Тема 2. Парная линейная регрессионная модель

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

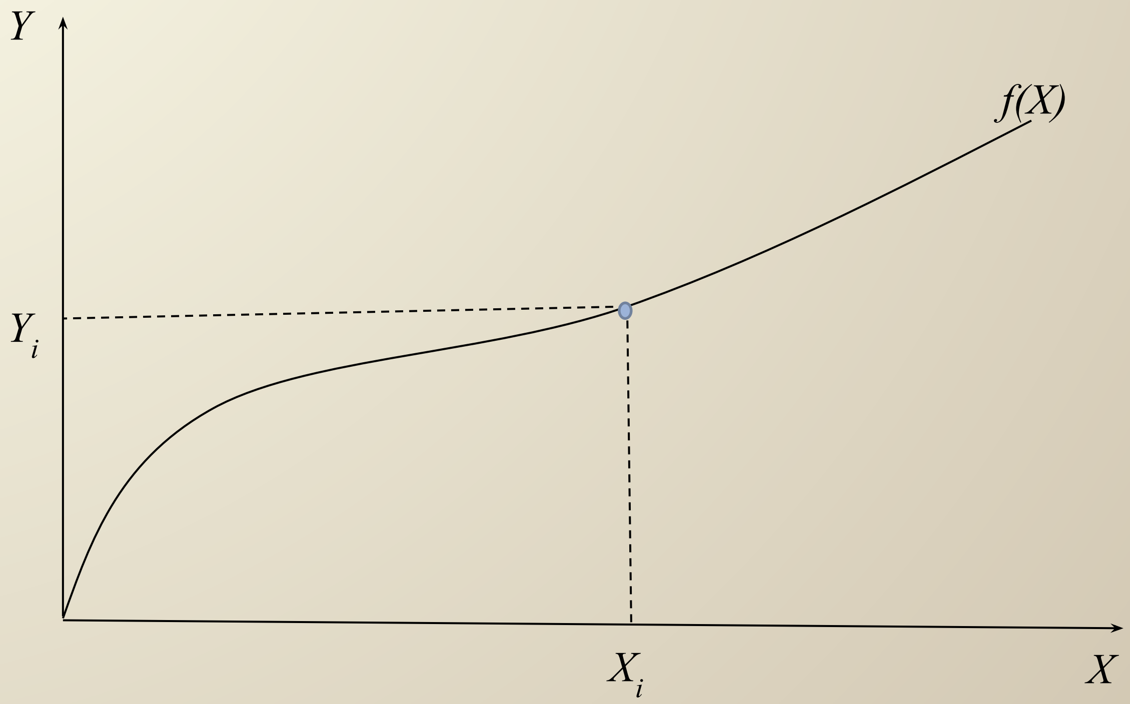
ПЛРМ

Две переменные X и Y

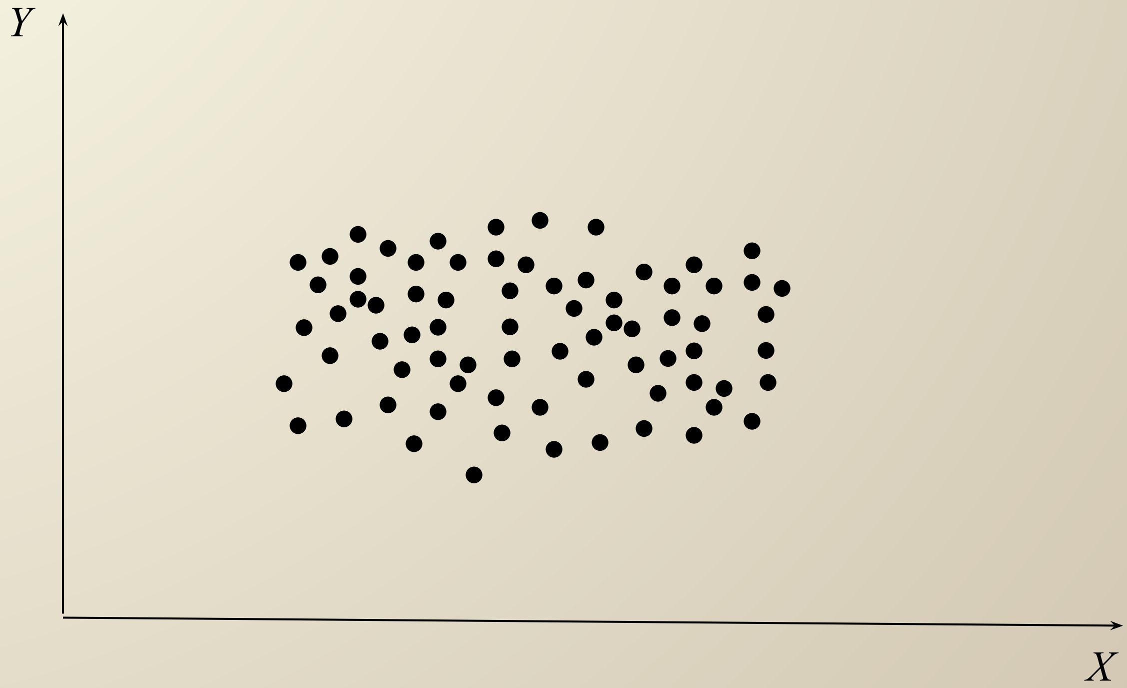
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- могут быть связаны
- функциональной зависимостью (т.е. существует функция f что $Y = f(X)$, значения переменной Y полностью определяются значениями переменной X)
- статистической зависимостью
- независимы.

Функциональная зависимость



Независимость



Статистическая зависимость

- Если при изменении X меняется закон распределения случайной величины Y, то говорят, что величины (X,Y) связаны статистической зависимостью.

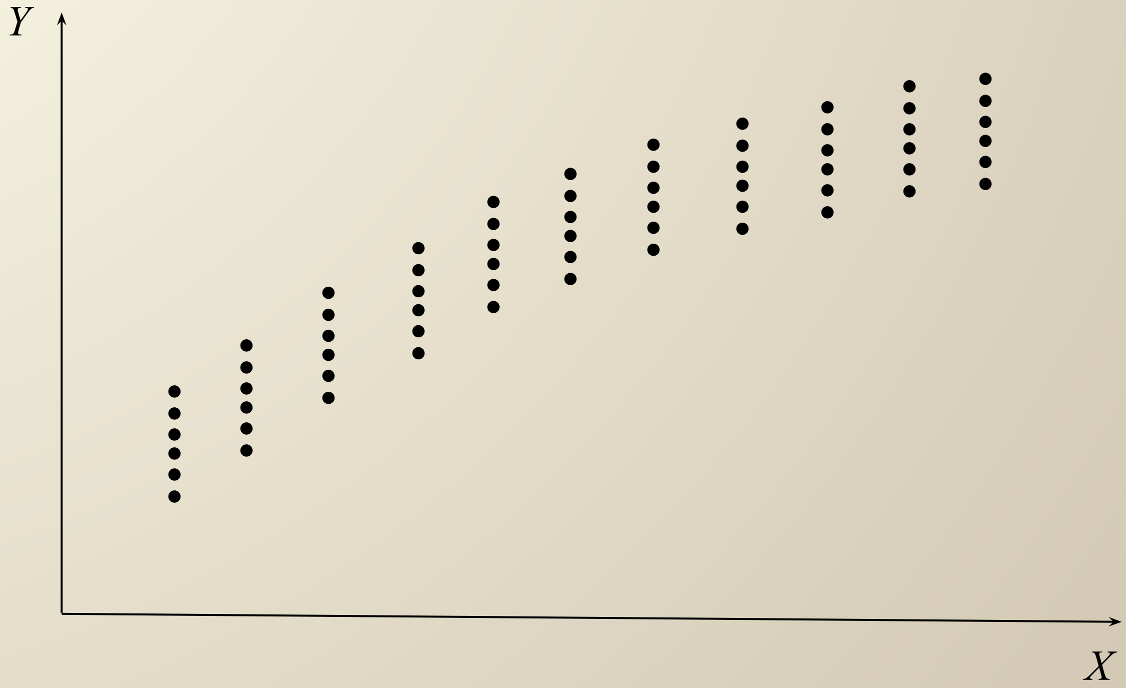
Статистическая зависимость

Здесь будет красивый рисунок (когда-нибудь)

