Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Элементы качественного анализа систем автономных дифференциальных уравнений..

Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением так называемых ***линейных систем***. Это системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \qquad (110)$$

где коэффициенты a_{ij} и f_i –некоторые функции независимой переменной x. Будем считать их непрерывными, тогда для данной системы заведомо выполняются условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Если все $f_i \equiv 0$, то система называется ***однородной***, в противном случае она называется ***неоднородной***. Система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \end{cases} \qquad (111)$$

называется ***однородной системой, соответствующей неоднородной системе*** (110).

При изучении линейных систем удобно использовать матричные обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

позволяющие записать систему (110) в виде одного матричного уравнения:

$$Y' = AY + F. \quad (111)$$

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2 - x^2, \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 + 3x^4. \end{cases}$$

в матричной записи выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 \\ 3x^4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим однородную линейную систему (111). В матричном виде она записывается следующим образом:

$$Y' = AY. \tag{121}$$

Если все элементы a_{ij} матрицы A постоянны, то для решения системы можно использовать методы линейной алгебры. Прежде всего, заметим, что однородная система имеет очевидное частное решение:

$$y_1(x) \equiv 0,\ \ldots,\ y_n(x) \equiv 0.$$

Это решение называется *тривиальным* (*нулевым*). Интерес представляют, конечно, нетривиальные решения. Будем искать такие решения в виде:

$$y_1 = p_1 e^{\lambda t}, \ldots, y_n = p_2 e^{\lambda t} \tag{122}$$

или, используя матричную запись, в виде:

$$Y = Pe^{\lambda t}, \tag{123}$$

где:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица (вектор) с постоянными элементами.

Имеем:

$$Y' = \lambda P e^{\lambda t}.$$

Подставляя выражения для Y и Y' в уравнение (121), получим:

$$\lambda P e^{\lambda t} = P e^{\lambda t},$$

откуда после сокращения на $e^{\lambda t}$, находим:

$$AP = \lambda P. \tag{124}$$

Это уравнение говорит о том, что λ является собственным значением матрицы A, а P – собственным вектором, соответствующим λ.

Определение. *Характеристическое уравнение матрицы* A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{125}$$

называется ***характеристическим уравнением*** *однородной линейной системы* (6.121) *с постоянными коэффициентами.*

Напомним читателю, что для нахождения собственного вектора P, соответствующего собственному значению λ. матрицы A, необходимо найти решение следующей алгебраической системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{126}$$

Так же, как и в случае линейных уравнений, имея корни характеристического уравнения, мы можем построить общее решение однородной системы. Для простоты изложения продемонстрируем это на примере систем двух уравнений с двумя неизвестными, т.е. систем вида.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{127}$$

Однако заметим, что полученные в этом случае результаты могут без труда быть перенесены на случай систем большего числа уравнений.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

системы (127) является алгебраическим уравнением второго порядка. При его решении могут возникнуть три случая.

Случай 1. Собственные значения λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда соответствующие им собственные векторы P_1 и P_2 будут действительными и линейно независимыми. Определяемые ими два частных решения уравнения (121)

$$Y_1 = P_1 e^{\lambda_1 t}, \quad Y_2 = P_2 e^{\lambda_2 t}$$

Общее же решение, как это следует из (112) имеет вид:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2, \tag{128}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 33. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 6y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 . \end{cases}$$

Здесь:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

Его корни — $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$. Найдем теперь собственные векторы, отвечающие найденным собственным значениям.

Для $\lambda = 5$ получаем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ее решением будет:

$$p_1 = 3p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, находим $p_1 = -3$. Таким образом:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично в случае $\lambda = 4$, получаем:

$$P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, частными решениями системы являются:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}, Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Общее решение в матричной записи имеет вид:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x},$$

а в развернутой форме оно запишется следующим образом:

Случай 2. Собственные значения λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$, где $\beta \neq 0$.

Действительно, пусть P – собственный вектор, отвечающий λ_1 (разумеется, комплексный). Тогда из (124) имеем:

$$\overline{A}\overline{P} = \overline{\lambda_1}\overline{P}$$

$$A\overline{P} = \lambda_2\overline{P}\ .$$

Чтобы получить действительные решения, заменим Y_1 и Y_2 их линейными комбинациями

$$Y_1^* = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \qquad Y_2^* = \frac{1}{2i}\left(Y_1 - Y_2\right),$$

общее решение в этом случае имеет вид:

$Y = C_1 Y_1^* + C_2 Y_2^*$.

Случай 2. Собственные значения λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$, где $\beta \neq 0$.

Действительно, пусть P – собственный вектор, отвечающий λ_1 (разумеется, комплексный). Тогда из (124) имеем:

$$\overline{A}\overline{P} = \overline{\lambda}_1\overline{P}$$

$$A\overline{P} = \lambda_2\overline{P}\,.$$

Чтобы получить действительные решения, заменим Y_1 и Y_2 их линейными комбинациями

$$Y_1^* = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \qquad Y_2^* = \frac{1}{2i}\left(Y_1 - Y_2\right),$$

общее решение в этом случае имеет вид:

$$Y = C_1 Y_1^* + \mathrm{C}_2 Y_2^*.$$

Случай 4. Характеристическое уравнение имеет единственный корень λ (кратности 2), которому с точностью до постоянного множителя соответствует один собственный вектор P_1 (т.е. кратность корня больше числа линейно независимых собственных векторов). В этом случае для отыскания решения целесообразно применить *метод неопределенных коэффициентов*

Одним из важных частных случаев дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными являются так называемые *автономные уравнения*. Это уравнения вида

$$y' = g(y). \qquad (10)$$

Такие уравнения часто встречаются в различных вопросах экономической динамики. Обычно в качестве независимой переменной рассматривается время; его отсутствие в правой части уравнения (10) можно трактовать, как неизменность законов, по которым развивается экономическая система в рассматриваемый промежуток времени.

Замечание 2. Если y^* – корень уравнения $g(y) = 0$, то $y = y^* (= const)$ является решением уравнения (10). Такое решение называется ***стационарным***.

Отметим еще одно интересное свойство, которым обладают решения автономного уравнения.

Теорема 2. *Если $y = \varphi(x)$ – решение автономного дифференциального уравнения, то $y = \varphi(x + C)$ также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (10), т.е.

$$\varphi'(x) = g(\varphi(x)).$$

Это равенство выполняется для любого x из области определения, поэтому мы можем заменить в нем x на $x + C$, в результате получим:

$$\varphi'(x + C) = g(\varphi(x + C)). \qquad (11)$$

Положим $\bar{y} = \varphi(x + C)$. Принимая во внимание равенство (11) и правило дифференцирования сложной функции, находим:

$$\bar{y}' = \varphi'(x + C) \cdot (x + C)' = g(\varphi(x + C)) \cdot 1 = g(\bar{y}).$$

Это говорит о том, что функция $\bar{y} = \varphi(x + C)$ также является решением. Теорема доказана.

Замечание 3. Геометрическая трактовка данной теоремы заключается в том, что при параллельном переносе вдоль оси Ox интегральные кривые автономного уравнения переходят друг в друга.

Замечание 4. Если $g(y) \neq 0$, то общее решение автономного уравнения задается формулой $y = \varphi(x + C)$, где $\varphi(x)$ – произвольное частное решение.