

## Бифуркации и структурная устойчивость

Наблюдая за эволюцией живой и неживой природы, мы можем подметить одно интересное свойство: развитие той или иной сложной системы всегда сопровождается потерей устойчивости одними режимами ее функционирования и рождением новых, устойчивых. Одни формации (структуры) гибнут, рождаются новые, которые видоизменяются, совершенствуются и затем вновь уступают место новым. Изменения могут накапливаться плавно, а могут происходить скачком в виде катастроф. Формирование новых структур всегда сопровождается потерей устойчивости (даже разрушением) предшествующих. И здесь скрыта важная проблема: проблема перехода системы из одного режима функционирования в другой, отличающийся принципиально от первоначального. Предшествующий режим потерял устойчивость, но что при этом может произойти? Система выбирает новый устойчивый режим, который может наследовать некоторые свойства предыдущего, а может быть и резко отличным. В таких случаях говорят о *бифуркациях динамических систем*.

Потеря устойчивости одного состояния системы (или режима функционирования) при изменении некоторых ее параметров (называемых управляющими) и переход ее в другое, отличное от первого состояния, называется *бифуркацией* (от слова «раздвоение»). Значение параметра системы, при котором она происходит, называется *точкой бифуркации*.

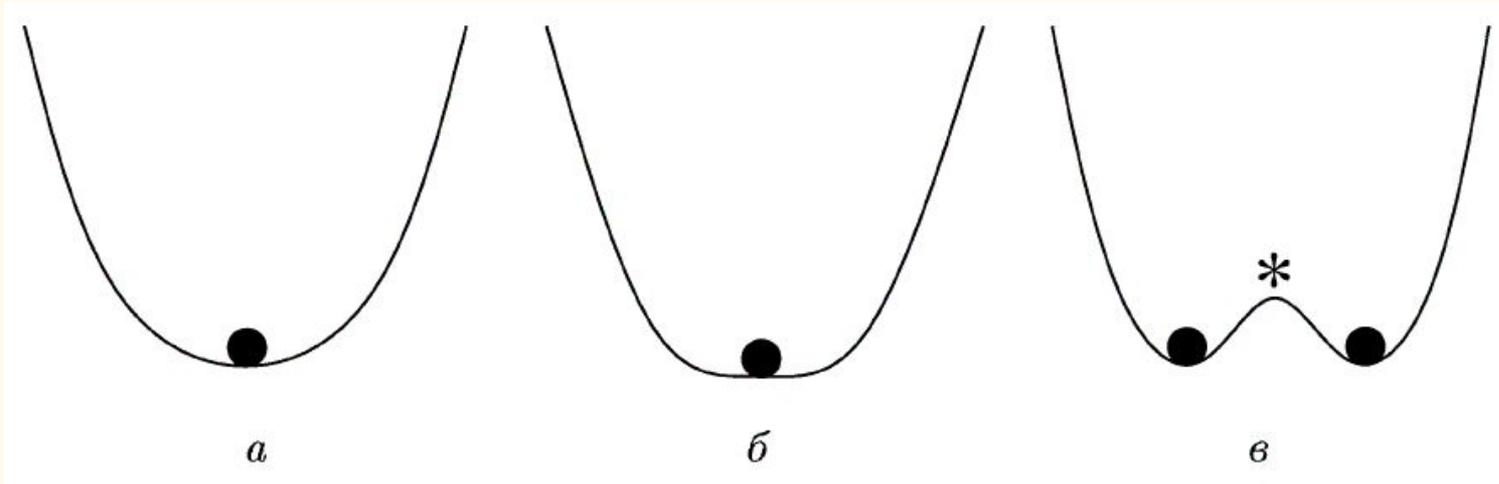
С точки зрения фазового пространства бифуркация соответствует всякой качественной топологической перестройке фазового портрета системы при изменении ее управляющих параметров.

Если один фазовый портрет может быть получен из другого с помощью некоторой непрерывной и взаимно однозначной замены координат, то они являются *топологически эквивалентными*.

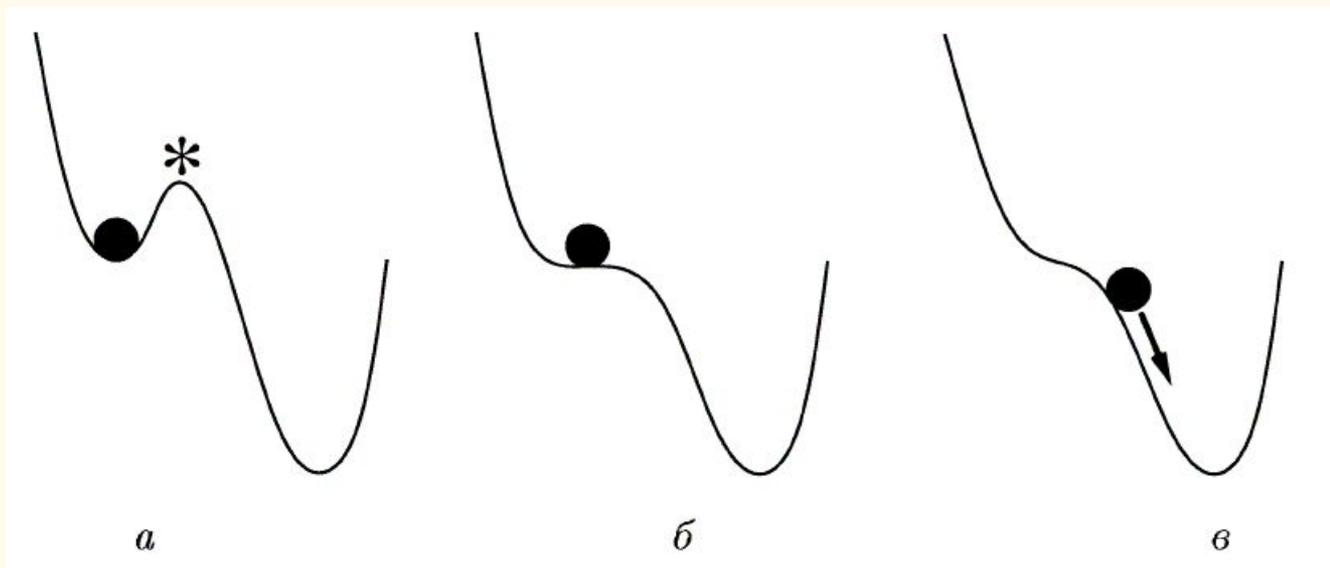
Динамическая система называется *грубой*, или *структурно устойчивой*, если ее малые возмущения приводят к топологически эквивалентным решениям. Для грубых систем переход через точку бифуркации означает смену одного структурно устойчивого режима на другой. При этом в точке бифуркации система не является грубой: малое изменение параметра в ту или иную сторону приводит к резким изменениям состояния. Другими словами, точке бифуркации отвечает структурно неустойчивый режим.

Задачей *бифуркационного анализа* является выяснение разбиения пространства параметров изучаемой системы на области различных структурно устойчивых режимов.

## «Мягкие» и «жесткие» бифуркации



Пусть при некотором начальном значении параметра мы имеем исходное устойчивое состояние системы. Затем, при некотором изменении управляющего параметра системы стационарное состояние теряет свою устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся состояния расположены в непосредственной близости от исходного состояния, которое потеряло устойчивость (звездочка). Бифуркации такого типа называются *мягкими*, имея в виду то, что вновь родившийся режим функционирования системы как бы появляется из режима, потерявшего устойчивость, и сосуществует рядом с ним.



Пусть при  $a < a^*$  шарик находится в устойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, неустойчивое состояние (звездочка).

В точке бифуркации  $a = a^*$  устойчивое и неустойчивое состояния сливаются в одно. Далее они исчезают и система выбирает новый режим, который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима.

Такой тип бифуркаций называют *жестким*, или *катастрофой*.