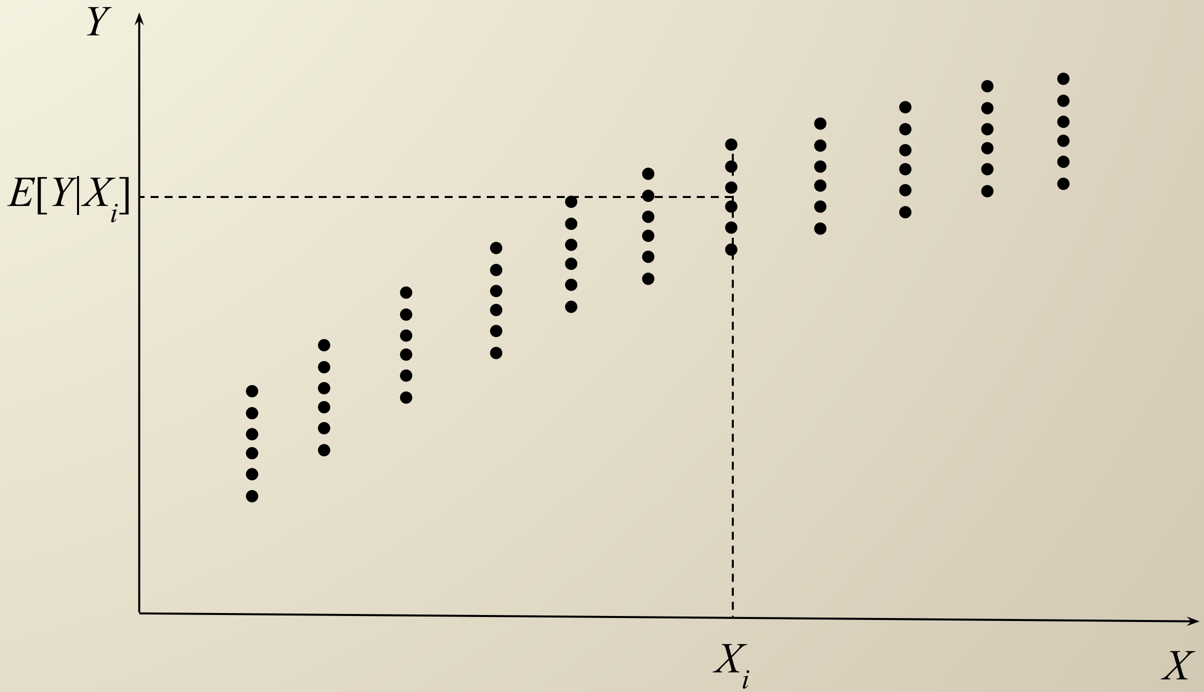
Статистическая зависимость

- Статистическая зависимость называется корреляционной, если при изменении X меняется математическое ожидание случайной величины Y.
- Если при изменении переменной X меняется дисперсия переменной Y, такую зависимость называют гетероскедастичностью.
- Корреляция и гетерокедастичность могут наблюдаться одновременно

