Решение неравенств

Разработал Рыжих С.А.

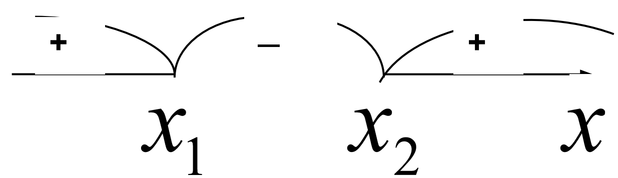
Виды неравенств

- **Линейные** $kx > b, \quad k \neq 0$

$$x > \frac{b}{k} \quad если\ k > 0$$

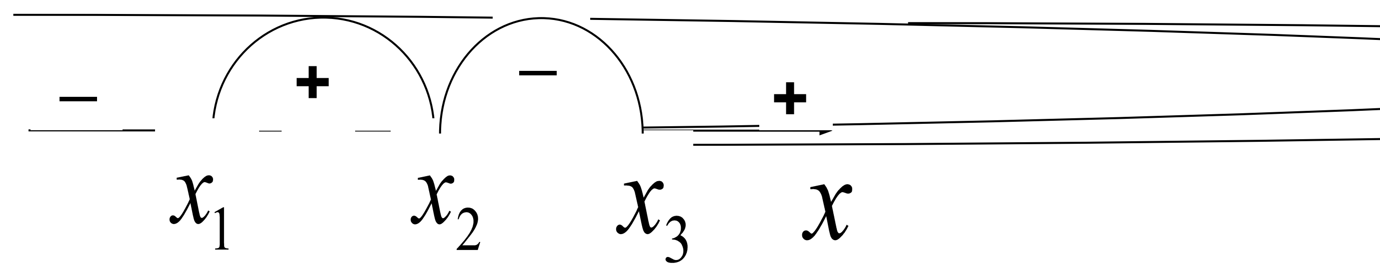
$$x < \frac{b}{k} \quad если\ k < 0$$

- **Квадратные** $ax^2 + bx + c > 0 \quad (a > 0, a < 0)$



Виды неравенств

- Рациональные $$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$



Виды неравенств

- Содержащие чётную степень $x^{2n} > b$

$$x < -\sqrt[2n]{b}, \quad x > \sqrt[2n]{b}, \quad если\ b > 0$$

$$x < 0,\ x > 0, \quad если\ b = 0$$

$$x \in R, \quad если\ b < 0$$

- Содержащие нечётную степень $x^{2n+1} > b$

$$x > \sqrt[2n+1]{b}$$

Виды неравенств

- **Иррациональные** *(корень чётной степени)*

$$\sqrt[2n]{x} > b$$

$$x > b^{2n} \quad если\ b > 0$$

$$x > 0 \quad если\ b = 0$$

$$x \geq 0 \quad если\ b < 0$$

- **Иррациональные** *(корень нечётной степени)*

$$\sqrt[2n+1]{x} > b$$

$$x > b^{2n+1}$$

Виды неравенств

- Показательные

$$x > \log_a b \quad если\ b > 0$$

$$a^x > b \quad если \quad a > 1$$

$$x \in R \quad если\ b < 0$$

$$a^x > b \quad если \quad 0 < a < 1$$

$$x < \log_a b \quad если\ b > 0$$

$$x \in R \quad если\ b < 0$$

Виды неравенств

- **Логарифмические**

$$\log_a x > b \quad если\ a > 1 \qquad x > a^b$$

$$\log_a x > b \quad если\ 0 < a < 1 \qquad 0 < x < a^b$$

- **Тригонометрические**

Решаем неравенства, используя тригонометрическую окружность, либо с помощью графика соответствующей функции

Равносильность неравенств

1. Перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую;
2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число;
3. Применение правил умножения многочленов и формул сокращённого умножения;
4. Приведение подобных членов многочлена;
5. Возведение неравенства в нечётную степень;

6. Логарифмирование неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ т.е замена этого неравенства неравенством

$$f(x) > g(x) \; при \; a > 1 \quad или \; f(x) < g(x) \; при \; 0 < a < 1$$

Равносильность неравенств на некотором множестве чисел

1. Возведение неравенства в чётную степень;
2. Потенцирование неравенства;
3. Применение некоторых формул (логарифмических, тригонометрических и др.)

Равносильны ли неравенства?

$$x^2 \geq 9$$ и $$(x-3)(x+3) > 0$$

$$\log_3(2-x) > \log_3 x$$ и $$2-x > x$$

$$x^2 > x$$ и $$x > 1$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0$$ и $$x \geq -1$$

Методы решения неравенств

алгебраический

функциональны
й

графический

геометрический

Алгебраические методы решения неравенств

1) Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем
2) Метод рационализации
3) Метод интервалов

Сведение неравенства к равносильной совокупности систем неравенств

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x) > 0 \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решите неравенство

$$\log_{3x}(42x^2-13x+1)>0$$

Решение

$$\log_{3x}(42x^2-13x+1)>0$$

$$\begin{cases} 3x>1 \\ 42x^2-13x+1>0 \\ 42x^2-13x+1>1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<3x<1 \\ 42x^2-13x+1>0 \\ 42x^2-13x+1<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ 42\,(x-\dfrac{1}{6})\cdot(x-\dfrac{1}{7}) > 0 \\ 42x\,(x-\dfrac{13}{42}) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{3} \\ 42\,(x-\dfrac{1}{6})\cdot(x-\dfrac{1}{7}) > 0 \\ 42x\,(x-\dfrac{13}{42}) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x < \dfrac{1}{7}, \quad x > \dfrac{1}{6} \\ x < 0, \quad x > \dfrac{13}{42} \end{cases}$$

