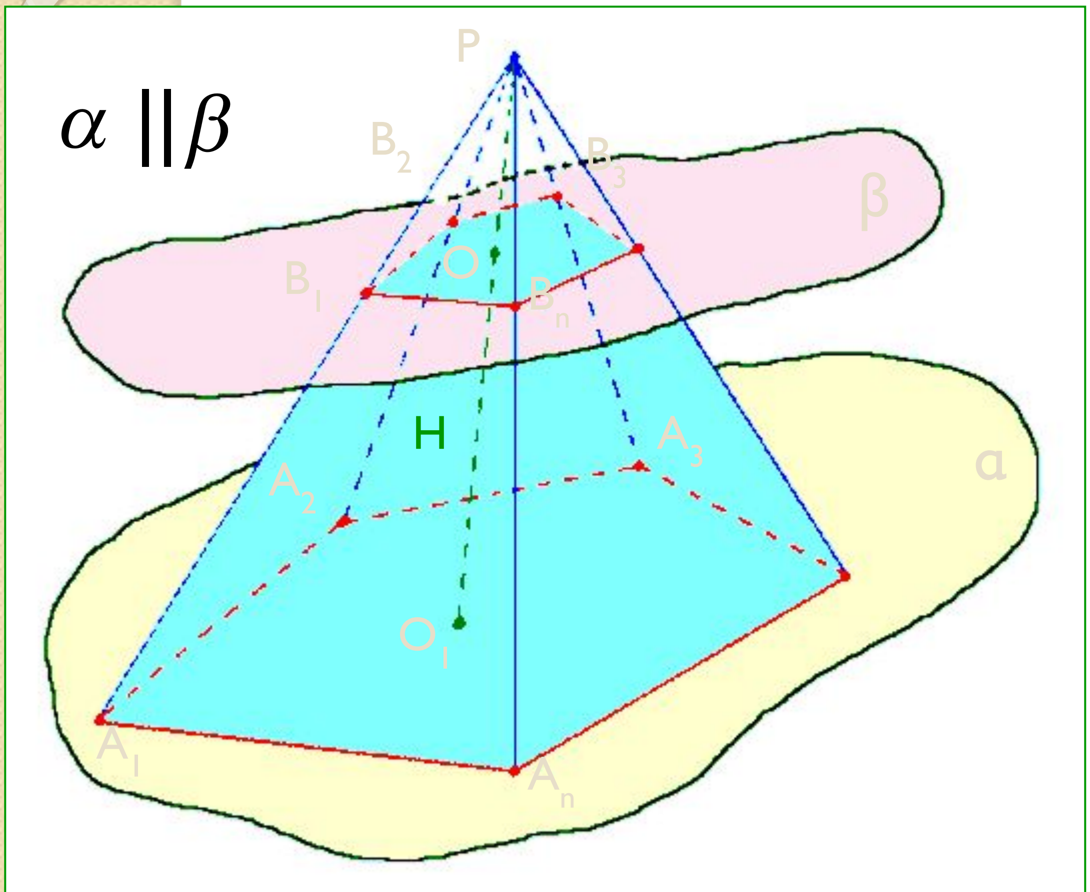
$$OK = \frac{1}{2} \cdot a \qquad BD = a \cdot \sqrt{2}$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = 2 \cdot a \cdot h$$

$$S_{п.п.} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

Усеченная пирамида



$PA_1A_2…A_n$ – произвольная пирамида

α – плоскость основания

β – секущая плоскость,

$PB_1B_2…B_n$ – пирамида

$B_1B_2…B_n$ – верхнее основание

$A_1A_2…A_n$ – нижнее снование

$A_1B_1B_2A_2$; …; $A_nB_nB_1A_1$ – боковые грани – трапеции

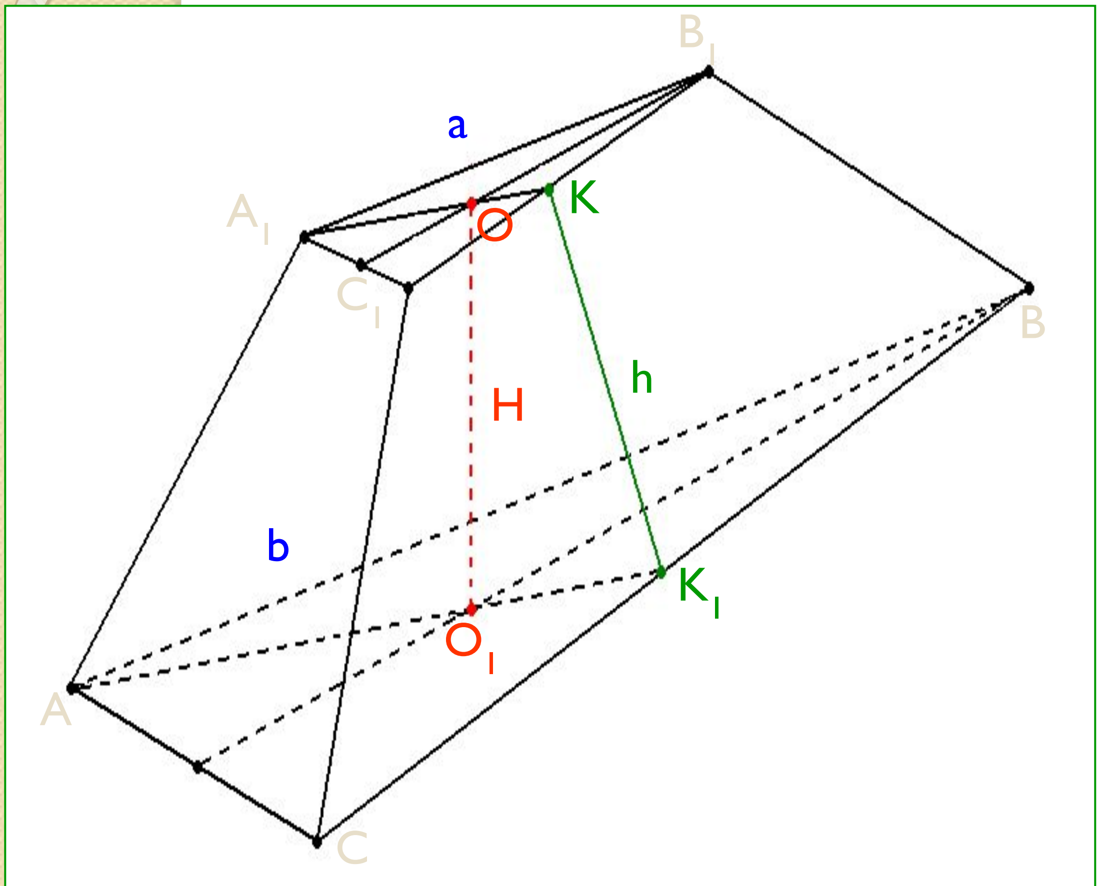
A_1B_1; A_2B_2; …; A_nB_n – боковые ребра