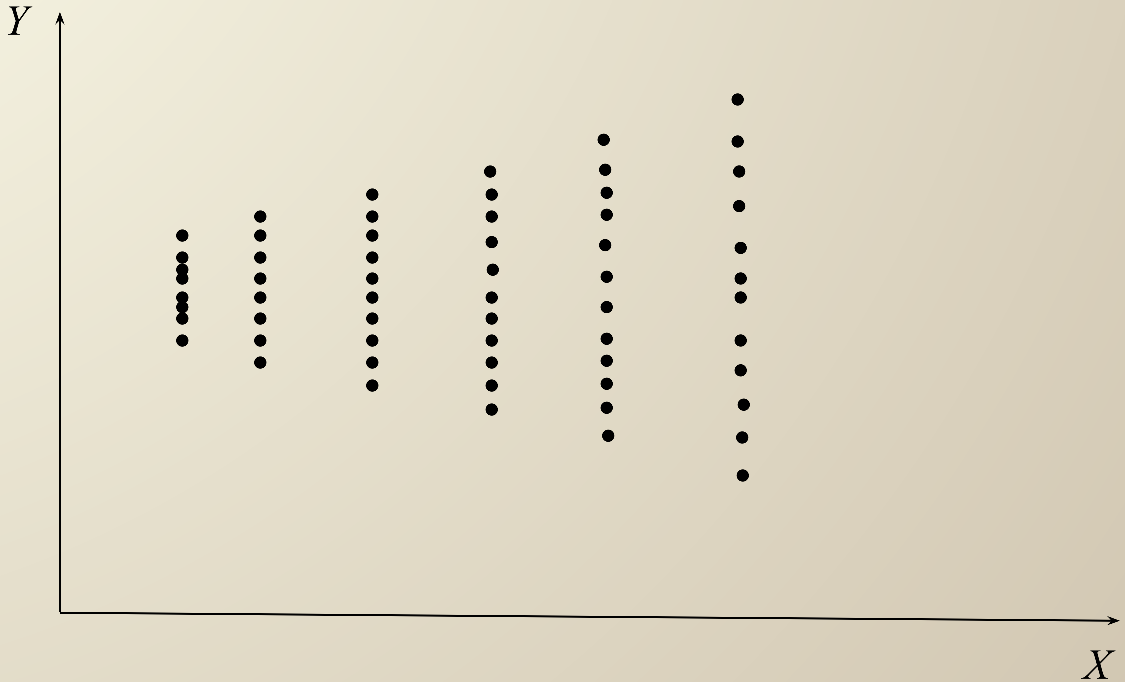
Корреляция



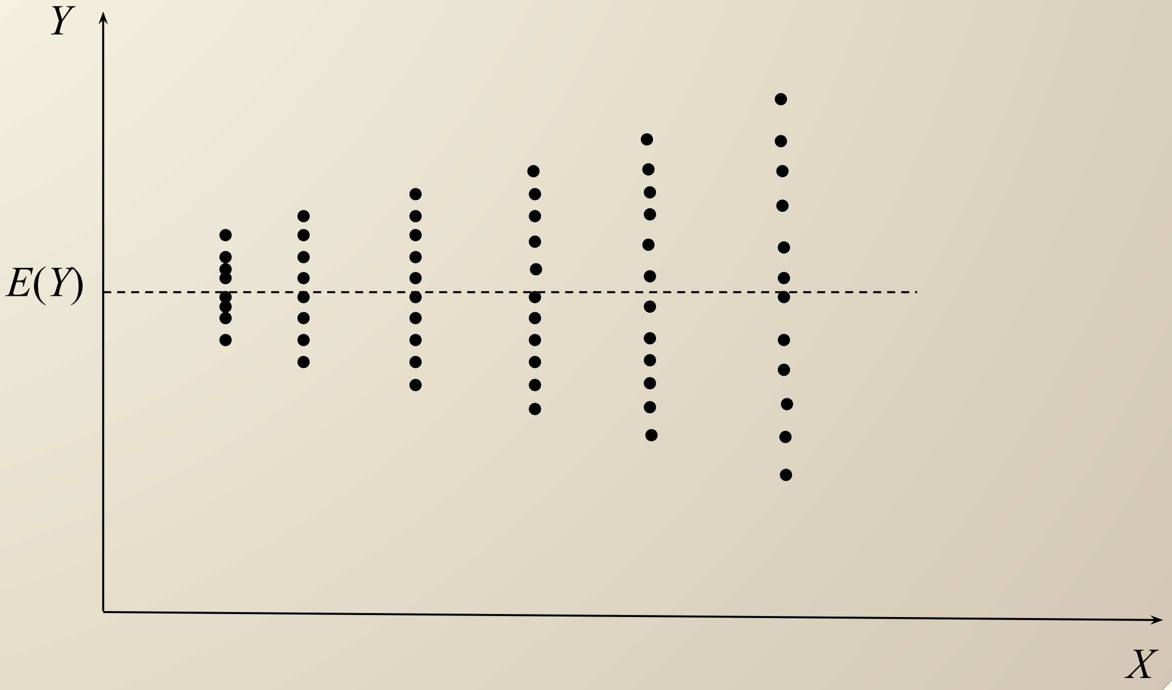
Корреляция



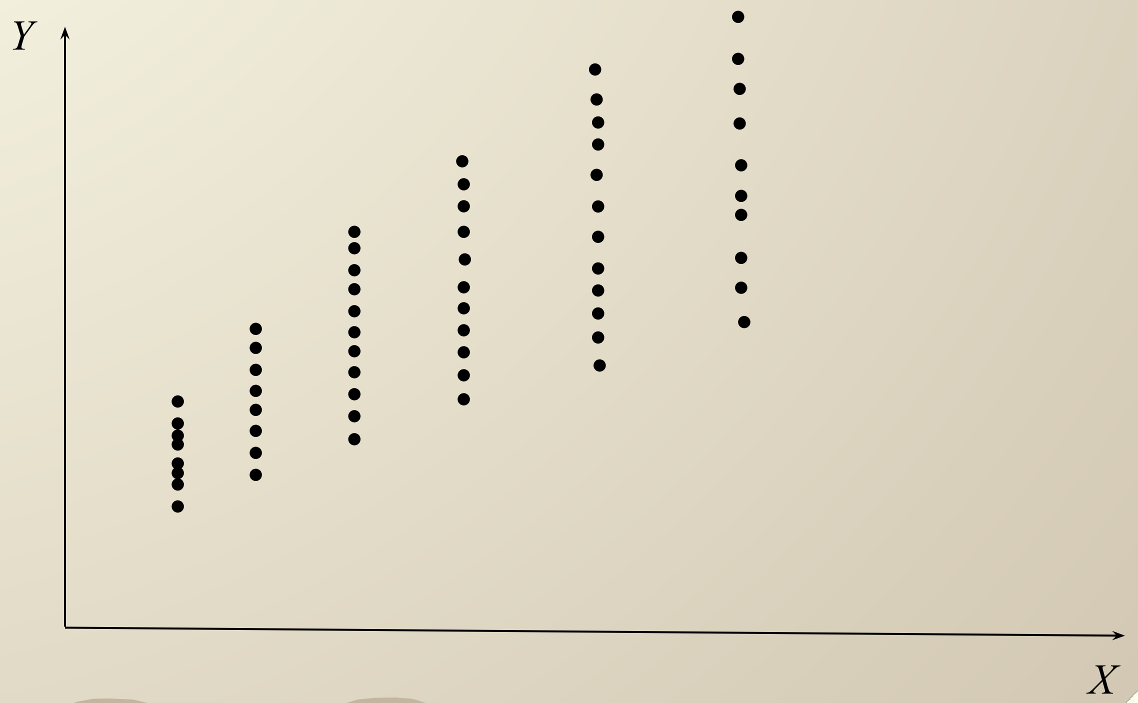
Гетероскедастичность



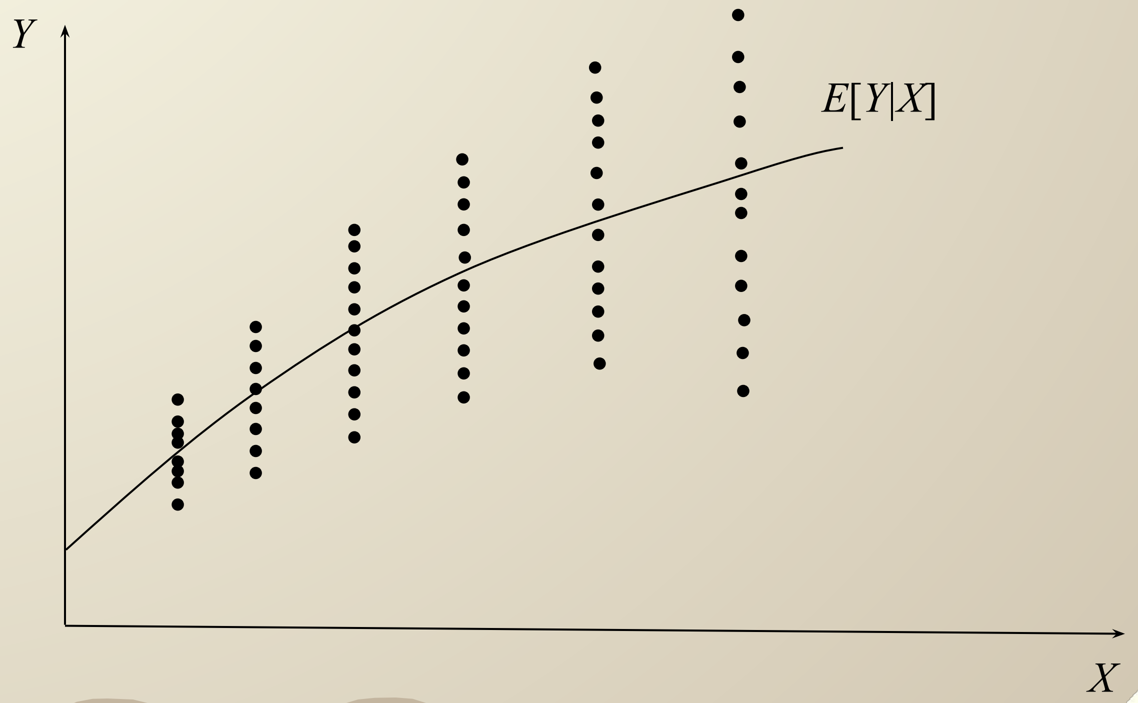
Гетероскедастичность



Корреляция и гетероскедастичность



Корреляция и гетероскедастичность



Корреляционная зависимость

Если каждому значению величины X соответствует свое значение $E[Y \mid X]$ то говорят, что существует регрессионная функция

$$E(Y \mid X) = f(X)$$

Линию, которую описывает регрессионная функция, называется линия регрессии

Случайная составляющая

Отклонение переменной Y от математического ожидания для соответствующего значения переменной X называется ошибкой и обозначается ε

$$\varepsilon(X) = Y(X) - f(X)$$

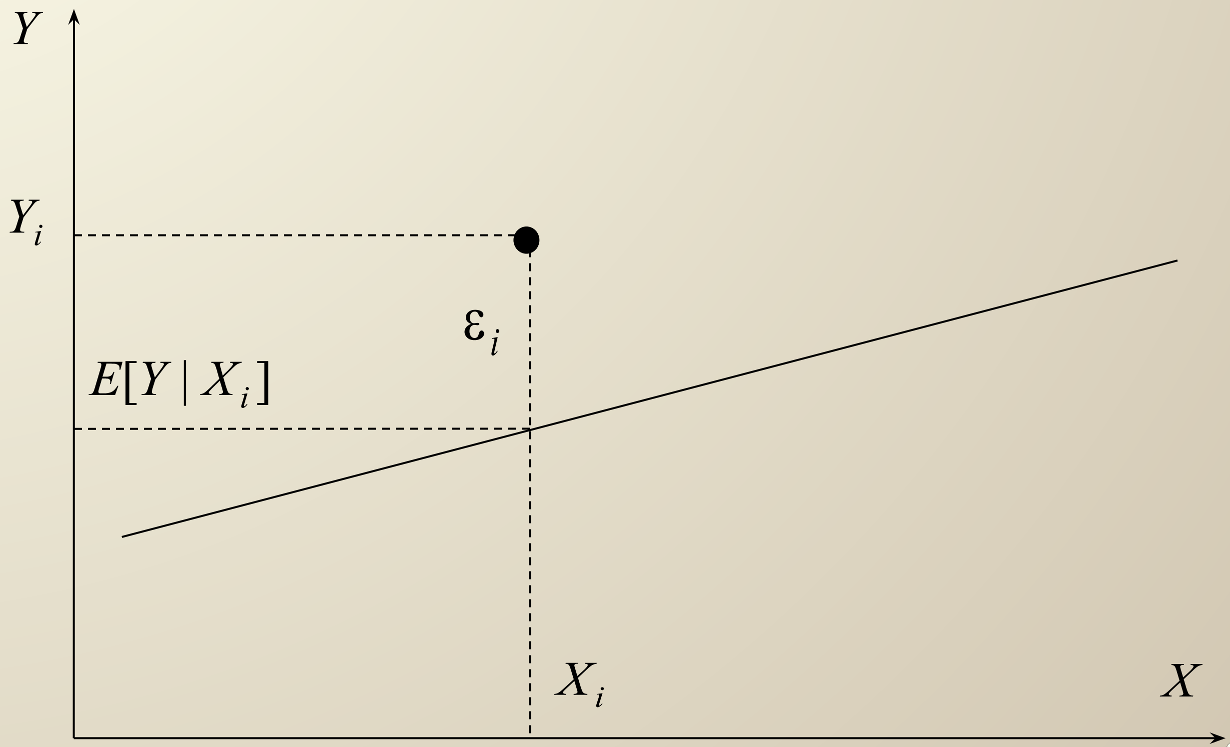
Регрессионное уравнение

Уравнение

$$Y = f(X) + \varepsilon$$

называется уравнением регрессии переменной Y на переменную X

Компоненты Y



Экономический смысл ε

- невключение объясняющих переменных в уравнение. На самом деле на переменную Y влияет не только переменная X, но и ряд других переменных, которые не учтены в нашей модели по следующим причинам:
  - мы знаем, что другая переменная влияет, но не модем ее учесть, потому как не знаем, как измерить (психологический фактор, например);
  - существуют факторы, которые мы знаем, как измерить, но влияние их на Y так слабо, что их не стоит учитывать;
  - существенные переменные, но из-за отсутствия опыта или знаний мы их таковыми не считаем.

Экономический смысл ε (продолжение)

- Неправильная функциональная спецификация. Функциональное соотношение между *Y* и *X* может быть определено неправильно. Например, мы предположили линейную зависимость, а она может быть более сложной.
- Ошибки наблюдений (занижение реального уровня доходов). В этом случае наблюдаемые значения не будут соответствовать точному соотношению, и существующее расхождение будет вносить свой вклад в остаточный член.

Способы определения регрессионной функции $f(X)$

- параметрический – предполагаем, что вид регрессионной функции известен, неизвестны параметры функции
- непараметрический – предполагаем, что вид регрессионной функции неизвестен и мы составляем алгоритм расчета значений функции в каждой точке

Выбор вида $f(X)$

- экономическая теория
- опыт, интуиция исследователя
- эмпирический анализ данных

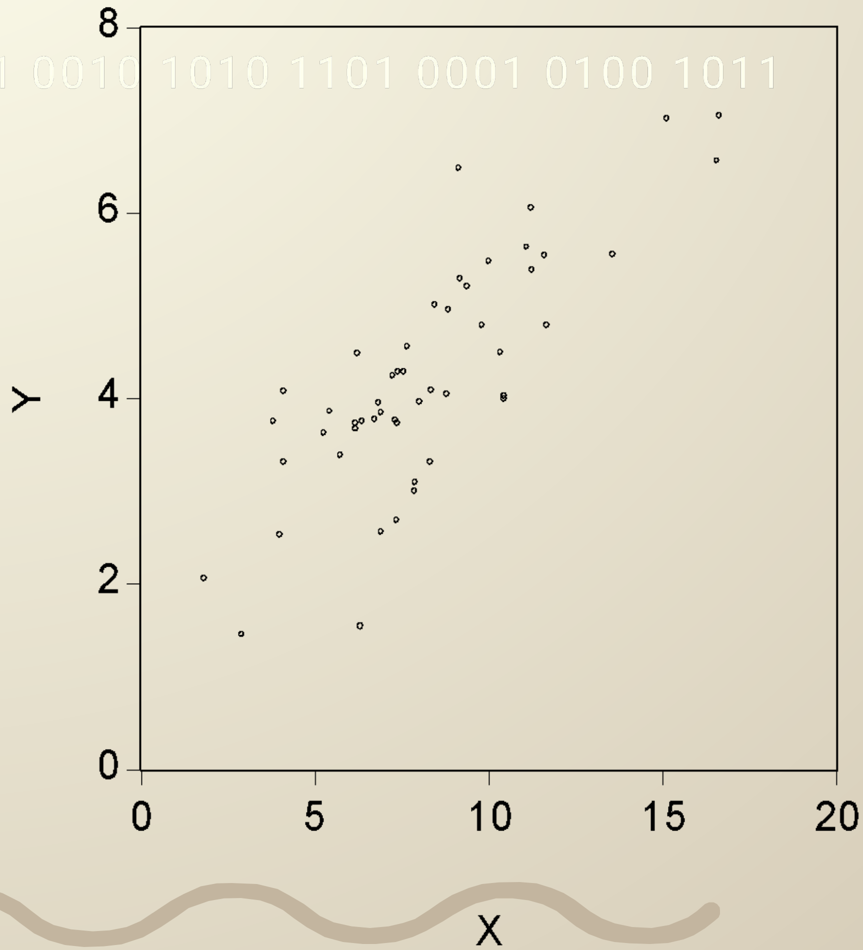
Эмпирический анализ данных

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

В парном случае материал наблюдений представляет собой набор пар чисел:

