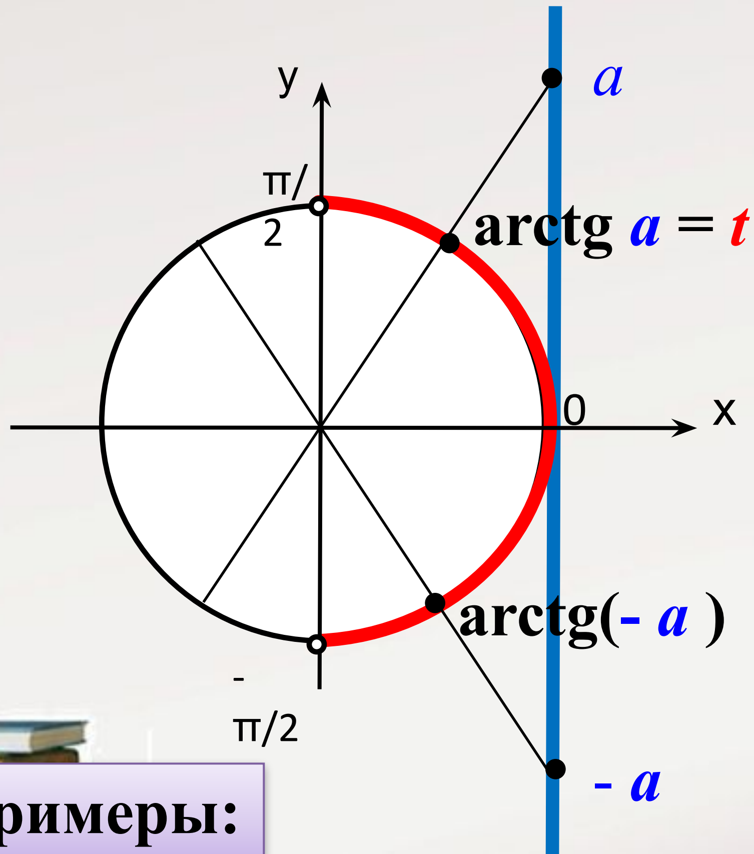
УРАВНЕНИЕ $tgx = a$

Арктангенс.



Арктангенсом числа *a* называется такое число (угол) *t* из (-π/2;π/2), что *tg t* = *a* . Причём, *a* Є R.

arctg(- *a*) = – arctg *a*

Примеры:

1) arctg√3/3 = π/6

2) arctg(-1) = **- π/4**

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

- **Например**

$$arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6};$$ т.к. $$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2};tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$arctg0=0;$$ т.к. $$-\frac{\pi}{2}<0<\frac{\pi}{2};tg0=0.$$

$$arctg1=\frac{\pi}{4};$$ т.к. $$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2};tg\frac{\pi}{4}=1.$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

1. $$2arctg1+3arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}-3arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-3\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

2. $$6arctg\sqrt{3}-4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=6\cdot\frac{\pi}{3}+4\cdot\frac{\pi}{4}=\ 2\pi+\pi=3\pi$$

3. $$3arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3\cdot\frac{\pi}{6}+2\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$

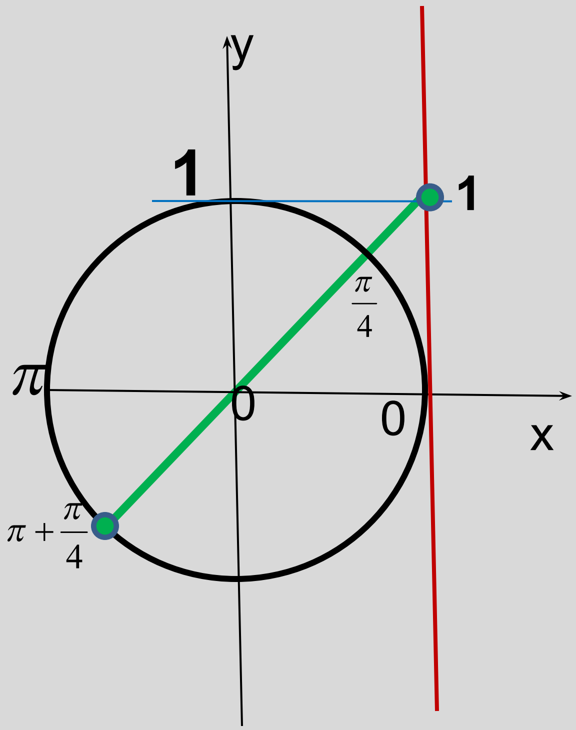
$$=-\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{5}{6}\pi=\ \frac{7}{6}\pi$$

Уравнение tgx = a

Из определения тангенса следует, что tg x может принимать любое действительное значение.
Поэтому уравнение tg $x = a$ имеет корни при любом значении.

$$a \in (-\infty;+\infty)$$

Решить уравнение tgx = 1



Построим на единичной окружности угол при котором tg x = 1. Для этого построим перпендикулярно оси Ох прямую, проходящую через точку (1;0). Отметим на этой прямой точку у = 1 и проведем через нее **прямую** проходящую через начало координат единичной окружности. **Прямая пересекает** единичную **окружность дважды**, как видно на рисунке. ЗНАЧИТ будет 2 угла