# Бифуркации неподвижных точек одномерных отображений

Для одномерных отображений существует 2 способа изменения устойчивости неподвижной точки, когда мультипликатор точки  $\rho = +1$  и  $\rho = -1$ . Однако число связанных с этим бифуркаций заметно больше. Это объясняется тем, что в них часто участвует более одной неподвижной точки. Такой ситуации соответствуют 4 варианта бифуркаций.

## 1. Касательная бифуркация (или «седло-узловая», или катастрофа складки).

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = \mu + x_n + x_n^2. \quad (34)$$

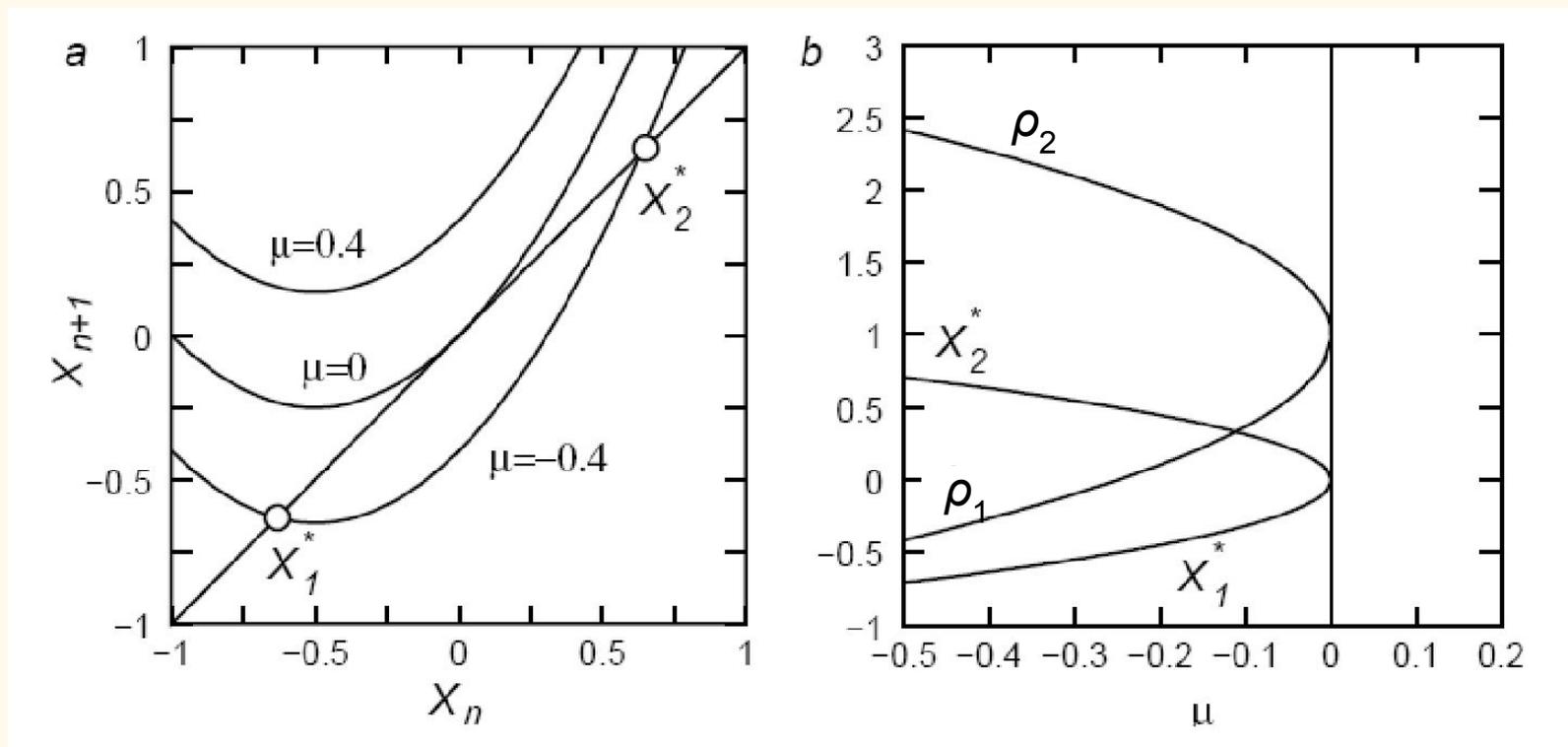
При отрицательном  $\mu$  оно имеет две неподвижные точки:

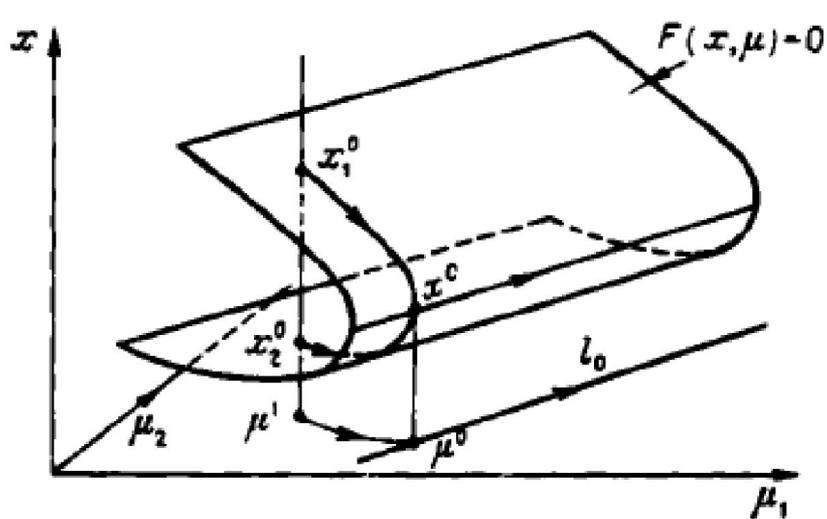
$$x_1^* = -\sqrt{-\mu}, \quad x_2^* = +\sqrt{-\mu}.$$

Если провести анализ на устойчивость, то получим, что 1-я точка - устойчива, а 2-я – неустойчива.

Будем теперь увеличивать параметр  $\mu$ , следя за положением неподвижных точек, а также за их мультипликаторами, которые определяются как  $\rho_{1,2} = f'(x_{1,2}^*)$ .

При увеличении  $\mu$  обе неподвижные точки сближаются, вплоть до слияния при  $\mu = 0$ . В то же самое время соответствующие им мультипликаторы стремятся к 1, одно – справа, а другое – слева. В момент достижения равенства  $\rho_{1,2} = +1.0$  обе неподвижные точки сливаются и исчезают. При  $\mu > 0$  неподвижных точек отображения (34) нет.





Другое название касательной бифуркации – «складка». Это становится понятным, если посмотреть на график для неподвижных точек, который напоминает складку с вершиной в точке  $\mu = 0$ . Если рассмотреть двухпараметрическую систему, то в фазопараметрическом пространстве этой бифуркации соответствует поверхность, имеющая особенность типа *складки* вдоль линии  $l_0$  на плоскости параметров.

Еще одно название такой бифуркации – «седло-узловая» - пришло из рассмотрения двумерных динамических систем, в связи с тем, что бифуркация соответствует слиянию устойчивого узла с седлом.

Таким образом, в касательной бифуркации участвуют 2 неподвижные точки, устойчивая и неустойчивая. Одновременное достижение их мультипликаторами граничной величины  $\rho = +1$  соответствует их слиянию и исчезновению.