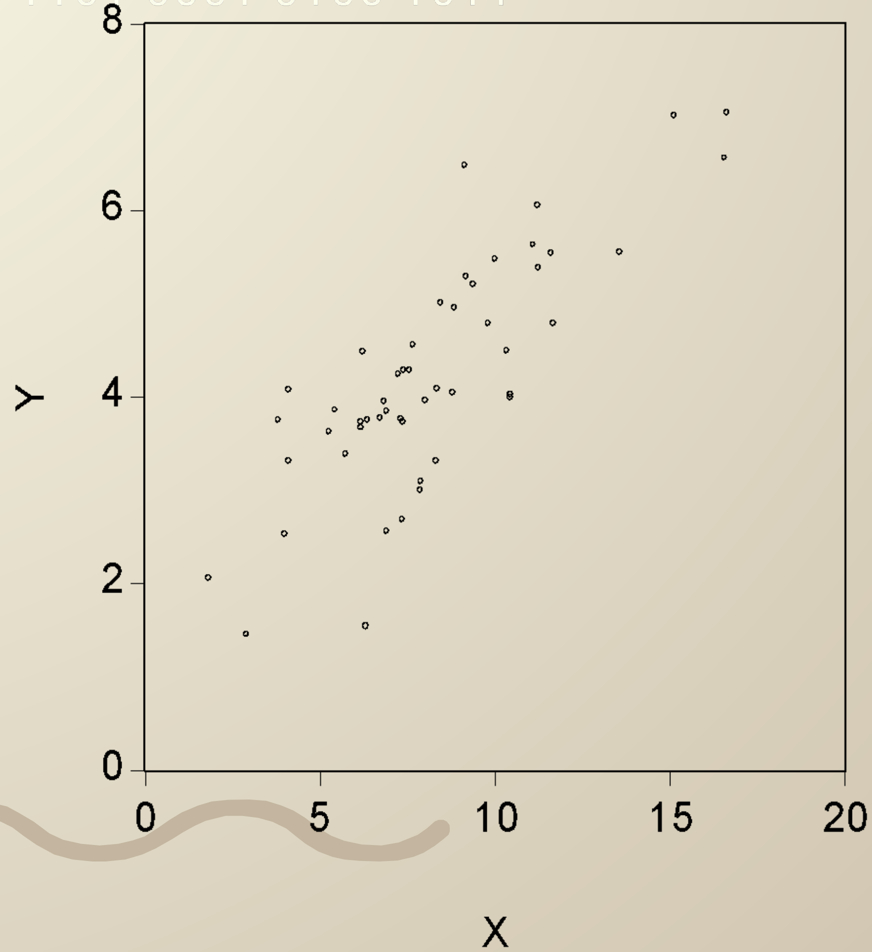
$$(X_i, Y_i) \quad i = 1, \dots, N$$

На плоскости каждому такому наблюдению соответствует точка:

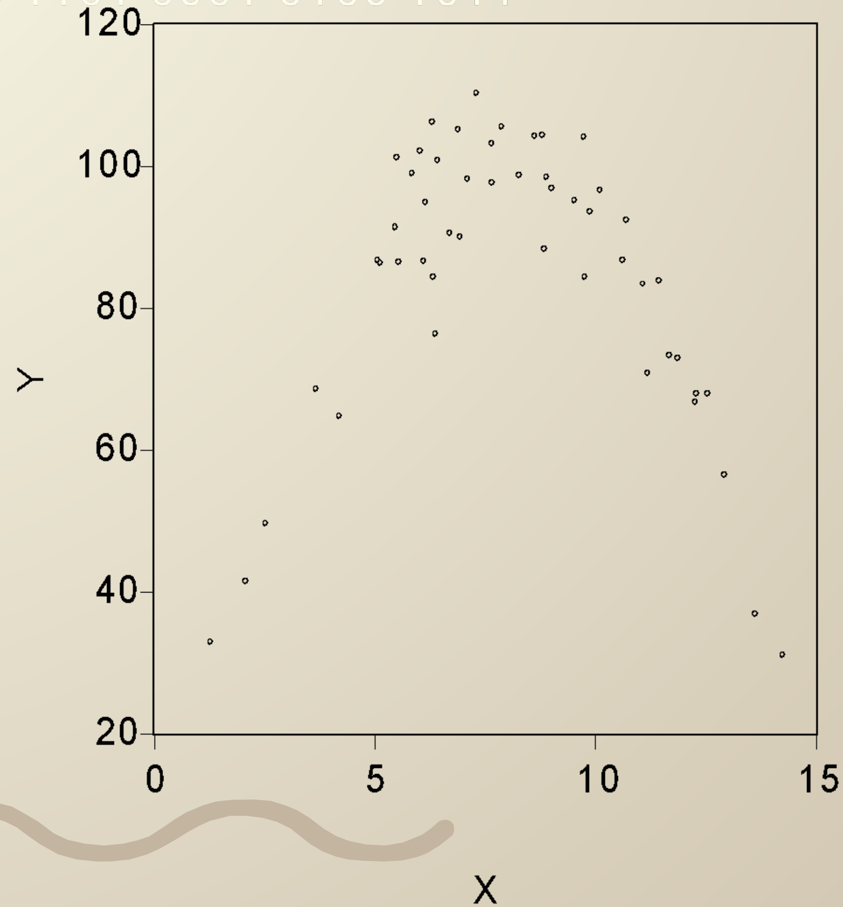


Полученный график *называют облако наблюдений, поле корреляции или диаграмма рассеяния*. По виду облака наблюдений можно определить вид регрессионной функции.

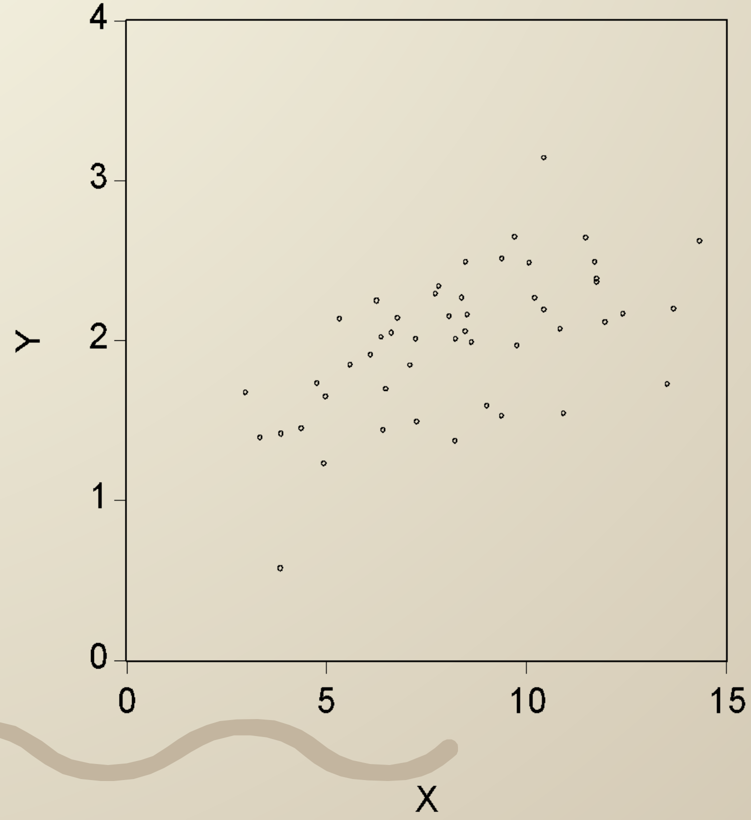
Линейная $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon.$



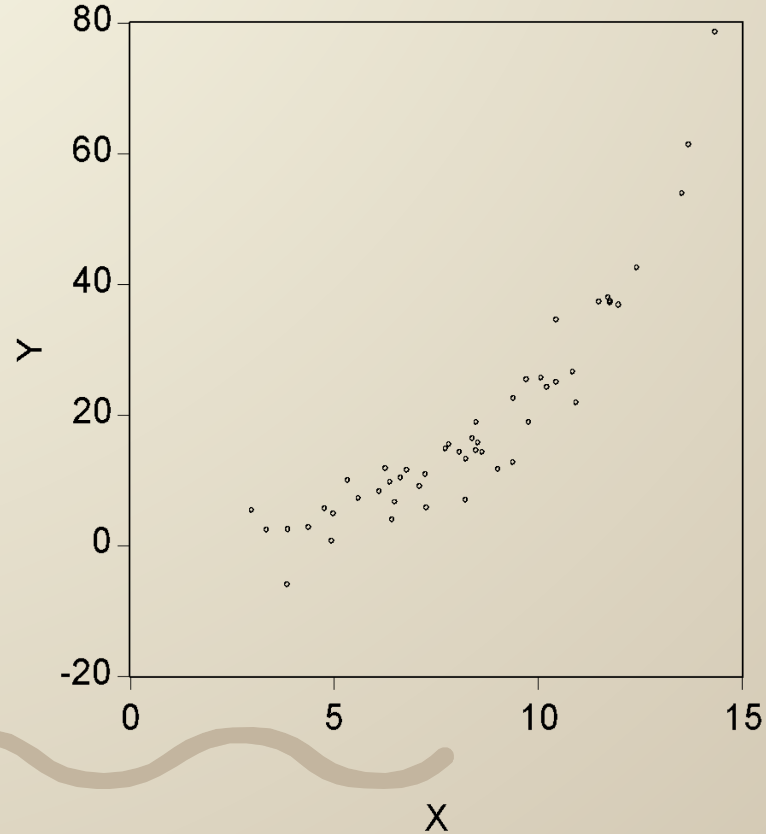
Квадратичная $Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \varepsilon$