$OO_1 = H$ – высота

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{в.осн.} + S_{н.осн.} \quad V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (S_{в.осн.} + S_{н.осн.} + \sqrt{S_{в.осн.} \cdot S_{н.осн.}})$$

Правильная треугольная усеченная пирамида –

боковые грани – равные между собой равнобокие трапеции.



Δ ABC и Δ $A_1B_1C_1$ – равносторонние

OO_1 = H – высота

KK_1 = h – апофема

$$P_{в.осн.} = 3 \cdot a$$

$$P_{н.осн.} = 3 \cdot b$$

$$S_{в.осн.} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{н.осн.} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

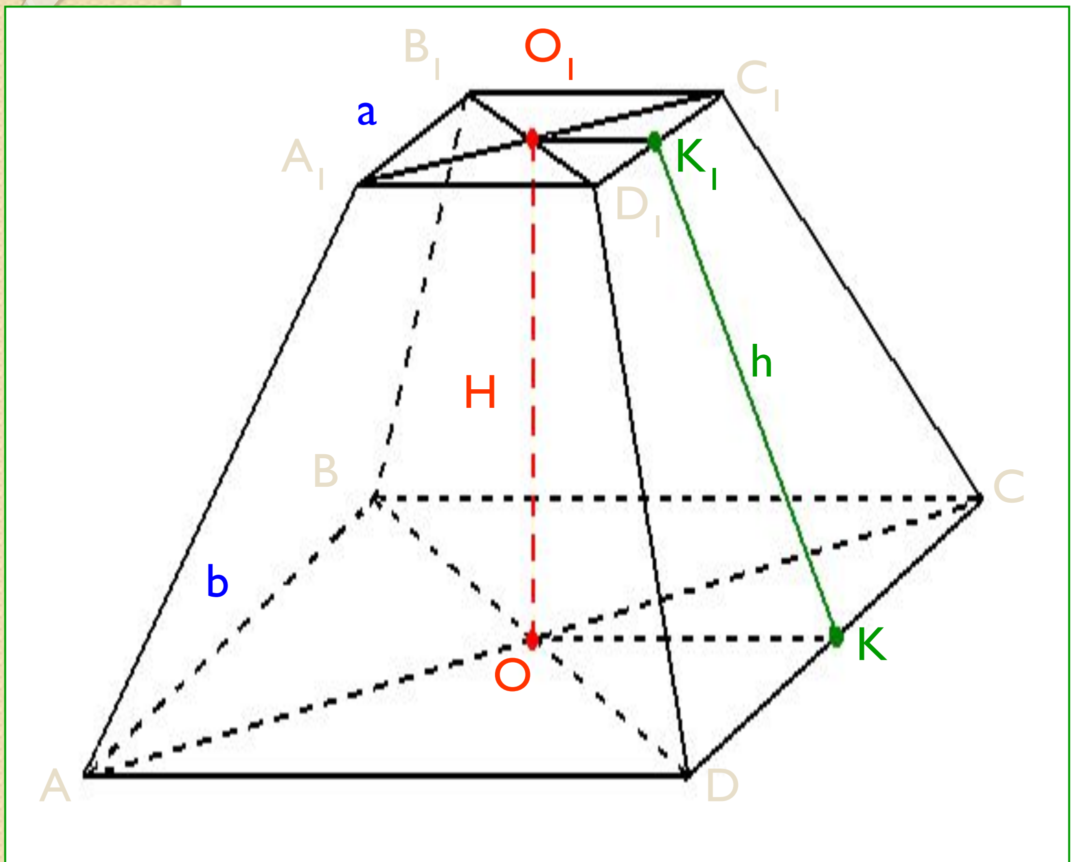
$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (P_{в.осн.} + P_{н.осн.})$$

$$S_{бок.} = \frac{3}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{3}}{4})$$

Правильная четырехугольная усеченная пирамида – боковые грани – равные между собой равнобокие трапеции.



ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты

OO_1 = H – высота

KK_1 = h – апофема

$$P_{в.осн.} = 4 \cdot a \qquad P_{н.осн.} = 4 \cdot b$$

$$S_{в.осн.} = a^2 \qquad S_{н.осн.} = b^2$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (P_{в.осн.} + P_{н.осн.})$$

$$S_{бок.} = 2 \cdot h \cdot (a + b)$$

$$S_{п.п.} = a^2 + b^2 + 2 \cdot h \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (a^2 + b^2 + \sqrt{a^2 \cdot b^2}) \qquad V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (a^2 + b^2 + a \cdot b)$$

Задача 1.

Основанием пирамиды служит квадрат, две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны к плоскости её основания, две другие её боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, каждый из которых равен 30^0. Высота пирамиды равна $\sqrt{2}$

Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

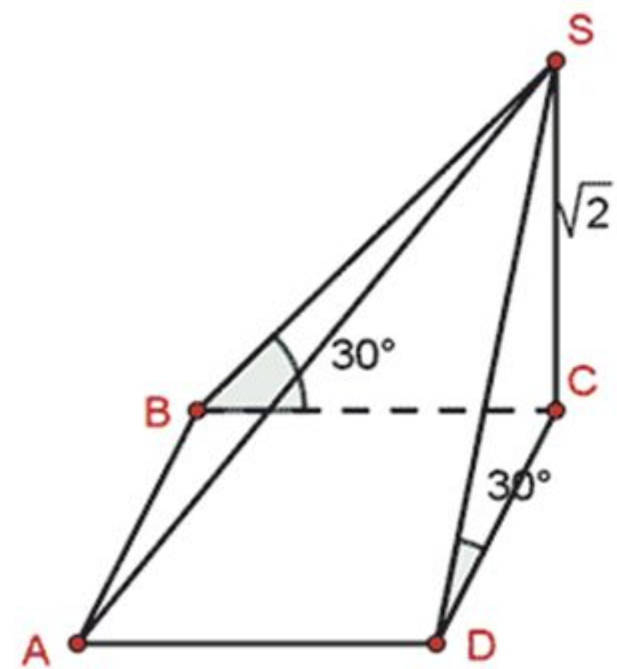
$\Delta BSC = \Delta DSC, \Delta BSA = \Delta ASD$ – прямоугольные: $\angle C = \angle B = \angle D = 90°$ в этих треугольниках

$SD = SB = 2\sqrt{2}$; сторона квадрата равна $\sqrt{6}$; $S_{\Delta BSC} = S_{\Delta DSC} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$;

$S_{\Delta BSA} = S_{\Delta ASD} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

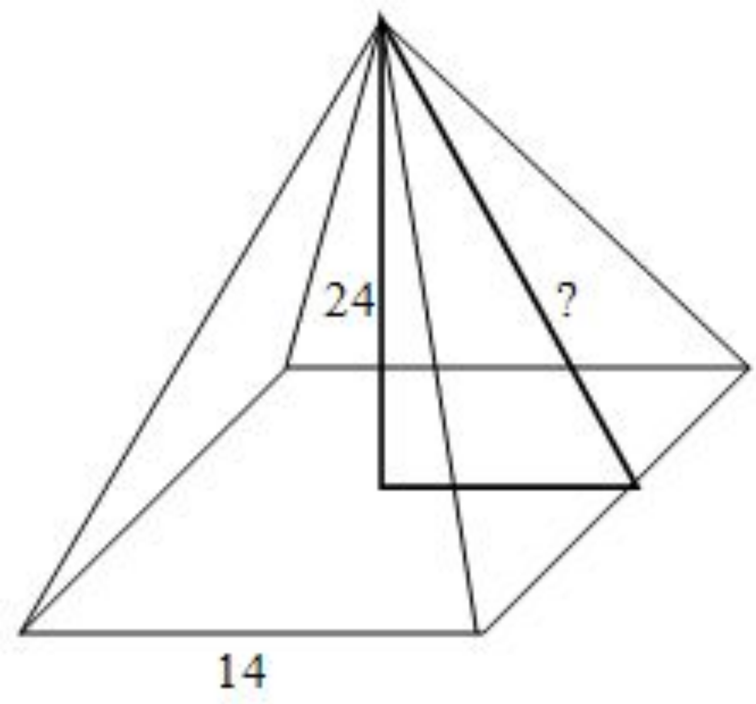
$S_{бок.пов.} = 2S_{\Delta BSC} + 2S_{\Delta BSA} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$;

Ответ: $6\sqrt{3}$кв.ед.



Задача №2.

Высота и сторона основания правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны 24 и 14. Найдите апофему пирамиды.



Решение.

Поскольку пирамида правильная, то в ее основании лежит правильный четырехугольник - квадрат. Кроме того, высота пирамиды проецируется в центр квадрата. Таким образом, катет прямоугольного треугольника, который образован апофемой пирамиды, высотой и отрезком, их соединяющим, равен половине длины основания правильной четырехугольной пирамиды.