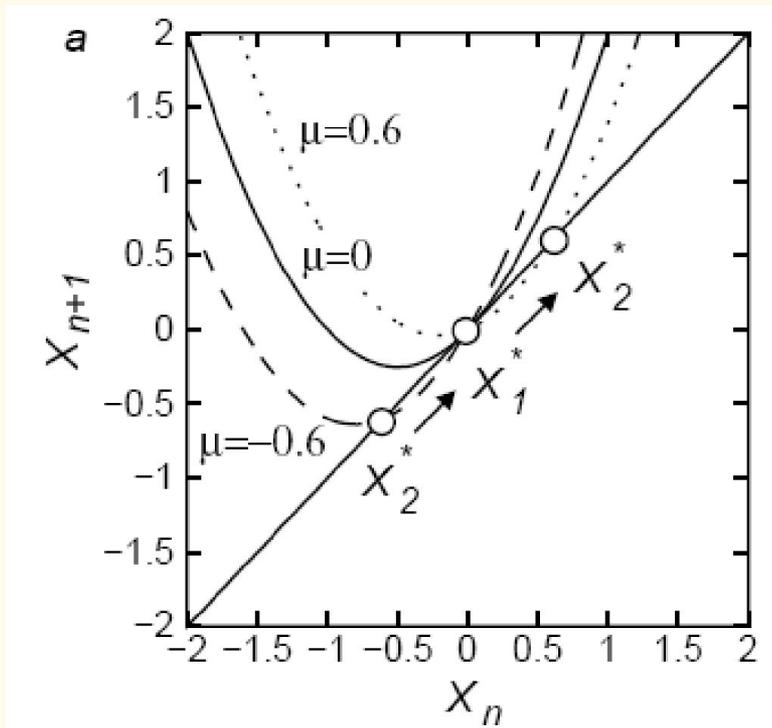
## 2. Транскритическая бифуркация.

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = (1 - \mu)x_n + x_n^2. \quad (35)$$

При всех  $\mu$ , кроме  $\mu = 0$ , оно имеет две неподвижные точки

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \mu.$$



Из графика видно, что по мере увеличения параметра точка  $x_2^*$  сближается с  $x_1^*$ , «проходит сквозь нее» и затем удаляется. При этом в точке  $\mu = 0$  неподвижные точки «обмениваются» устойчивостью: если при  $\mu \leq 0$  точка  $x_2^*$  — устойчива, а  $x_1^*$  — нет, то при  $\mu \geq 0$  — наоборот! Именно эта характерная особенность и определила название бифуркации.

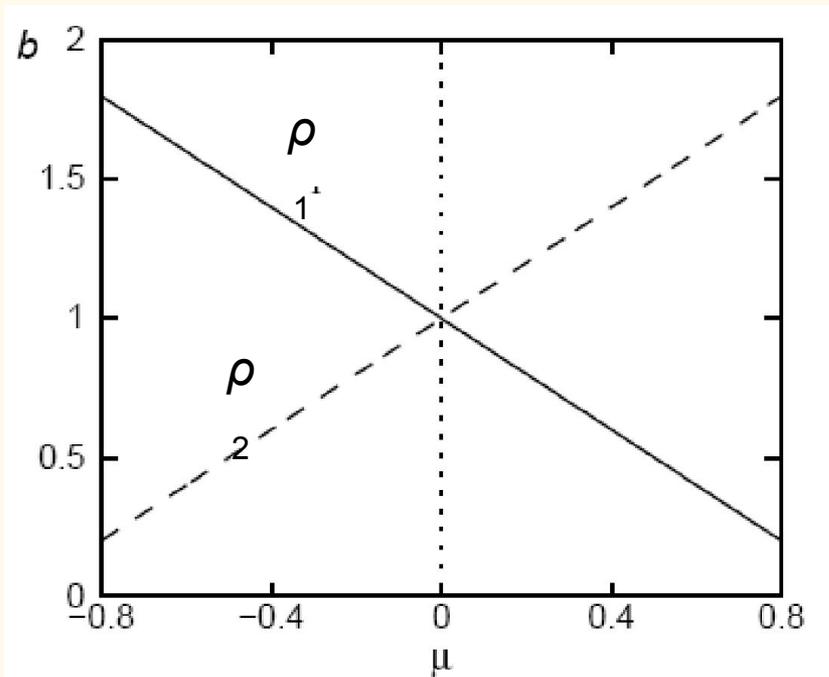
График для собственных значений неподвижных точек можно построить из (35), вычислив производную и подставив туда значения неподвижных точек.

Получаем:

$$f'(x_n) = 1 - \mu + 2x,$$

$$x_1^* = 0 : \rho_1 = 1 - \mu,$$

$$x_2^* = \mu : \rho_2 = 1 + \mu.$$



Обе прямые пересекаются в точке транскритической бифуркации  $\mu = 0$  и  $\rho_{1,2} = +1$ .

### 3. Виллообразная бифуркация (pitchfork) или бифуркация потери симметрии наблюдается в системе с симметрией.

Рассмотрим отображение вида  $x_{n+1} = (\mu + 1)x_n - x_n^3$ . (36)

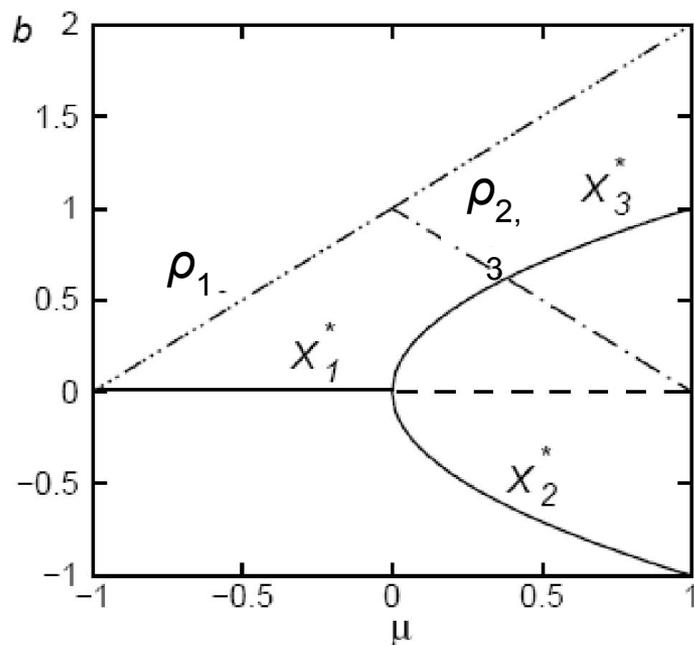
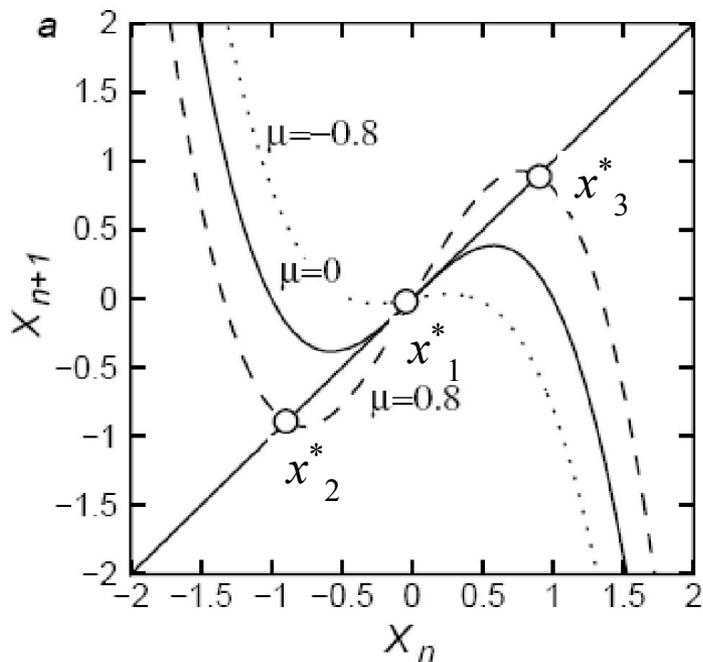
График функции симметричен относительно замены  $x_n \rightarrow -x_n$ .

При  $\mu < 0$  имеется единственная неподвижная точка  $x_1^* = 0$ . При  $\mu > 0$  появляются еще две точки:  $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\mu}$ .

Собственные значения неподвижных точек есть:  $\rho_1 = 1 + \mu$ ,  $\rho_{2,3} = 1 - 2\mu$ .

