

Комплексные числа

Вычислите:

$$\sqrt{144}$$

$$\sqrt{6,25}$$

$$\sqrt{\frac{64}{256}}$$

$$\sqrt{-900}$$

Мнимая единица



i – начальная буква французского слова
imaginaire – «МНИМЫЙ»

Например,

$$\begin{aligned}\sqrt{-36} &= \sqrt{36 \cdot (-1)} = \\ &= \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i\end{aligned}$$

Вычислите:

$$\sqrt{-900}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{-12,25}$$

$$i^1 = i \quad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^3 i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = 1$$

*Значения степеней числа i
повторяются с периодом,
равным 4.*

Найдем:

$$i^{28} ; i^{33} ; i^{135} .$$

Решение.

$$i, -1, -i, 1,$$

$i, -1, -i, 1$ и т. д.

Имеем, $28 = 4 \times 7$ (нет остатка);

$$33 = 4 \times 8 + 1;$$

$$135 = 4 \times 33 + 3.$$

Соответственно получим

$$i^{28} = 1; i^{33} = i; i^{135} = -i.$$

Вычислите:

$$i^{66}$$

$$i^{-143}$$

$$i^{216}$$

$$i^{43} + i^{48} + i^{44}$$

$$(i^{13} + i^{14} + i^{15}) \cdot i^{32}$$

Комплексные числа

Определение 1. Числа вида $a + bi$,

где a и b – действительные числа,

i – мнимая единица,

называются **КОМПЛЕКСНЫМИ**.

a – действительная часть комплексного числа,

bi – мнимая часть комплексного числа,

b – коэффициентом при мнимой части.

Определение 2.

$a + bi = c + di$, если

$a = c$ и $b = d$.

Пример .

Найти x и y из равенства:

$$3y + 5xi = 15 - 7i;$$

Решение.

Согласно условию равенства

КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ИМЕЕМ

$$3y = 15, 5x = -7.$$

Отсюда

$$x = -\frac{7}{5}, y = 5.$$

Сложение

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Вычитание

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

Выполните действия:

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 5 - 7i.$$

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (5 - 7i) = \\ &= (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (2 + 3i) - (5 - 7i) = \\ &= (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i; \end{aligned}$$

Умножение

$$(a+bi)(c+di) =$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Выполните действия:

$$(2 + 3i)(5 - 7i) =$$

$$= (10 + 21) + (-14 + 15)i = 31 + i$$

$$(5 + 3i)(5 - 3i) = 25 - 9i^2 = 34$$

$$(2 - 7i)^2 = 4 - 28i + 49i^2 = -45 - 28i$$

$$25m^2 + 16 = 25m^2 - 16i^2 = \\ = (5m - 4i)(5m + 4i)$$

Определение 3.

Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

$$z_1 = a + bi \quad \text{и} \quad z_2 = a - bi$$

Деление

$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{2 + 3i}{5 - 7i} \cdot \frac{5 + 7i}{5 + 7i}$$

$$= \frac{-11 + 29i}{74} = \boxed{-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i}$$

Выполните действия:

$$\frac{(2 + 3i) + (4 - i)}{1 - i} + 4i^{27}$$

$$\frac{6 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} - 4i = \frac{4 + 8i}{2} - 4i =$$
$$= 2$$

Домашняя работа

1) $(i^{63} + i^{17} + i^{13} + i^{82})(i^{72} - i^{34});$

2) Найти x и y из равенства:

$$(2x + 3y) + (x - y)i = 7 + 6i.$$

3) $\frac{6 + 2i}{3 - 7i} - \frac{2 + 3i}{2 + 5i} + (1 - i)^3 - i^{123}$