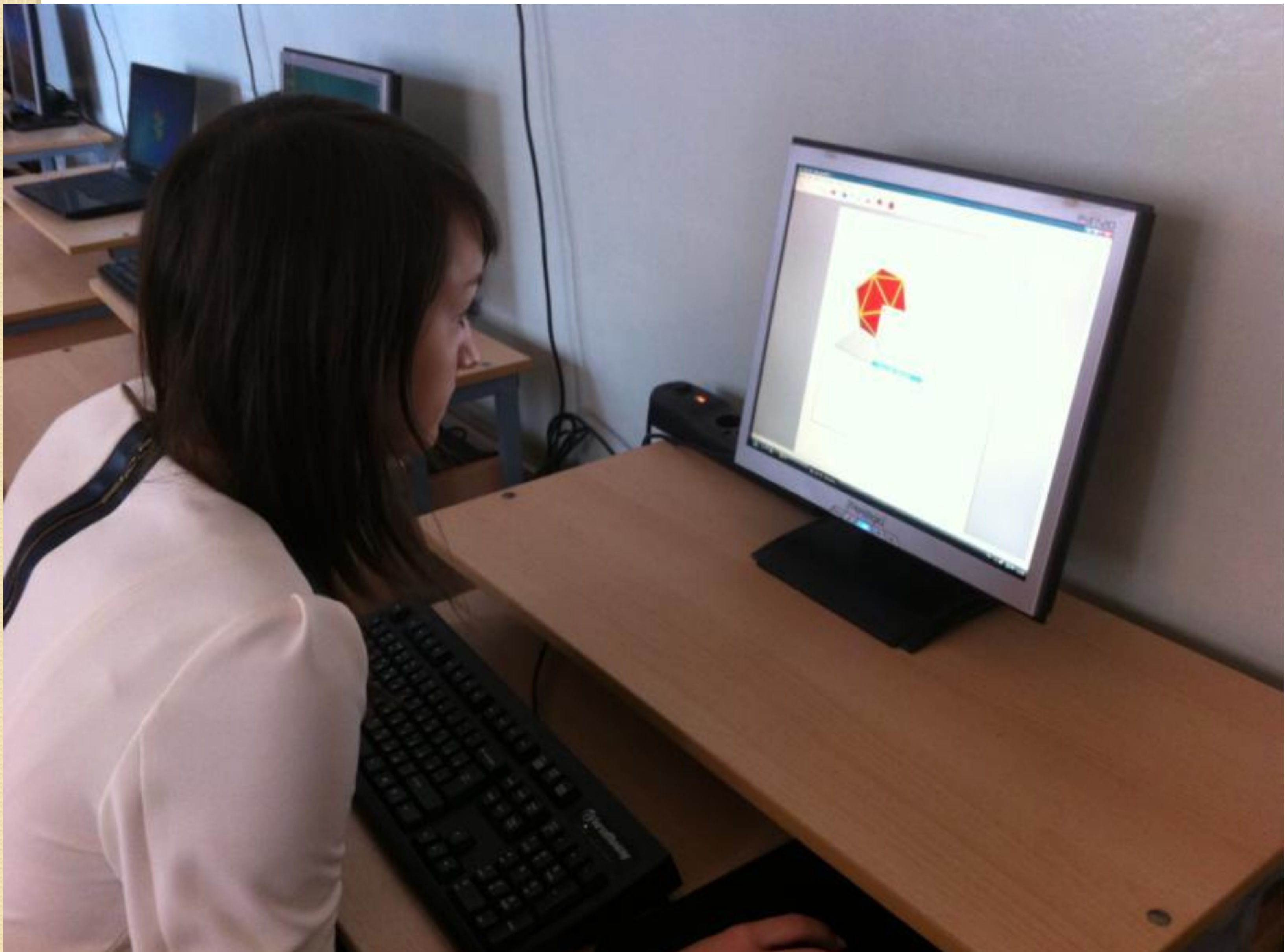
Откуда по теореме Пифагора длина апофемы будет найдена из уравнения:

$7^2 + 24^2 = x^2$
$x^2 = 625$
$x = 25$

Ответ: 25 см

3 группа «Правильные многогранники»

- Создать презентацию на повторение данной темы: определение правильных многогранников, виды правильных многогранников,свойства многогранников, объяснение ограниченного количества видов правильных многогранников.
- научиться строить развертку данной фигуры в программе Cabri 3D
- составить и решить 3 задачи на данную тему, изготовить модель фигуры.



Платон

Учение о правильных многогранниках изложил в своих трудах Платон. С тех пор правильные многогранники называют Платоновыми телами. Существует пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

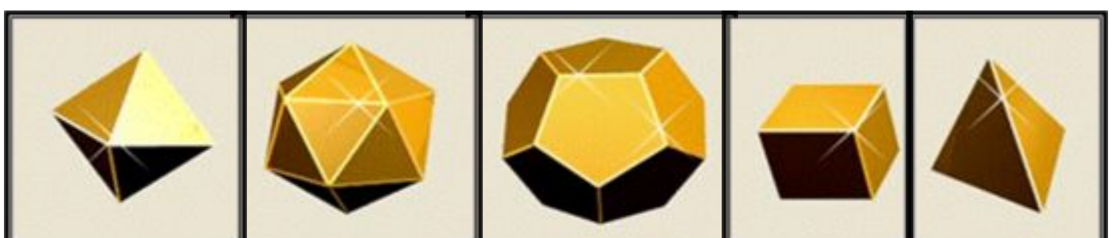
Вспомним

Многогранник- это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело.

- ***Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и тоже число ребер.***

Правильные многогранники еще называют Платоновыми телами.

Существует пять правильных многогранников: 1)тетраэдр, 2)куб, 3)октаэдр, 4) икосаэдр, 5)додекаэдр.