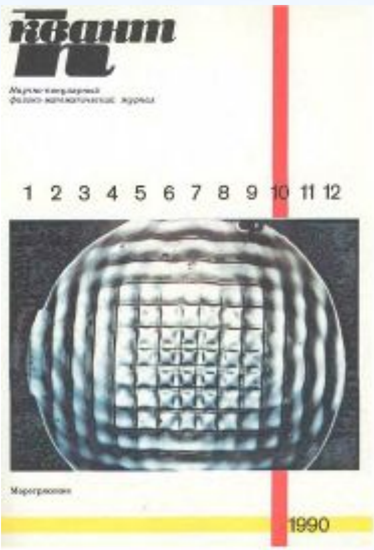
$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{3} \\ x < \dfrac{1}{7}, \quad x > \dfrac{1}{6} \\ 0 < x < \dfrac{13}{42} \end{cases}$$

$$x > \frac{1}{3}$$

$$0 < x < \frac{1}{7}; \quad \frac{1}{6} < x < \frac{13}{42}$$

Метод рационализации

Если



$\log_a b > 0$, то $(a-1)\cdot(b-1) > 0$, т. е. $(a-1)$ и $(b-1)$ — одного знака.

Действительно, если $\log_a b > 0$, то $\log_a b > \log_a 1$.

При $a > 1$ имеем $b > 1$,— утверждение верно.

При $0 < a < 1$ получаем, что $b < 1$, и наше утверждение опять верно, так как $(a-1) < 0$ и $(b-1) < 0$.

Аналогично можно доказать , что если

$\log_a b < 0$, то $(a-1)\cdot(b-1) < 0$

$$\log_{3x}(42x^2-13x+1)>0$$

$$\begin{cases} 3x>0 \\ 3x\neq 1 \\ 42x^2-13x+1>0 \\ (42x^2-13x)\cdot(3x-1)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{3} \\ x<\dfrac{1}{7}; \quad x>\dfrac{1}{6} \\ 0<x<\dfrac{13}{42}; \quad x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ

$$x>\frac{1}{3}$$

$$0<x<\frac{1}{7}; \quad \frac{1}{6}<x<\frac{13}{42}$$

Заменяемое выражение	Используемое выражение
$\log_a f(x)$	$(a-1)(f(x)-1)$
$\log_a f(x) - 1$	$(a-1)(f(x)-a)$
$\log_a f(x) - \log_a g(x)$	$(a-1)(f(x)-g(x))$
$\log_{h(x)} f(x)$	$(h(x)-1)(f(x)-1)$
$\log_{h(x)} f(x) - 1$	$(h(x)-1)(f(x)-h(x))$
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(h(x)-1)(f(x)-g(x))$

Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$

Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

Решение.

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$$

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 2x+3 \neq 1 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3)<0 \\ 2x+3>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3)<0 \\ x>-1{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}: \left(-1{,}5;-1\right) \cup (-1;0) \cup (0;3)$$

$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \vee 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \vee 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$
$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \vee 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$
$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1) \cdot f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(f-g) \cdot h \vee 0$
$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
$\lvert f\rvert \vee \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g) \vee 0$

Метод интервалов

Алгоритм решения:

1) Преобразовать неравенство так, чтобы в правой части неравенства был ноль
2) Левую часть неравенства рассмотреть как функцию, найти область определения и нули функции
3) Расположить нули функции в порядке возрастания на числовой прямой, учитывая область определения
4) Определить знаки функции на каждом интервале
5) Рассматривая рисунок записать ответ

Решим методом интервалов

$$\frac{x^2+2x-3}{(x-7)(x+5)} \geqslant 0$$

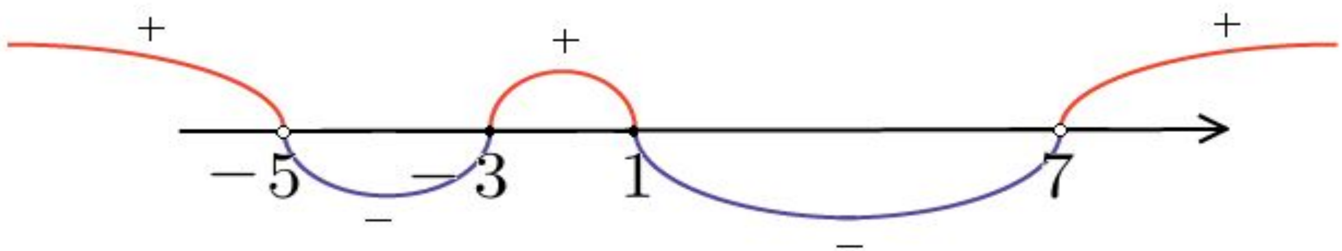
Решение

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

x1 и x2 - корни квадратного уравнение

$$\frac{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}{\left(x-7\right)\left(x+5\right)} \geqslant 0$$

Рисуем ось X и расставляем точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль



Ответ: $(-\infty; -5) \cup [-3; 1] \cup (7; +\infty)$