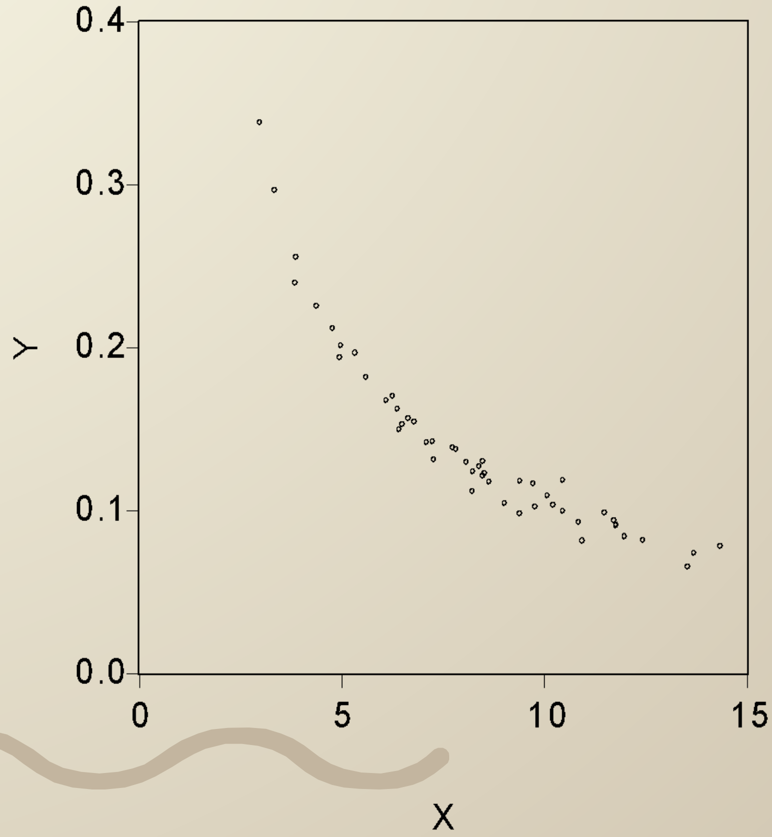
Показательная $Y = \alpha X^{\beta} \varepsilon$



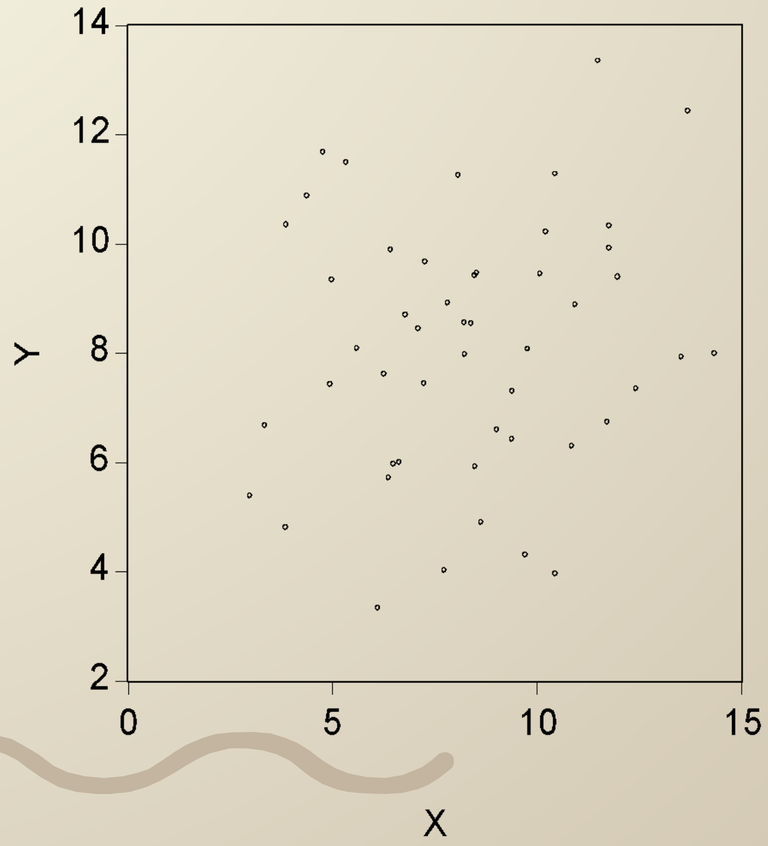
Степенная $$Y = \alpha e^{\beta X} \varepsilon$$



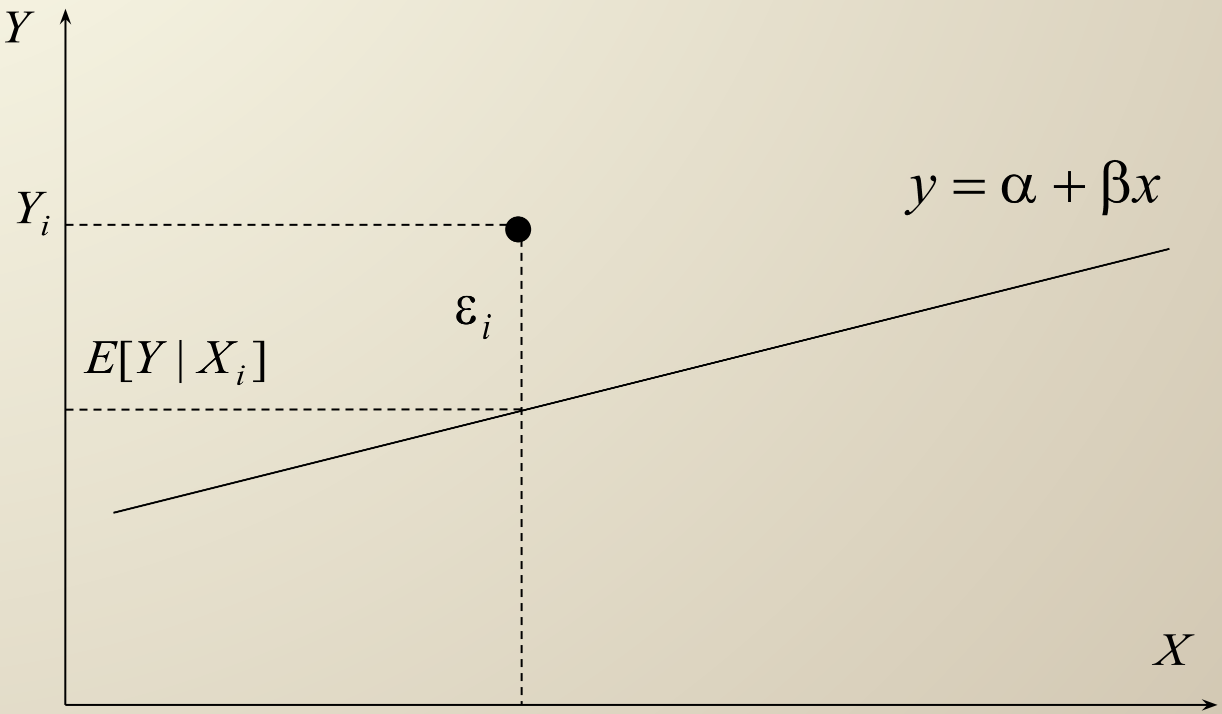
Гиперболическая $Y = \alpha + \dfrac{\beta}{X} + \varepsilon$



X и *Y* независимы

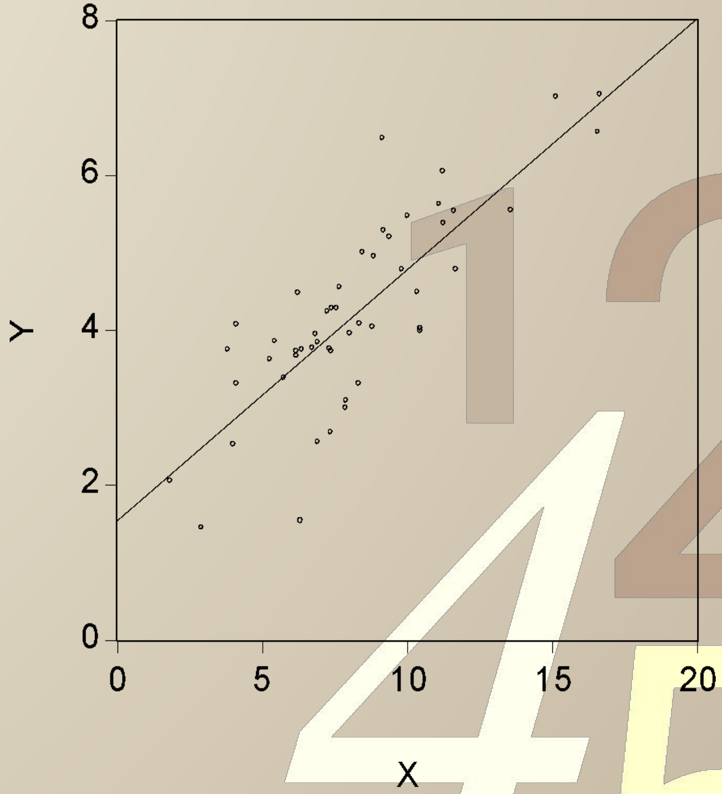


Парная линейная регрессионная модель $Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$.