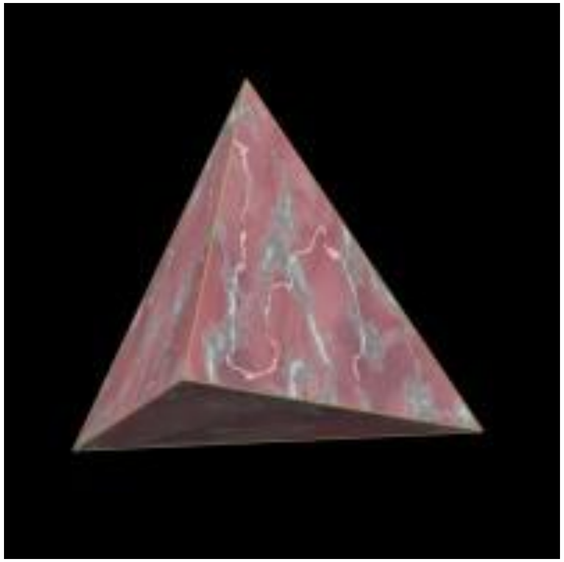


ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА.

Все эти типы многогранников были известны в Древней Греции. Этим **красивым телам** посвящена *XIII* книга «Начал» Евклида. Их называют еще телами Платона. Они занимали видное место в его идеалистической картине мира. Четыре из них олицетворяют в ней четыре «сущности», или «стихии»: тетраэдр - огонь, икосаэдр - воду, куб - землю, октаэдр - воздух. Додекаэдр воплощал в себе «все сущее», символизировал все мировоззрение, почитался главнейшим.

ТЕТРАЭДР.

«Тетраэдр» в дословном переводе с греческого языка означает «четырехгранник.»У правильного тетраэдра грани - правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.



ГЕКСАЭДР.

«Гексаэдр» в переводе с греческого языка означает «шестигранник». У куба все грани - квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра . Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

ОКТАЭДР.

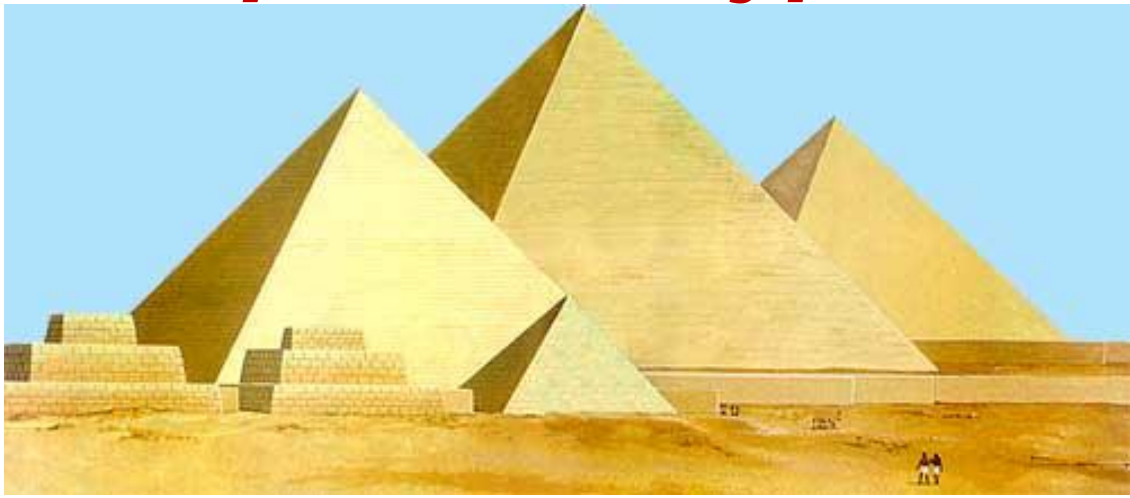
«Октаэдр» в переводе с греческого языка означает «восьмигранник». Уоктаэдра грани - правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

ДОДЕКАЭДР.

«Додекаэдр» в переводе с греческого языка означает «двенадцатигранник». У додекаэдра грани - правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.