Если  $-2 < \mu < 0$ , то  $x_1^*$  – устойчива. Если  $\mu = 0$ , то от нее «отщепляются» устойчивые  $x_2^*$  и  $x_3^*$ , сама же  $x_1^*$  теряет устойчивость.

при  $\mu = 0$



Бифуркационная диаграмма для отображения (36) напоминает вилы, откуда и следует название рассматриваемой бифуркации.

Данный вариант вилообразной бифуркации является **суперкритическим**, т.к. новые неподвижные точки рождаются в момент бифуркации и существуют далее.

Существует другой вариант этой бифуркации. Замена знака перед кубическим членом в отображении (36) дает новое отображение

$$x_{n+1} = (\mu + 1)x_n + x_n^3.$$

Оно имеет 3 неподвижные точки при  $\mu < 0$  и одну  $x_1^* = 0$  при  $\mu > 0$ .

При  $\mu < 0$   $x_1^* = 0$  является устойчивой, а две точки  $x_2^*$  и  $x_3^*$  - неустойчивые.

При  $\mu = 0$  точка  $x_1^*$  также претерпевает бифуркацию и теряет устойчивость.

Однако общая картина эволюции состояний равновесия иная.

При увеличении  $\mu$  два неустойчивых состояния равновесия «влипают» в устойчивую точку  $x_1^*$  и исчезают, а сама  $x_1^*$  теряет устойчивость.

Данный вариант – **субкритическая бифуркация**, т.к. к моменту бифуркации пара неустойчивых неподвижных точек исчезает.

**4. Бифуркация удвоения** соответствует второй границе зоны устойчивости неподвижной точки, когда  $\rho = -1$ . **Суперкритический** вариант этой бифуркации получил широкую известность благодаря той роли, которую она играет при возникновении хаотического аттрактора по сценарию Фейгенбаума.

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = \mu - x_n - x_n^2. \quad (37)$$

Его неподвижные точки:

$$x_{1,2}^* = -2 \pm \sqrt{4 + 4\mu} / 2 = -1 \pm \sqrt{\mu + 1}.$$

Будем следить за точкой  $x_1^*$  и эволюцией ее собственного значения, которое можно вычислить следующим образом:

$$\rho_1 = -(2x_1^* + 1) = -1 + 2 - 2\sqrt{\mu + 1} = 1 - 2\sqrt{\mu + 1}.$$

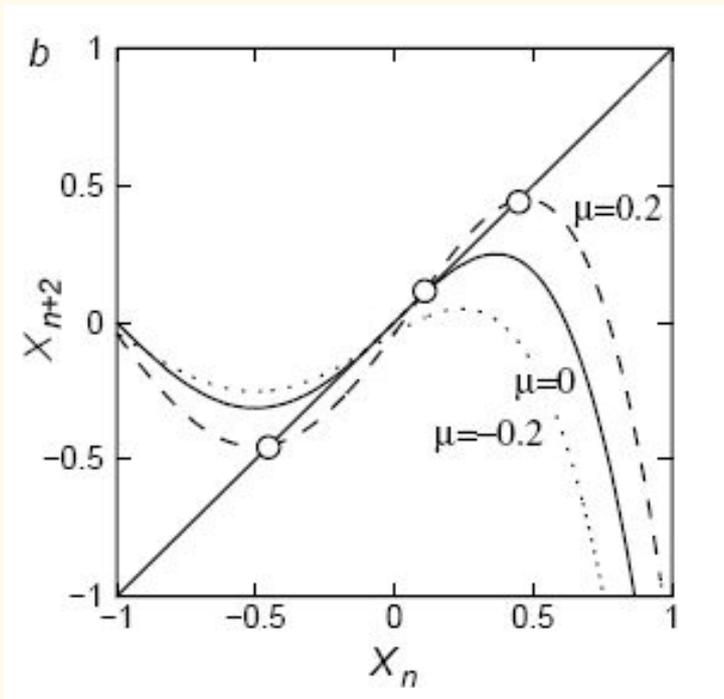
При  $-1 < \mu < 0$   $\rho_1 < 1$  и неподвижная точка  $x_1^*$  устойчива. В точке  $\mu = -3/4$   $\rho_1 = 0$ . Это означает, что при переходе  $\mu$  через это значение характер сходимости меняется от монотонного при  $-1 < \mu < -3/4$  к знакопеременному при  $\mu > -3/4$ .

При  $\mu = 0$   $\rho_1 = -1$ . Этот случай соответствует потере устойчивости неподвижной точкой. Траектория начинает расходиться, причем отклонение меняет свой знак на каждой итерации. Если бы отображение (37) было линейным, то это было бы единственным событием. Однако наличие нелинейности обогащает картину бифуркации.

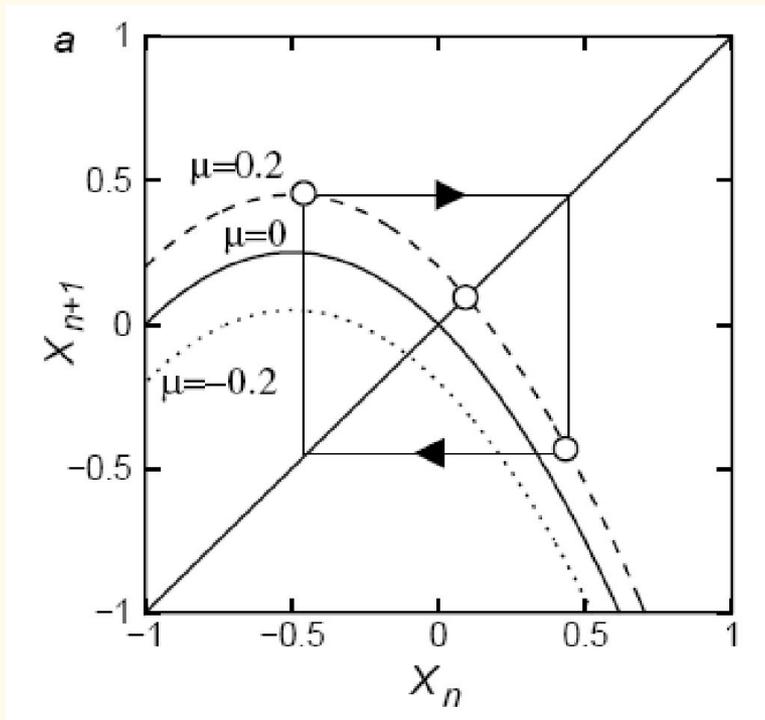
Рассмотрим дважды примененное отображение (37):

$$x_{n+2} = \mu - (\mu - x_n - x_n^2) - (\mu - x_n - x_n^2)^2. \quad (38)$$

Определенные выше неподвижные точки отображения (37) будут таковыми и для отображения (38), при этом траектория в их окрестности уже не осциллирует. Однако расчет собственного значения  $\rho$  для (38) в точке  $\mu = 0$  дает значение  $+1$ !



Таким образом, в дважды примененном отображении (37) критической ситуации  $\rho_1 = -1$  соответствует совсем другое событие,  $\rho_{1,2} = +1$ . В данном случае при  $\mu = 0$  для отображения (38) имеет место суперкритическая вилообразная бифуркация. Точка  $x_1^*$  теряет устойчивость, однако в ее окрестности рождаются две новые устойчивые неподвижные точки.



Функция последования отображения (37) качественно не меняется в момент бифуркации  $\mu = 0$ , но неподвижная точка теряет устойчивость и при  $\mu > 0$  возникает замкнутая траектория из двух неподвижных точек.

С точки зрения исходного отображения (37) обе родившиеся точки принадлежат одной и той же траектории – циклу периода 2, т.е. отвечают условию  $x_{n+2} = x_n$ .

Таким образом, потеря устойчивости точкой  $x_1^*$  при  $\mu = 0$  приводит к рождению устойчивого цикла удвоенного периода. По этому признаку данный случай получил название «**бифуркация удвоения**».