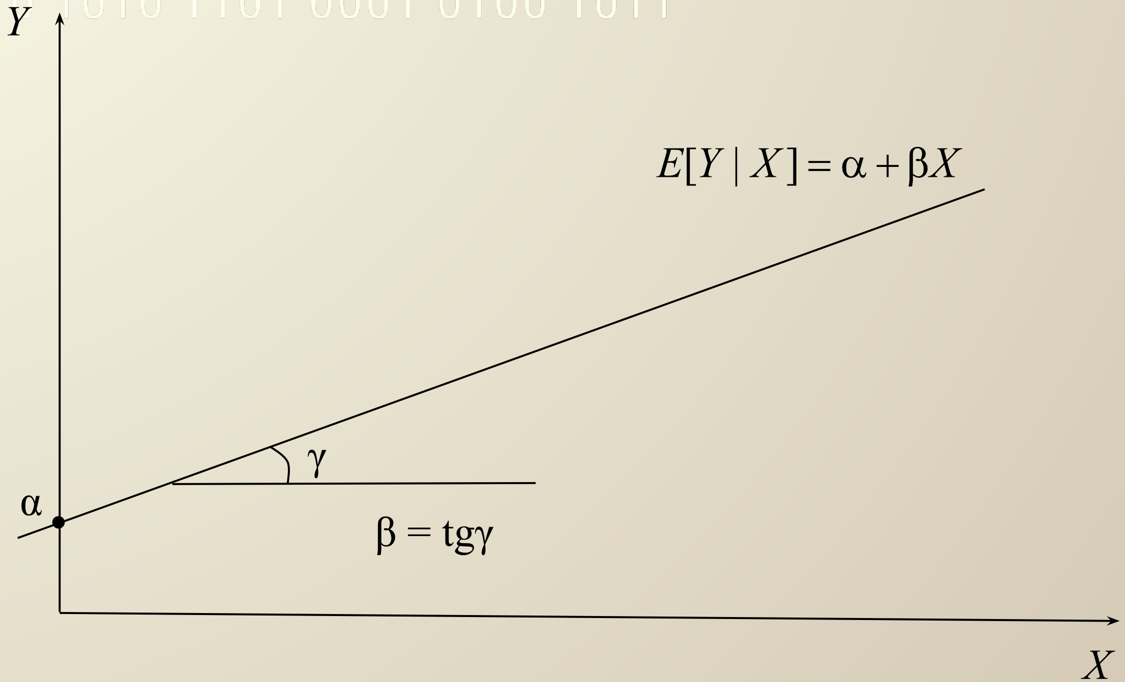


Выбор коэффициентов регрессионной прямой

Из всех возможных прямых мы хотим выбрать ту, чтобы она «наилучшим образом» подходила к нашим данным, т. е. отражала бы линейную зависимость *Y* от *X*. Иными словами, чтобы каждое Y_i лежало бы как можно ближе к прямой. Можно сказать, мы хотим, чтобы желаемая прямая *была бы в центре скопления наших данных.*

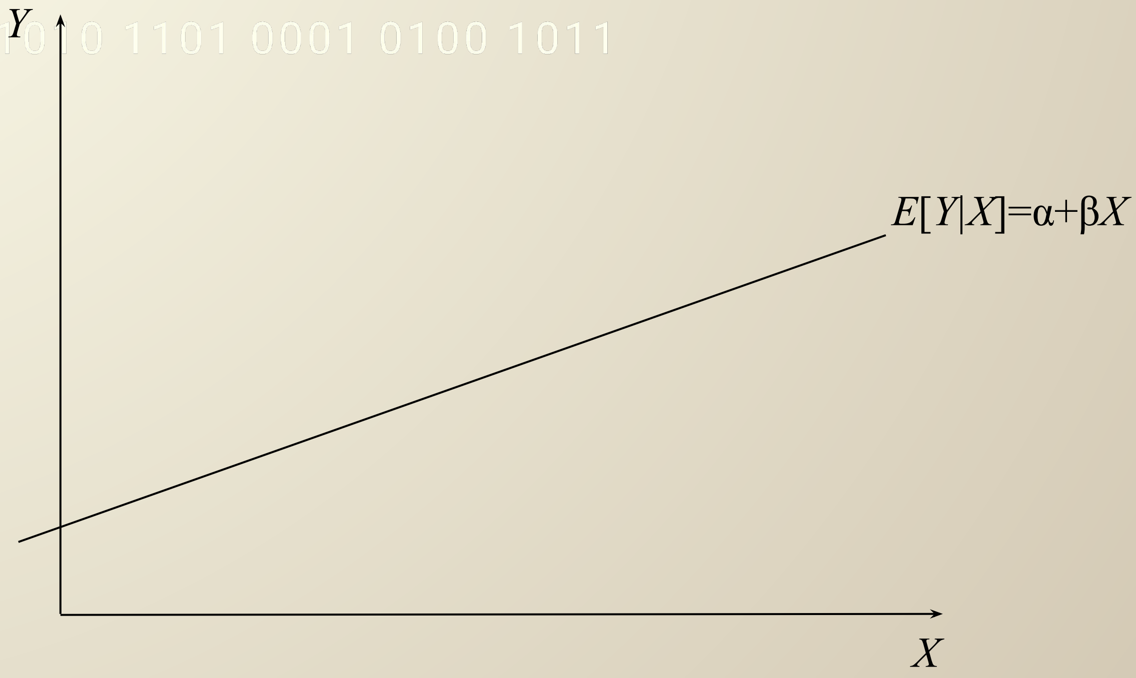


Выбор коэффициентов регрессионной прямой

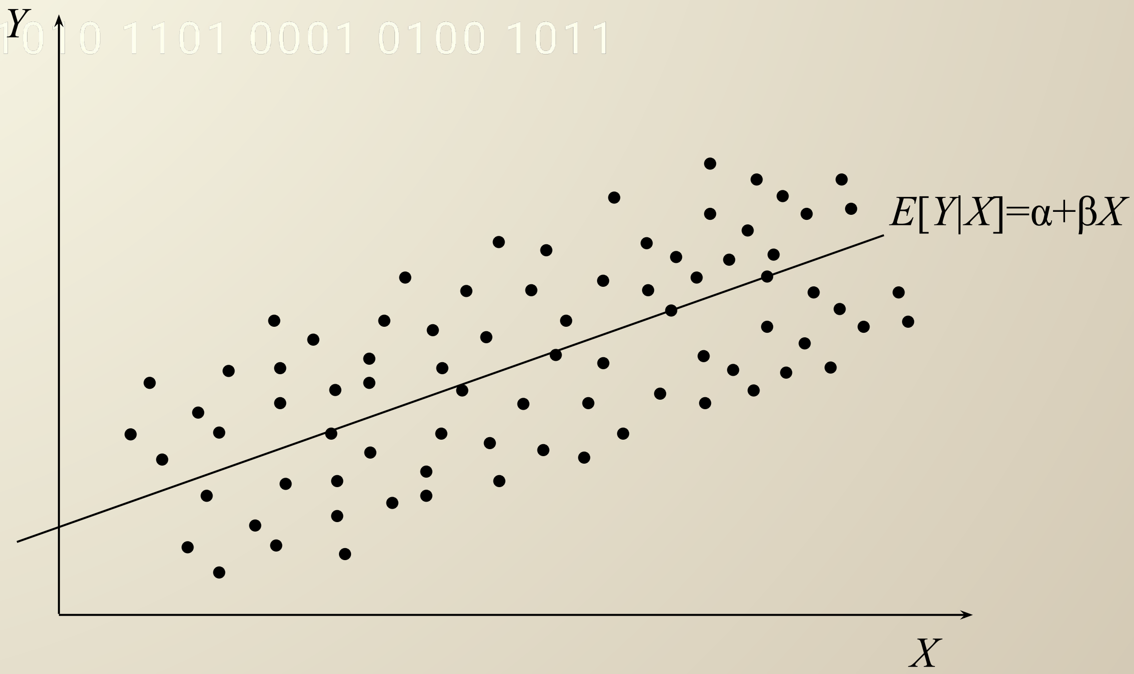


β – коэффициент наклона (slope),
α – свободный коэффициент (intercept)

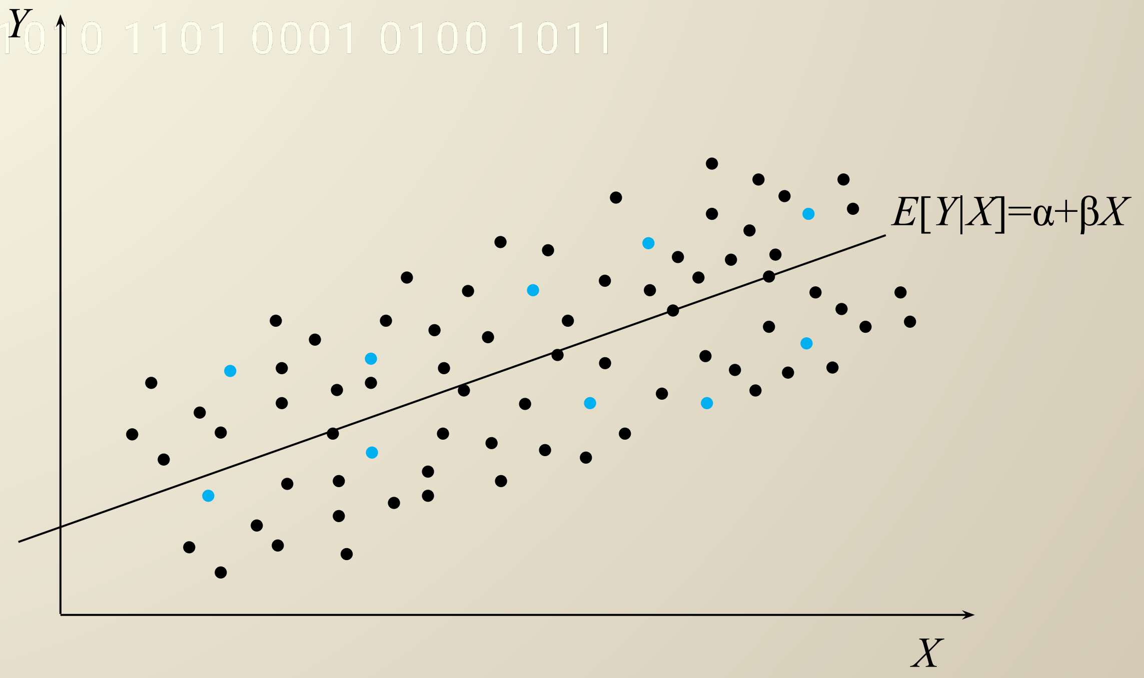
Истинная линия регрессии, определяемая коэффициентами α и β