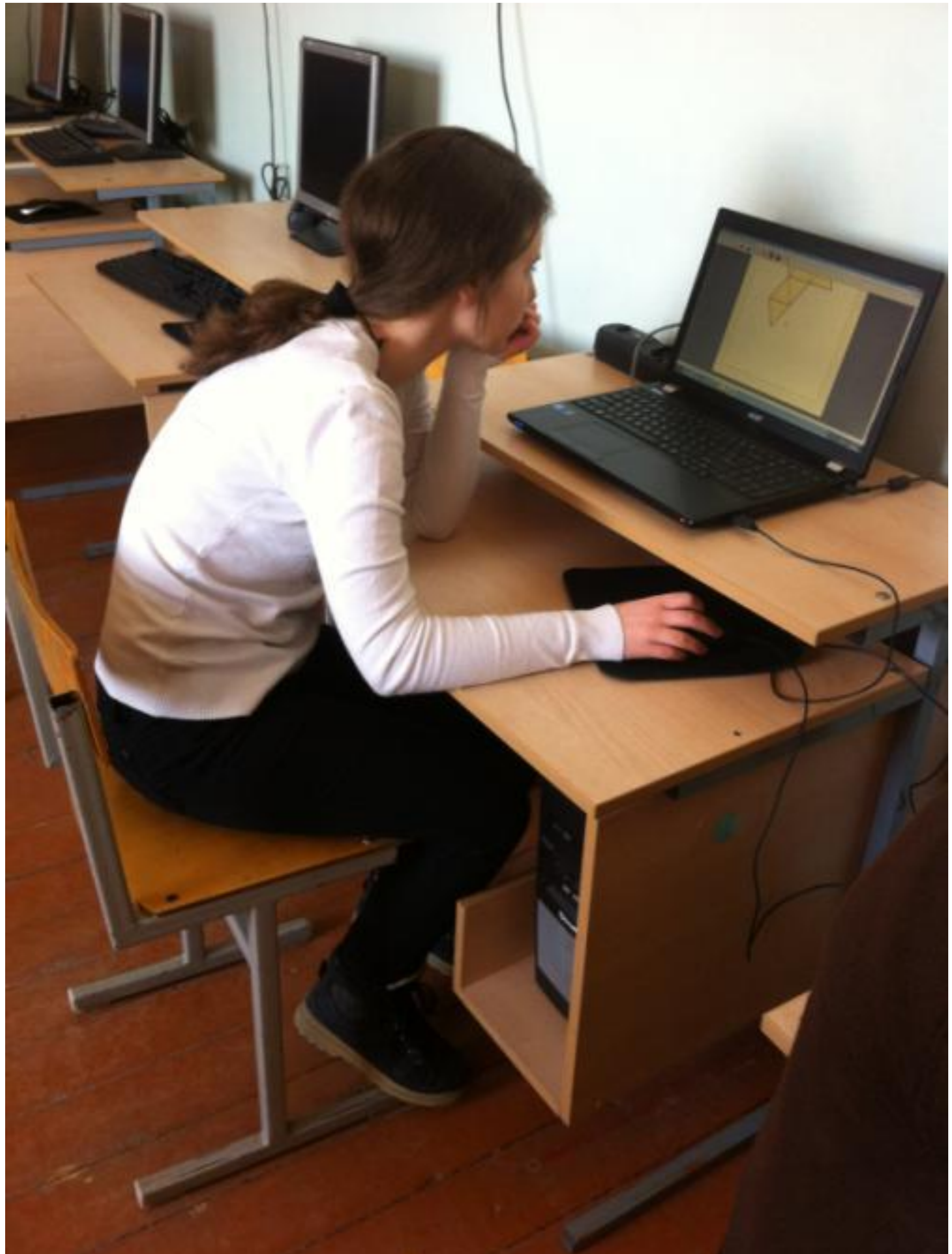
Многогранники в ювелирном деле

Многогранники в архитектуре



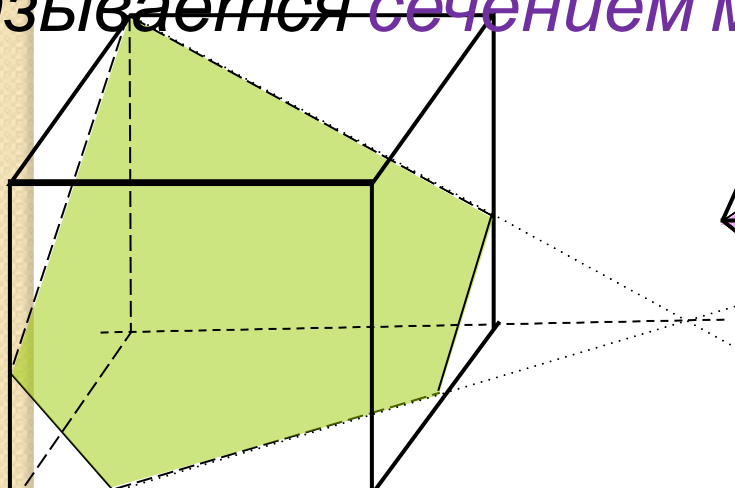
4 группа «Построение сечений многогранников»

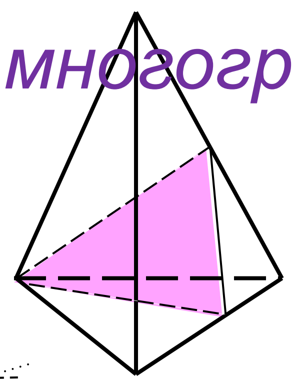
- Создать презентацию на повторение данной темы: определение сечения, правила их построения
- Научиться строить сечения многогранников в программе Cabri 3D
- Составить и решить 3 задачи на построение сечений.

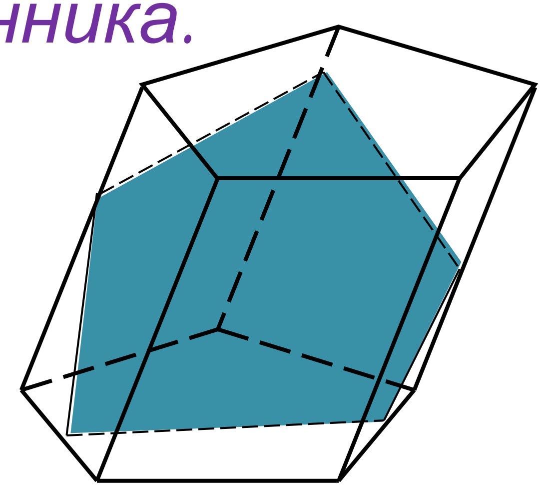


Определение сечения.

- Секущей плоскостью многогранника назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.
- Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.