## Субкритическая бифуркация удвоения.

Отметим, что условие  $\rho_1 = -1$  описывает локальную динамику системы (37) в точке  $x_1^*$ , тогда как наличие и устойчивость цикла удвоенного периода определяются свойствами отображения в некоторой окрестности  $x_1^*$ . Другой вид нелинейности может привести к иному сценарию развития бифуркации. Например, отображение вида

$$x_{n+1} = -x_n(1 + \mu) - 2x_n^3 \quad (39)$$

имеет неподвижную точку  $x_1^* = 0$ , которая также претерпевает бифуркацию удвоения при  $\mu = 0$ , так как

$$\rho_1 = -(1 + \mu) - 6(x_1^*)^2 = -\mu - 1.$$

Однако дважды примененное отображение в этом случае претерпевает не суперкритическую, а субкритическую вилообразную бифуркацию. Это означает, что в отображении (39) до точки бифуркации при  $\mu < 0$  существует *неустойчивый* цикл периода 2, который «влипает» в  $x_1^*$  в момент бифуркации удвоения при  $\mu = 0$ . Далее траектория уходит от потерявшей устойчивость точки  $x_1^*$  в бесконечность.

## Бифуркации неподвижных точек двумерных отображений

В силу своей большей размерности двумерное отображение обладает более богатым выбором возможных бифуркаций, нежели одномерное. Однако значительная часть этих бифуркаций имеет ту же природу.

В случае действительных собственных чисел (мультипликаторов)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  двумерное отображение в окрестности неподвижной точки (20) может быть представлено в виде двух независимых линейных отображений

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= a\xi_n + b\eta_n, \\ \eta_{n+1} &= c\xi_n + d\eta_n \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u_{n+1} &= \rho_1 u_n, \\ v_{n+1} &= \rho_2 v_n. \end{aligned}$$

Здесь используется обратимая замена координат, переводящая уравнения в вариациях (20) в форму проекций на собственные векторы  $u$  и  $v$ .

Это означает, что все типы бифуркаций одномерных отображений, рассмотренные ранее, применимы к случаю, когда одно из собственных чисел пересекает значение  $\pm 1$ . Однако картина каждой из бифуркаций для систем большей размерности дополняется еще одним направлением, устойчивым либо неустойчивым, в зависимости от значения второго собственного числа.

Рассмотрим ситуацию, когда значения мультипликаторов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  зависят от двух управляющих параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. В этом случае достижение действительными  $\rho_1$  и  $\rho_2$  бифуркационных значений *одновременно* означает выполнение двух бифуркационных условий, которым соответствуют значения параметров  $\mu_1^*$  и  $\mu_2^*$ . Говорят, что такая бифуркация имеет **коразмерность 2**.

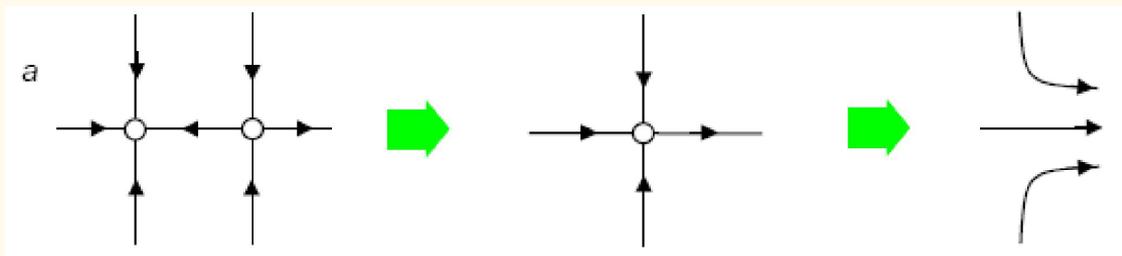
**Коразмерность бифуркации** равна числу независимых событий, необходимых для ее реализации. Очевидно, что чем больше условий требуется выполнить, тем менее часто такая ситуация встречается в пространстве параметров. Вместо понятия «коразмерность» используют понятие «степень вырожденности».

Для двумерных отображений возможна также ситуация, когда одновременное достижение собственными числами бифуркационного значения управляется одним параметром. Это происходит в случае комплексно сопряженных  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Такая бифуркация не имеет аналога для одномерного отображения. Ее коразмерность равна 1.

## Случай действительных $\rho_1$ и $\rho_2$ .

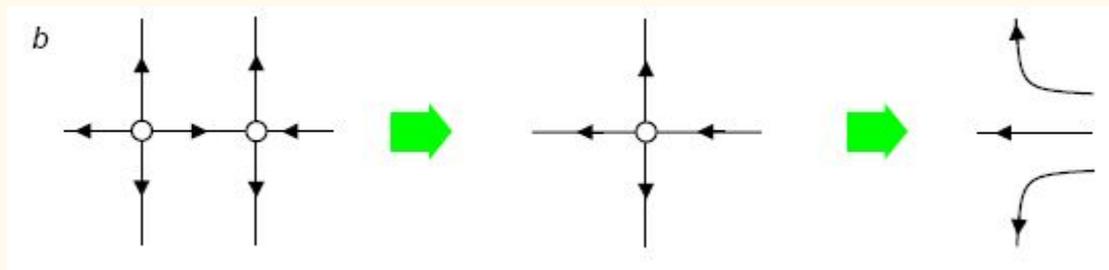
Рассмотрим варианты бифуркаций неподвижной точки коразмерности 1 для двумерного отображения. В зависимости от устойчивости по второму направлению, каждая из бифуркаций может иметь две формы.

### 1. Седло-узловая бифуркация.



$$\rho_1 = +1, \rho_2 < +1$$

Слияние седла и устойчивого узла в биф. точке приводит к образованию вырожденной особой точки – **седло-узел**

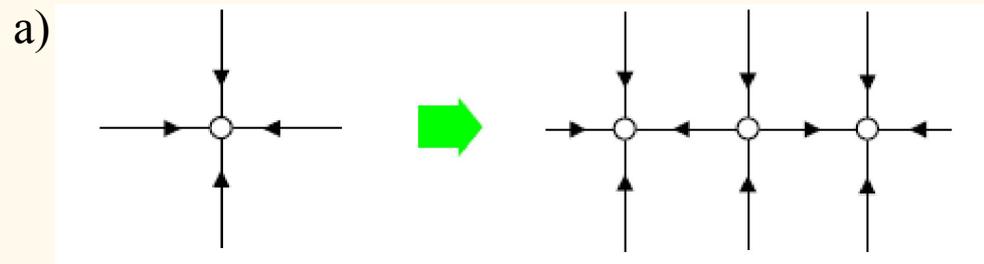


$$\rho_1 = +1, \rho_2 > +1$$

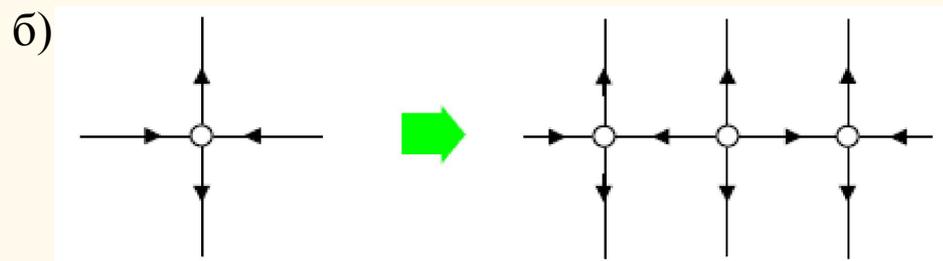
Слияние седла и неустойчивого узла

Заметим, что у седловой точки в случае а) в бифуркации участвует неустойчивое многообразие, в случае б) – устойчивое.