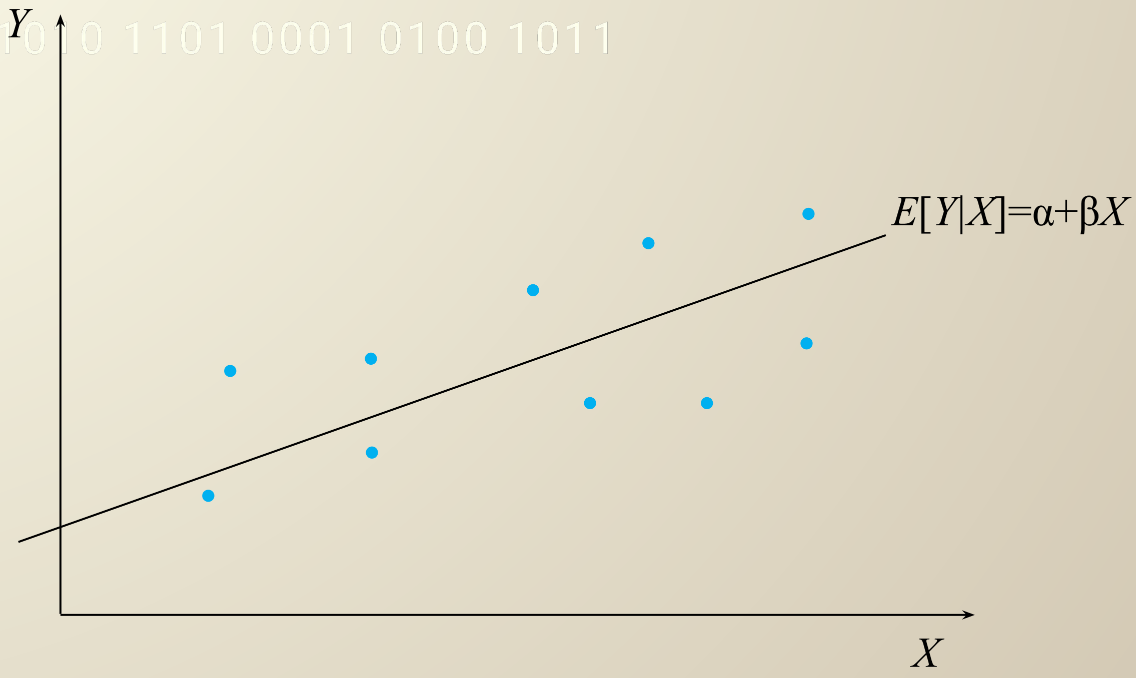
Точки наблюдений разбросаны вокруг этой линии. Их бесконечность.