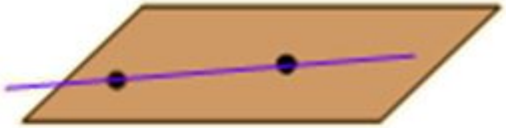




если две точки многогранника принадлежат сечению, то прямая, проходящая через них, принадлежит секущей плоскости

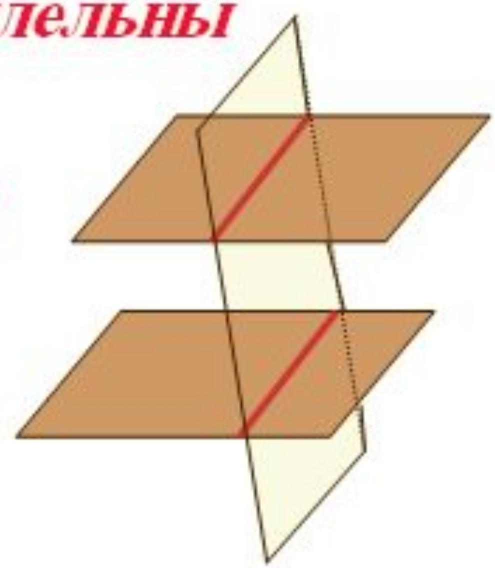
Теоретические основы:

По аксиоме: если две точки принадлежат плоскости, то и вся прямая, проходящая через эти точки, принадлежит плоскости



если секущая плоскость пересекает две противоположные параллельные грани многогранника, то

линии пересечения параллельны

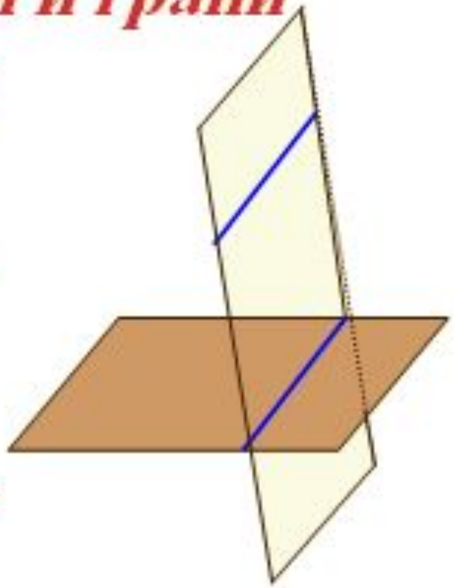


Теоретические основы:

По теореме: если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны

если секущая плоскость проходит через прямую, параллельную грани многогранника и пересекает её, то

линия пересечения плоскости и грани параллельна данной прямой



Теоретические основы:

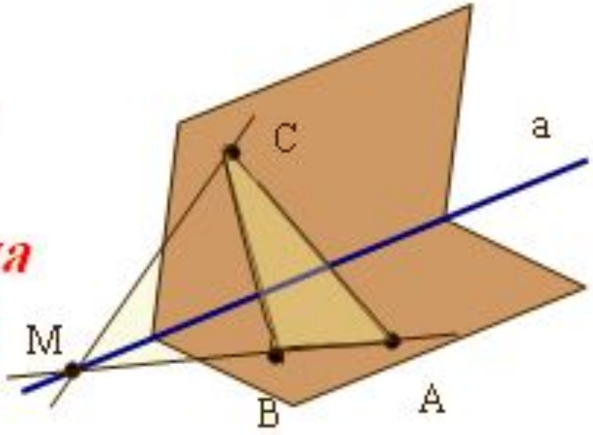
Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой

общая точка секущей плоскости и плоскостей двух пересекающихся граней лежит на

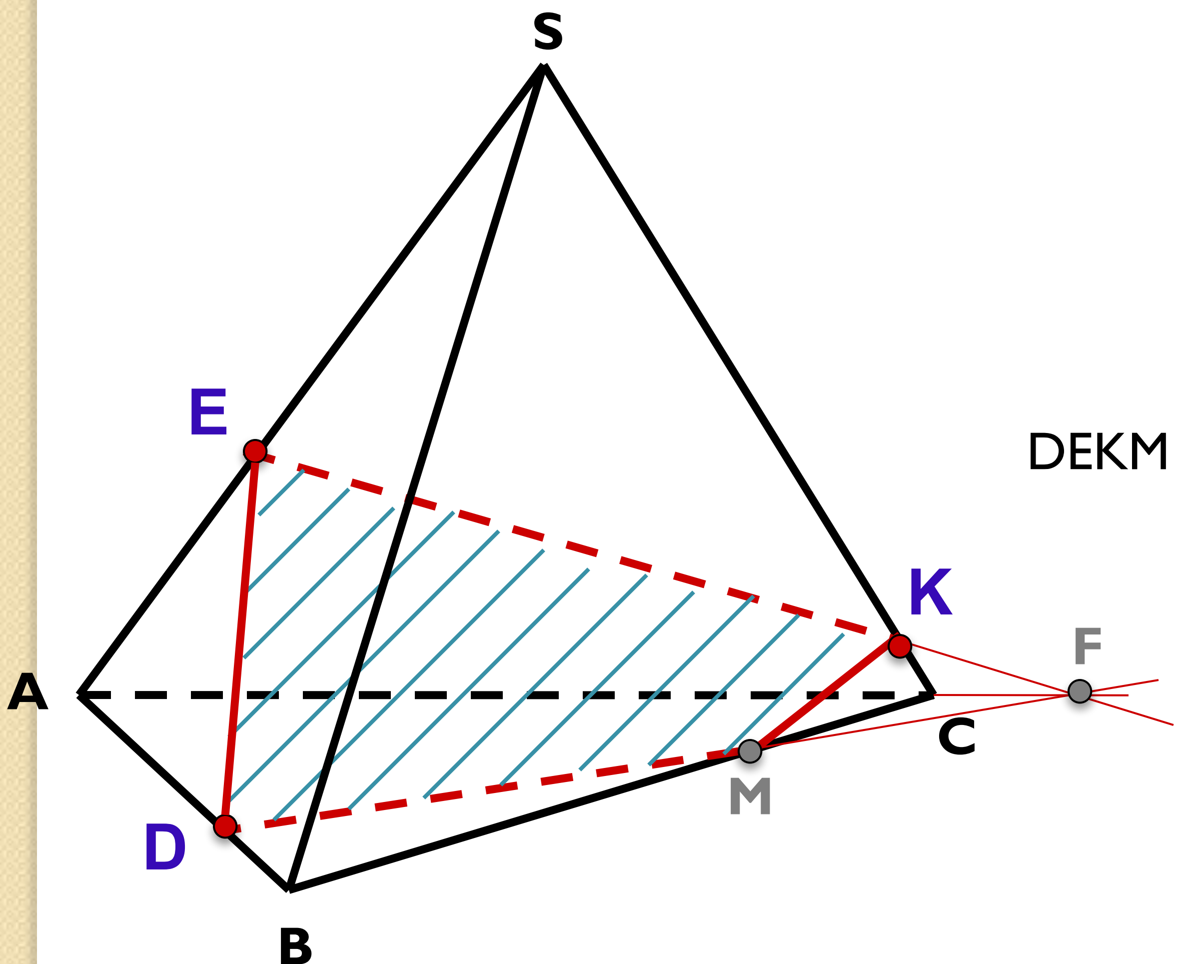
прямой, содержащей общее ребро граней

Теоретические основы:

Если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает и линию пересечения плоскостей



Задача 1. Построить сечение плоскостью, проходящей через данные точки D, E, K.

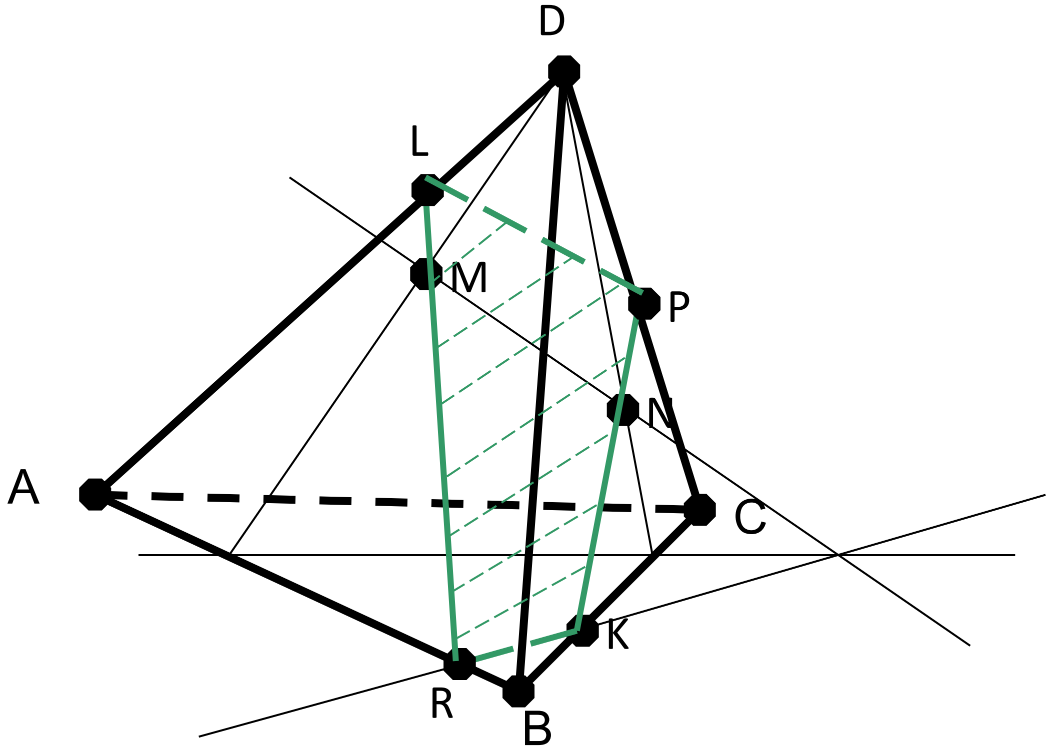


Построение:

1. DE
2. ЕК
3. ЕК ∩ AC = F
4. FD
5. FD ∩ BC = M
6. KM

DEKM – искомое сечение

Задача 2. Постройте сечение тетраэдра ДАВС плоскостью, проходящей через точки К є ВС , М є АДВ, N є ВДС.



Решение

1. $M \to M_1$, $N \to N_1$
2. $X = NM \cap N_1 M_1$
3. $R = KX \cap AB$
4. $RL = \alpha \cap АВД$, M є RL
5. $KP = \alpha \cap ВДС$, N є KP
6. $LP = \alpha \cap АДС$
7. RLPK - искомое сечение

Спасибо за внимание!