## 2. Вилообразная бифуркация.



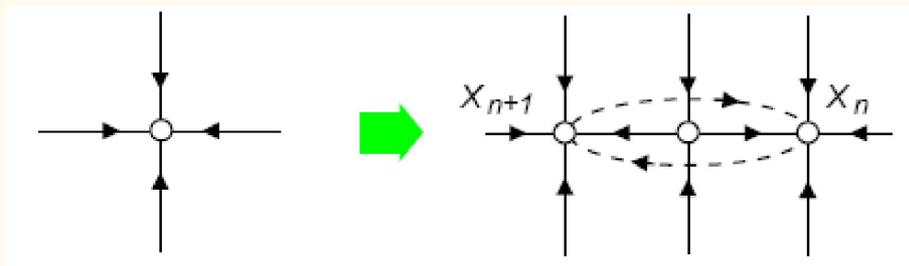
Исходное состояние равновесия устойчиво, в результате бифуркации рождается пара устойчивых точек.



Исходное состояние равновесия – седло и в результате бифуркации рождается пара седловых точек.

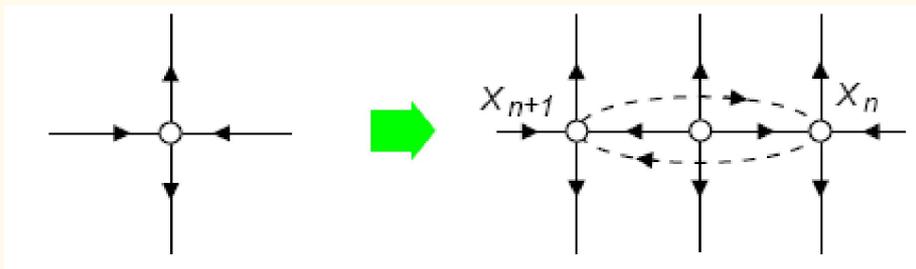
### 3. Бифуркация удвоения.

а)



Бифуркация удвоения превращает устойчивую неподвижную точку в седловую.

б)



В результате бифуркации удвоения седловая точка превращается в неустойчивый узел.

**Пример. *Отображение Эно (Непон тар)***

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}\tag{40}$$

$x$ ,  $y$  – динамические переменные,  $\mu$  и  $b$  – параметры отображения.

Найдем неподвижные точки отображения и проведем их анализ на устойчивость. Неподвижные точки находятся из условия

$$\begin{aligned}x^* &= 1 - \mu x^{*2} + y^*, \\ y^* &= bx^*,\end{aligned}\tag{41}$$

что дает два решения:

$$\begin{aligned}P^1 : \quad x^* &= (-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4\mu}) / 2\mu, \quad y^* = bx^*, \\ P_2 : \quad x^* &= (-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4\mu}) / 2\mu, \quad y^* = bx^*.\end{aligned}$$

Уравнение (41) имеет действительные корни при  $\mu > -(1-b)^2/4$ . Соответственно при этих значениях  $\mu$  существуют 2 различные неподвижные точки отображения,  $P^1$  и  $P^2$ .

Уравнение в вариациях для малых отклонений  $\xi$  и  $\eta$  от состояния равновесия в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\mu x^* & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Собственные числа  $\rho_1$  и  $\rho_2$  находятся из решения характеристического уравнения

$$\begin{bmatrix} -2\mu x^* - \rho & 1 \\ b & -\rho \end{bmatrix} = 0, \quad (43)$$

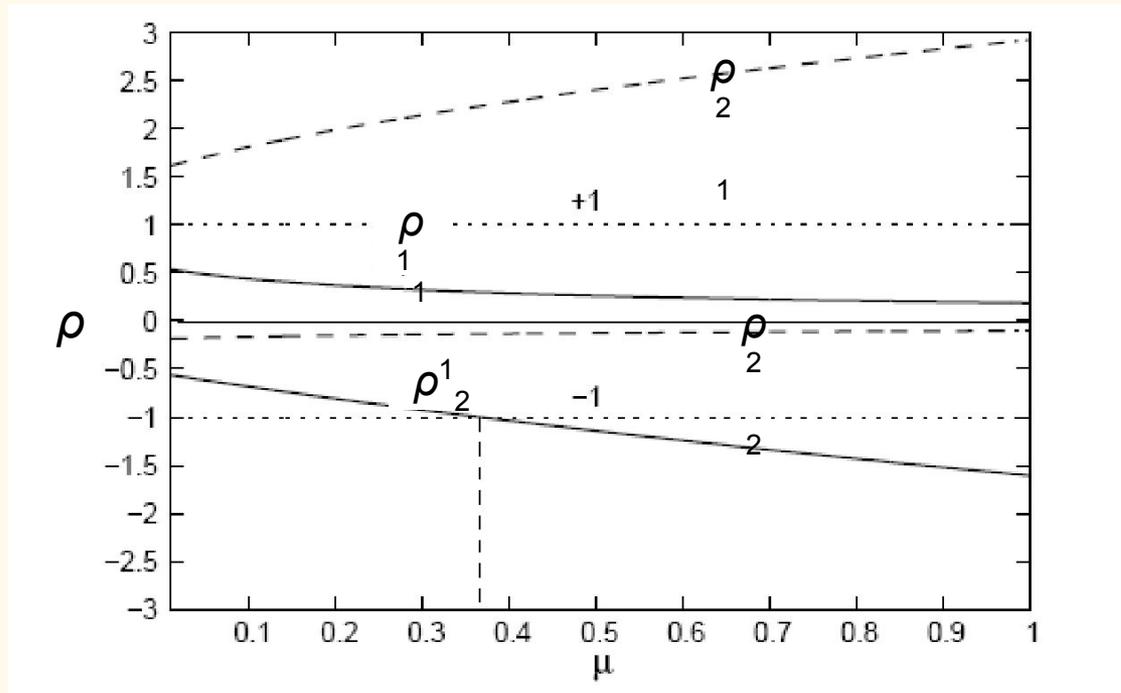
что дает

$$\rho_{1,2} = -\mu x^* \pm \sqrt{\mu x^{*2} + b}$$

для каждой из 2-х неподвижных точек.

Проанализируем характер устойчивости неподвижных точек в зависимости от значения параметра  $\mu$ . Зафиксируем  $b = 0.3$ . При  $\mu \rightarrow 0$  неподвижные точки «разъезжаются» в бесконечность, при этом значения собственных чисел стремятся к  $\pm \sqrt{b}$  для  $P^1$  и  $\frac{1-b}{2} \pm \sqrt{b}$  для  $P^2$ .

## Зависимость собственных значений неподвижных точек отображения Эно от параметра $\mu$



Точка  $P^2$  является седлом при любых  $\mu$ . Одно из ее собственных значений положительно и больше 1, а другое – отрицательно и близко к 0. Это означает, что по первому направлению траектория монотонно расходится, а по другому направлению отклонение убывает, меняя знак на каждой итерации.

У точки  $P^1$  при  $\mu = 0.3675$  одно из собственных чисел достигает значения -1, что соответствует бифуркации удвоения и рождению цикла периода 2. По другому направлению точка всегда устойчива, т.к. собственное значение меньше 1.

## Случай комплексно сопряженных собственных чисел. Бифуркация Неймарка

Когда  $\rho_1$  и  $\rho_2$  комплексно сопряжены, то обратимой заменой переменных уравнения в вариациях (20) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha u_n - \beta v_n, \\ v_{n+1} &= \beta u_n + \alpha v_n. \end{aligned} \quad (44)$$

Если перейти к полярным координатам  $u_n = a_n \cos \Theta_n$ ,  $v_n = a_n \sin \Theta_n$  и выразить  $\rho_1$  и  $\rho_2$  в экспоненциальной форме:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha + i\beta = re^{i\Phi}, & \rho_2 &= \alpha - i\beta = re^{-i\Phi}, \\ \alpha &= r \cos \Phi, & \beta &= r \sin \Phi, \end{aligned}$$

то отображение (44) может быть сведено к двум независимым отображениям: **для радиуса  $a$**  ( $a$  описывает эволюцию расстояния возмущенной траектории от неподвижной точки) и **для угла поворота  $\Theta$**  (вариация  $\Theta$  соответствует вращению вокруг неподвижной точки) :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n r, \\ \Theta_{n+1} &= \Theta_n + \Phi. \end{aligned} \quad (45)$$

Учтем в самом общем виде наличие нелинейности, введя кубический член в отображение для  $a$ :

$$a_{n+1} = r(a_n + \alpha a_n^3).$$

Тогда при вариации  $r$ , в зависимости от знака  $\square$ , возможны два случая.