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \qquad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

Объединим эти два ответ в один заметив, что точки повторяются через π

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Если a≥0, то корень уравнения заключен в промежутке

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right);$$

Если a<0, то корень уравнения заключен в промежутке

$$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right);$$

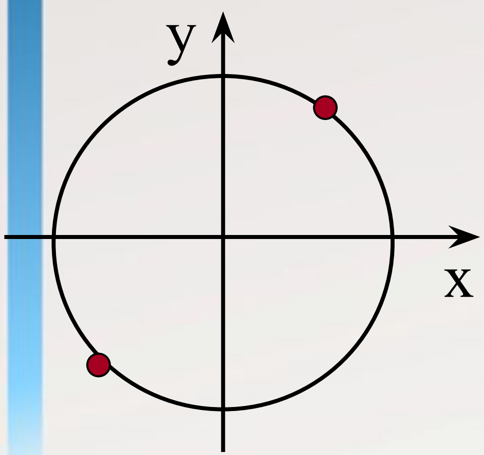
Общее решение уравнения tg x = a

$$tgx = a, a \in R \quad x = arctga + \pi k, k \in Z.$$

$$tgx = -a, a \in R \quad x = -arctga + \pi k, k \in Z.$$

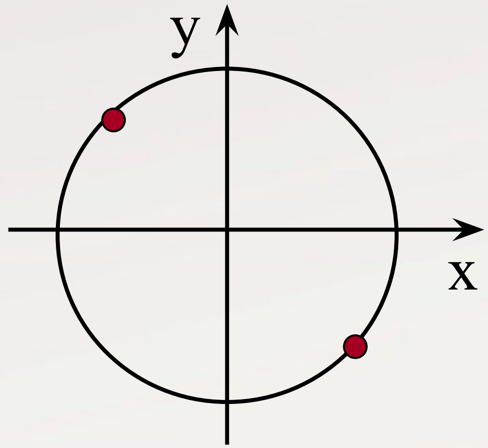
Частные случаи

tg x = 1



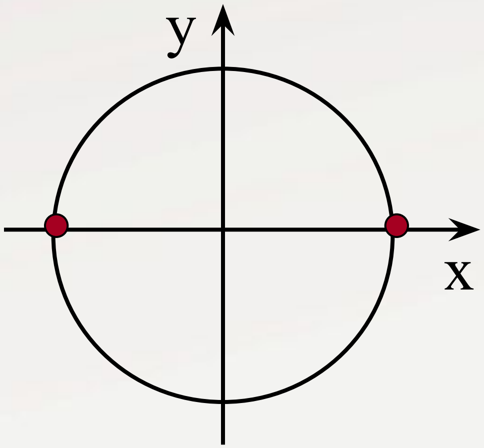
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

tg x = -1



$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

tg x = 0



$$x = \pi k, \quad k \in Z$$

Тренируемся решать:

$$\mathrm{tg}2x = -1$$

$$2x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi k,\ k \in Z$$
$$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$$
$$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$.

Тренируемся решать:

$$tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$Ответ:\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

Уравнение tgx=a

- **Пример 1.**

$$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Пример 2.

$$tg2x = 4$$

$$2x = arctg4 + \pi k$$

$$x = \frac{1}{2}arctg4 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{1}{2}arctg4 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Тренируемся решать:

Решить уравнение:

3tgx- 3= 0

3tgx= 3 |:3.

tgx= 1

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Решить уравнение tgx = 2

$$x = arctga + \pi n, n \in Z$$

$$x = arctg2 + \pi n, n \in Z$$

ответ $arctg2 + \pi n, n \in Z$

Решить уравнение tgx = -4

$$x = arctg(-4) + \pi n, n \in Z$$

ответ $x = -arctg4 + \pi n, n \in Z$

Уравнение tgx=a

- **Пример 3.** $$ctg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3};\qquad 2x-\frac{\pi}{4}=arctg\sqrt{3}+\pi k;$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+\pi k;\qquad 2x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi k;$$

$$2x=\frac{7}{12}\pi+\pi k;\qquad x=\frac{7}{24}\pi+\frac{\pi k}{2},k\in Z.$$

Ответ: $\frac{7}{24}\pi+\frac{\pi k}{2},k\in Z.$

самоконтроль

Решить уравнение $tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

ответ

Решить уравнение $\sqrt{3} + tg\frac{x}{6} = 0$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Проверить решение

ответ

$$x = -2\pi + 6\pi n, n \in Z$$

Решить уравнение $tg 2x = -\sqrt{3}$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Проверить решение

ответ $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

Решить уравнение:

$tg(\pi/3 - x) = \sqrt{3}$

$- tg(x - \pi/3) = \sqrt{3}$

$3x - \pi/3 = arctg(\sqrt{3}) + \pi k$, к є Z

$3x - \pi/3 = \pi/3 + \pi k$, к є Z

$3x = 2\pi/3 + \pi k$, к є Z

$x = 2\pi/9 + \pi k/3$, к є Z

Ответ: $2\pi/9 + \pi k/3$, к є Z .