### Случай 1. $\alpha < 0$ .

При  $r < 1$  отображение, как и в линейном случае, сходится к точке  $a^0 = 0$ . При  $r > 1$  точка  $a^0$  становится неустойчивой, однако появляется новая устойчивая точка  $a^1$ . Согласно исходному двумерному отображению это означает, что потеря устойчивости неподвижной точкой не ведет к убеганию траектории в бесконечность, но сопровождается появлением новой устойчивой траектории, характеризуемой радиусом  $a = a^1 = \sqrt{(1-r)/r\alpha}$  и той же угловой скоростью вращения  $\Phi$  вокруг потерявшей устойчивость неподвижной точки в нуле.

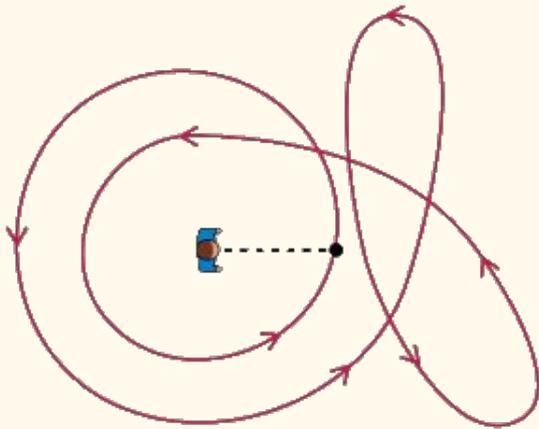
Данный случай описывает **суперкритическую бифуркацию Неймарка**, когда из потерявшей устойчивость неподвижной точки рождается устойчивая замкнутая траектория.

### Случай 2. $\alpha > 0$ .

При  $r < 1$  существуют две неподвижные точки, т.е. в то время как неподвижная точка  $a^0 = 0$  устойчива, имеется также неустойчивая точка  $a^1$ , которой соответствует *неустойчивая* замкнутая траектория. При достижении значения  $r = 1$  неустойчивая траектория «влипает» в  $a^0$ , при этом последняя теряет устойчивость.

Случай 2 соответствует **субкритической бифуркации Неймарка**, когда неустойчивая замкнутая кривая стягивается к устойчивой неподвижной точке, в результате чего последняя теряет устойчивость.

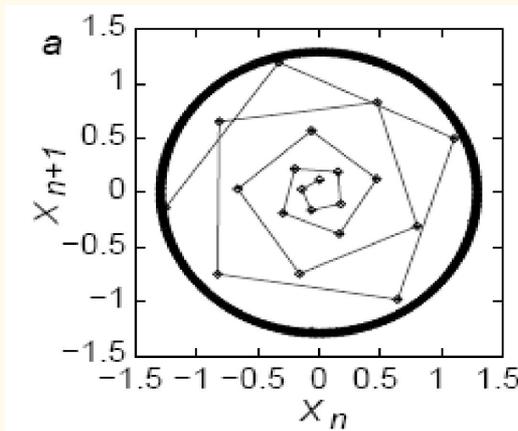
Мы обсудили роль изменения модуля отклонения  $a$  от состояния равновесия. Однако величина приращения угла  $\Theta$  при каждой итерации также существенна. Введем в рассмотрение **число вращения**:



**Определение.** Число вращения замкнутой кривой на плоскости относительно заданной точки - это целое число, представляющее общее число оборотов, которое совершает кривая вокруг точки против часовой стрелки.

$$\psi = \Phi / 2\pi, \text{ mod } 1. \quad (46)$$

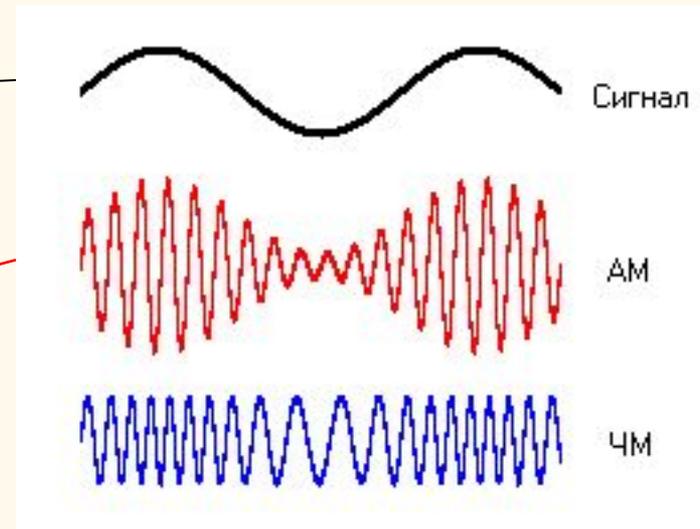
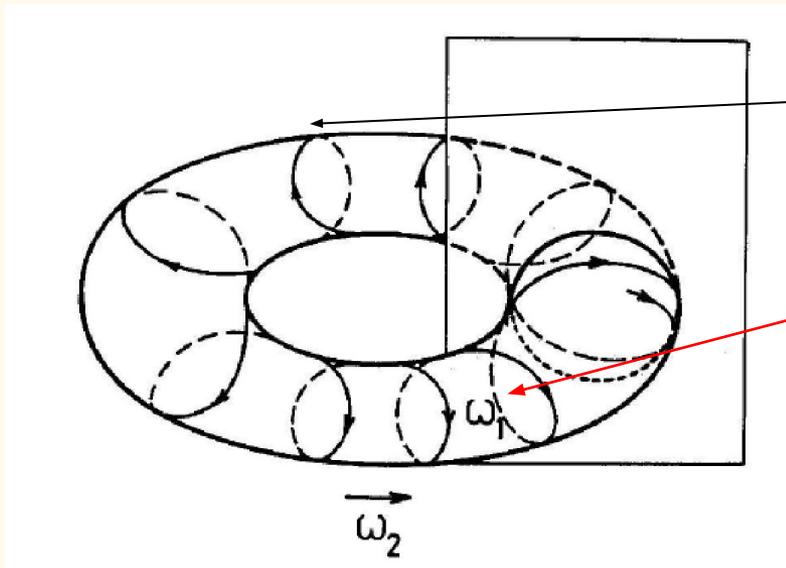
Операция  $\text{mod } 1$  означает, что величина  $\psi$  принадлежит интервалу  $[0, 1]$ . Изменение величины  $\psi$  от 0 до 1 можно трактовать как полный круг вращения радиус-вектора по окружности.



$$\psi = \sqrt{2}$$

1) Если  $\psi$  - иррационально, точки отображения со временем плотно заполняют появившуюся замкнутую инвариантную кривую.

Если рассматривать неподвижную точку двумерного отображения как сечение Пуанкаре предельного цикла трехмерной динамической системы с непрерывным временем, то устойчивая замкнутая кривая, появившаяся в результате бифуркации Неймарка в двумерном отображении, есть сечение Пуанкаре двумерного тора в соответствующей ДС с непрерывным временем. Данный режим отвечает биениям или автомодуляции (или двухчастотным колебаниям) в ДС.



**Модуляция** [лат. modulatio мерность, размерность] — процесс изменения одного или нескольких параметров высокочастотного модулируемого колебания под воздействием относительно низкочастотного управляющего модулирующего **сигнала** [лат. modulatio мерность, размерность] — процесс изменения одного или нескольких параметров высокочастотного модулируемого колебания под воздействием относительно низкочастотного управляющего модулирующего сигнала. В результате **спектр** [лат. modulatio мерность, размерность] — процесс изменения одного или нескольких параметров высокочастотного модулируемого колебания под воздействием относительно низкочастотного управляющего модулирующего сигнала. В результате спектр управляющего сигнала переносится в область высоких частот, где передача электромагнитных сигналов посредством излучения более эффективна. Передаваемая информация заложена в управляющем сигнале. Роль переносчика информации выполняет высокочастотное колебание, называемое **несущим** [лат. modulatio мерность, размерность] — процесс изменения одного или нескольких параметров высокочастотного модулируемого колебания под воздействием относительно низкочастотного управляющего модулирующего сигнала. В результате спектр управляющего сигнала переносится в область

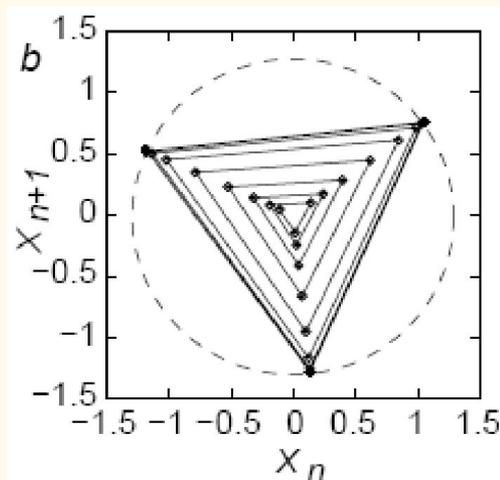
## Случаи резонансов

2) Если  $\psi$  принимает *рациональные* значения (т.е. возможно его представление в виде  $p/q$ , где  $p$  и  $q$  – целые числа), то говорят, что имеет место *резонанс  $p : q$*  (или *резонанс порядка  $q$* ), так как через  $q$  итераций траектория замкнется. **Резонанс называется сильным**, если  $q \leq 4$ .

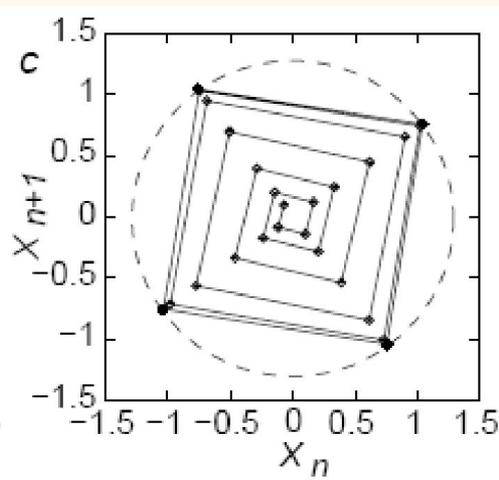
В случае **сильных резонансов**, при  $\psi = 1/2, 1/3, 1/4$  точка отображается сама в себя через 2, 3 или 4 итерации, соответственно.

Например, в случае резонанса  $\psi = 1/3$ , вместо окружности будет только 3 точки. За одну итерацию радиус-вектор повернется на угол  $2\pi/3$  и полный оборот ( $2\pi$ ) траектория сделает за 3 итерации.

$$\psi = 1/3$$

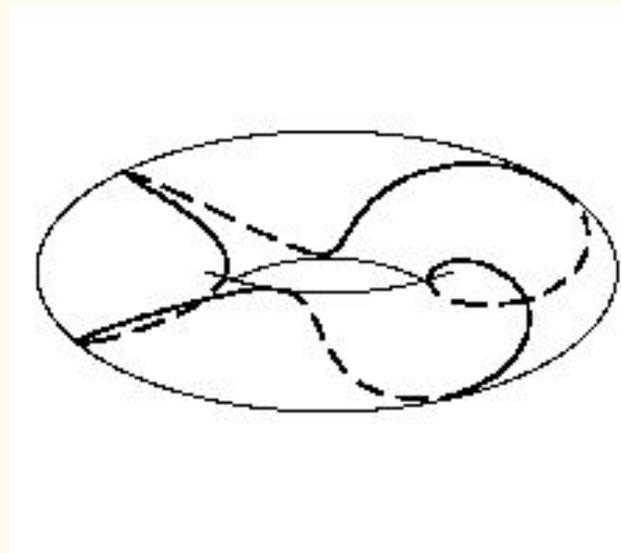


$$\psi = 1/4$$



В частности, если  $\psi = 0$ , то бифуркация Неймарка вырождается в касательную бифуркацию, а если  $\psi = 1/2$ , то ситуация эквивалента бифуркации удвоения.

**Резо́нанс** (фр. *resonance*, от лат. *resono* — откликаюсь) — явление резкого возрастания амплитуды — откликаюсь) — явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, которое наступает при приближении частоты внешнего воздействия к некоторым значениям (резонансным частотам), определяемым свойствами системы. При помощи явления резонанса можно выделить и/или усилить даже весьма слабые периодические колебания. Резонанс — явление, заключающееся в том, что при некоторой частоте вынуждающей силы колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этой силы.



Наиболее простым и иллюстративным примером механической резонансной системы являются обычные [качели](#). Если вы будете подталкивать качели в соответствии с их резонансной частотой, размах движения будет увеличиваться, в противном случае движения будут затухать.

Резонансные явления могут вызвать необратимые разрушения в различных механических системах, например, неправильно спроектированных [мостах](#).

Резонанс — один из важнейших физических процессов, используемых при проектировании звуковых устройств, большинство из которых содержат [резонаторы](#) Резонанс — один из важнейших физических процессов, используемых при проектировании звуковых устройств, большинство из которых содержат резонаторы, например, струны и корпус [скрипки](#) Резонанс — один из важнейших физических процессов, используемых при проектировании звуковых устройств, большинство из которых содержат резонаторы, например, струны и корпус скрипки, трубка у [флейты](#) Резонанс — один из важнейших физических процессов, используемых при проектировании звуковых устройств, большинство из которых содержат резонаторы, например, струны и корпус скрипки, трубка у флейты, мембрана у [барабанов](#).

## **Струна**

Струны таких инструментов, как [лютня](#) Струны таких инструментов, как лютня, [гитара](#) Струны таких инструментов, как лютня, гитара, скрипка или [пианино](#), имеют основную резонансную частоту, напрямую зависящую от длины и силы натяжения струны.

## Пример. Логистическое отображение с задержкой

Ряд задач из биологии и экологии может быть в пределе упрощения сведен к одномерному отображению вида

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_{n-1}).$$

Это отображение перепишем в форме двумерного, положив  $x_{n+1} = y_n$ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= \mu y_n(1 - x_n). \end{aligned} \quad (47)$$

Помимо состояния равновесия  $P^0$  в нуле, отображение (47) имеет неподвижную точку  $P^1$  с координатами  $x = y = (\mu - 1)/\mu$ . При  $\mu = 2.0$  точка  $P^1$  теряет устойчивость через суперкритическую бифуркацию Неймарка. При этом число вращения оказывается равным  $1/6$ . Рис. 1.14 иллюстрирует изменение фазового портрета по мере роста  $\mu$ :

а –  $\mu = 1.2$   $P^1$  представляет собой устойчивый узел ( $0 < \rho_1 < 1.0$ );  
 б –  $\mu = 1.7$   $P^1$  имеет комплексно сопряженные  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , видно, как траектория сходится к  $P^1$  по спирали;

с –  $\mu = 1.9$ . По мере приближения к точке бифуркации, траектория скручивается к  $P^1$  все медленней. Хорошо видны шесть «образующих» траектории, так как  $\psi \approx 1/6$ ;

д –  $\mu = 2.1$ . Родившаяся инвариантная кривая плотно заполняется точками отображения, так как значение  $\psi$  на ней далеко от сильных резонансов. Хорошо видно, что в окрестности неустойчивой  $P^1$  число вращения  $\psi$  все еще близко к  $1/6$  (видны шесть образующих разбегающейся траектории).