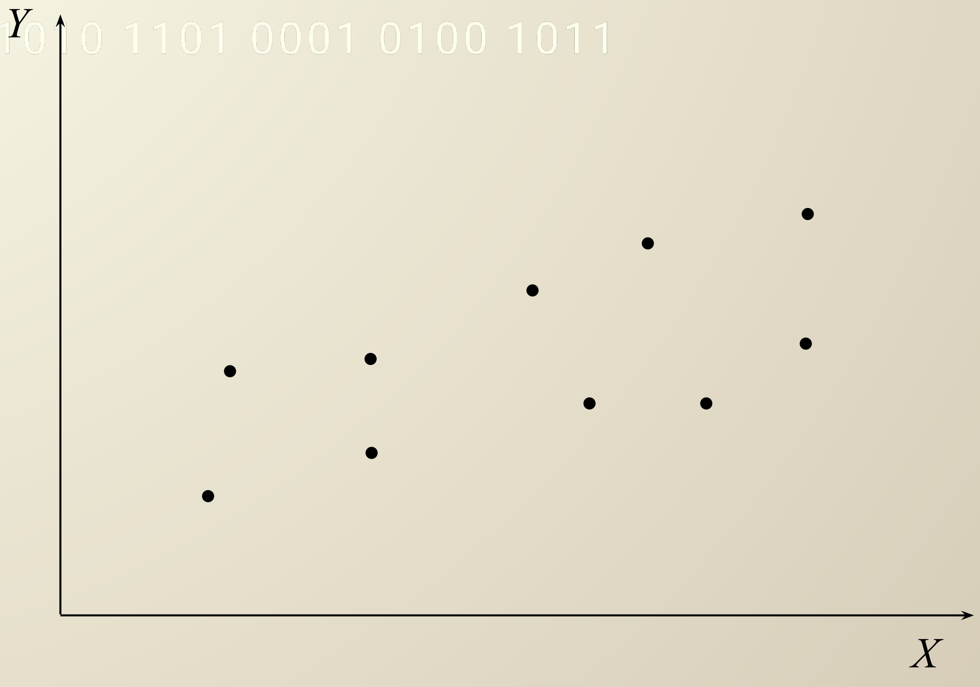
В выборку попадает только их часть



В выборку попадает только их часть

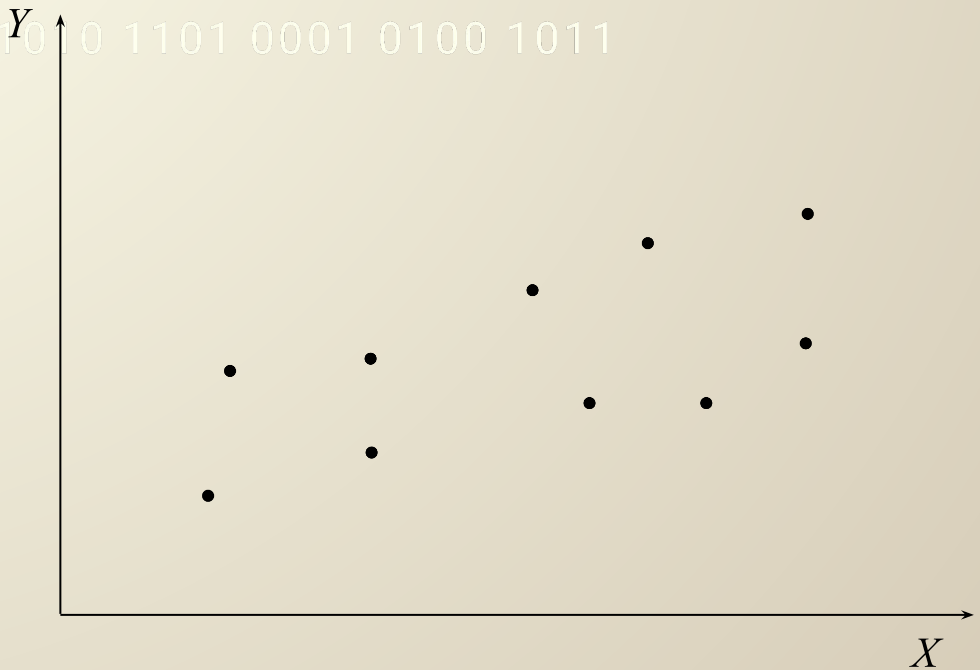


И что мы наблюдаем



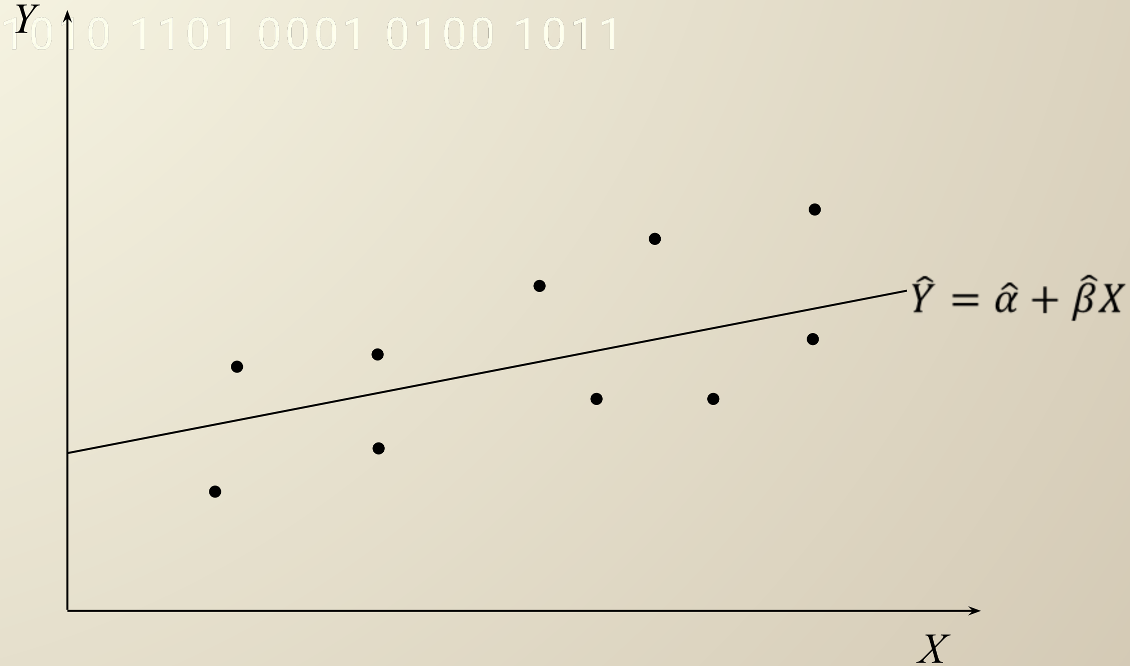
Всего мы наблюдаем *N* точек

Линия, которую мы проводим



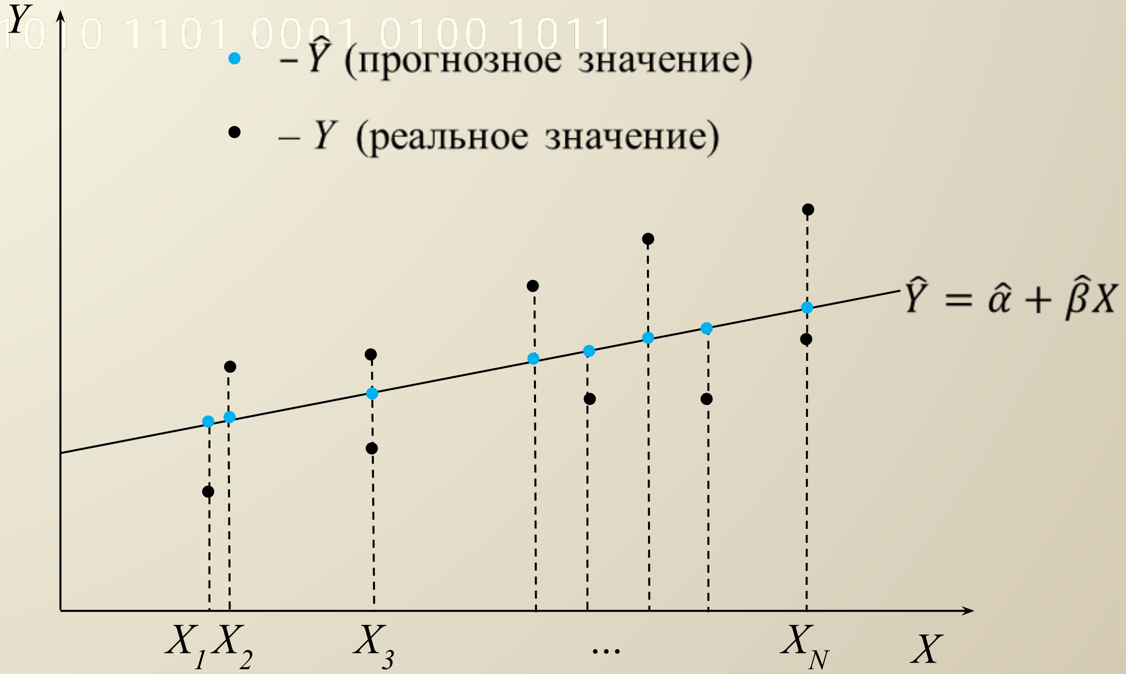
Мы используем эти N точек для того, чтобы построить аппроксимацию неизвестной линии регрессии $E[Y|X] = \alpha + \beta X$. Обозначим эту линию $E\widehat{[Y|X]} = \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$, где $\hat{\alpha}$ - статистическая оценка α, а $\hat{\beta}$ - оценка β. $\hat{Y}$ называется прогнозным значением переменной Y

Линия, которую мы проводим

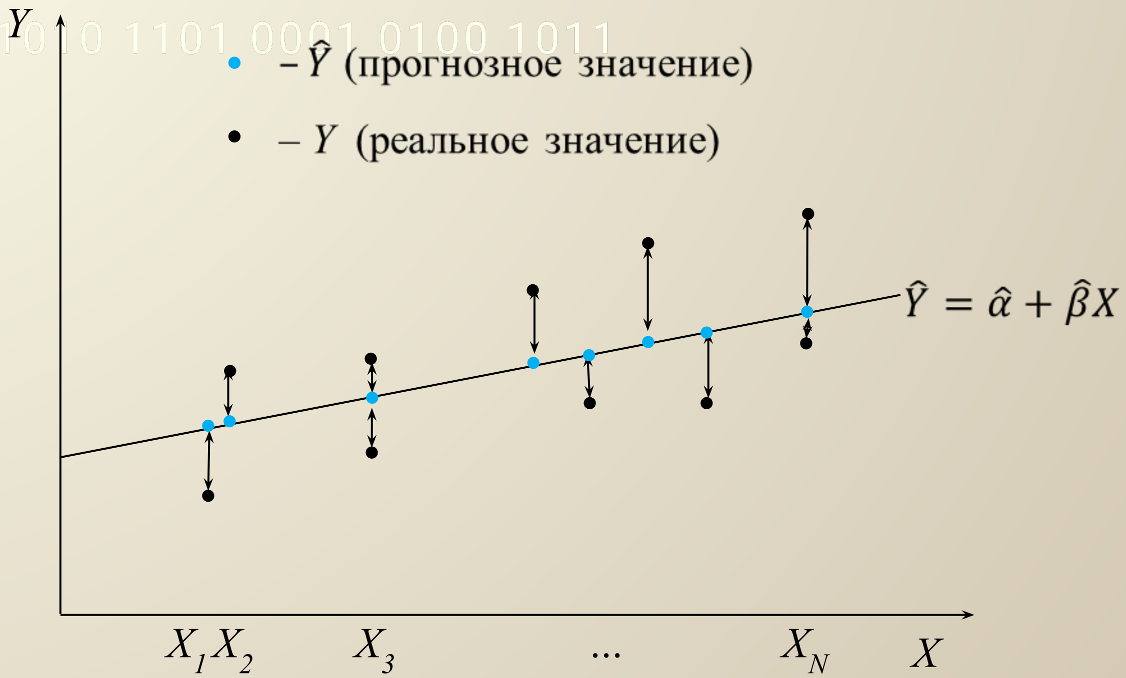


Проводим прямую через центр скопления точек облака наблюдений, т. е. таким образом, чтобы точки облака наблюдений были одновременно к этой линии близки.

Реальные и прогнозные значения



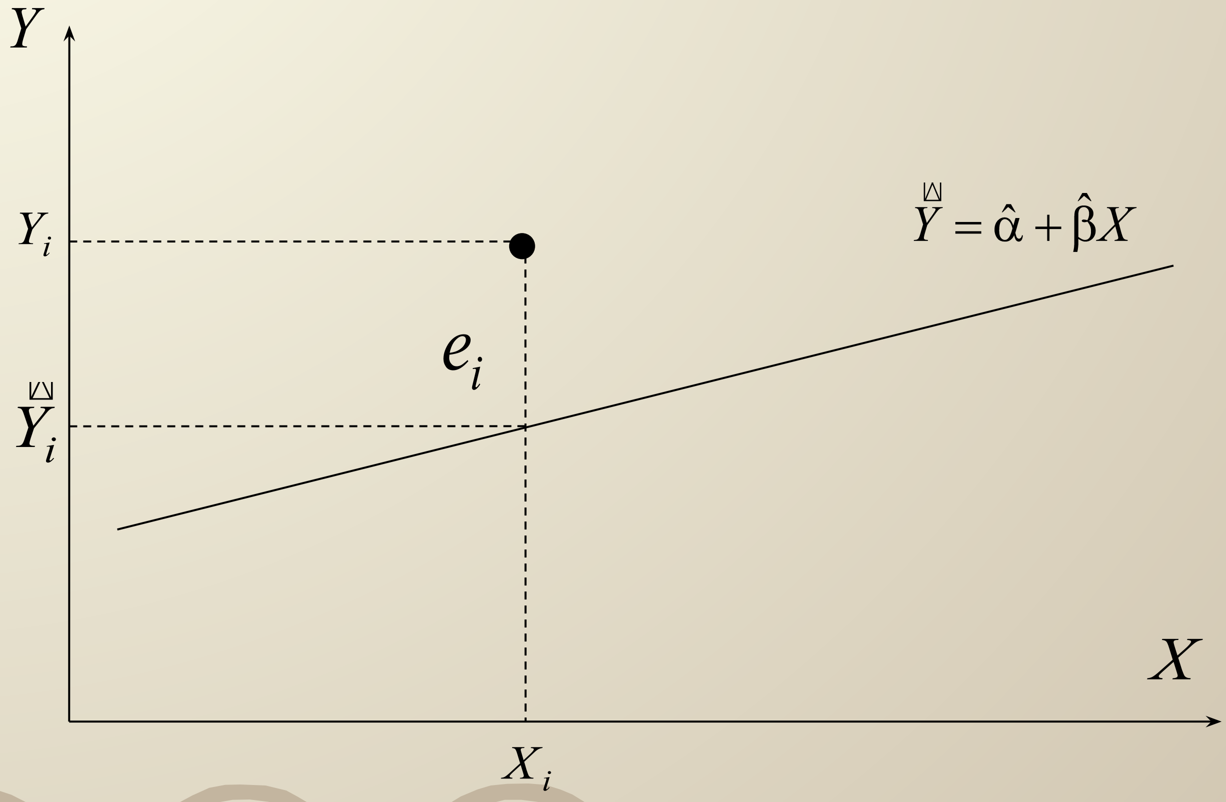
Разницу между реальным и прогнозным значением назовем остатком



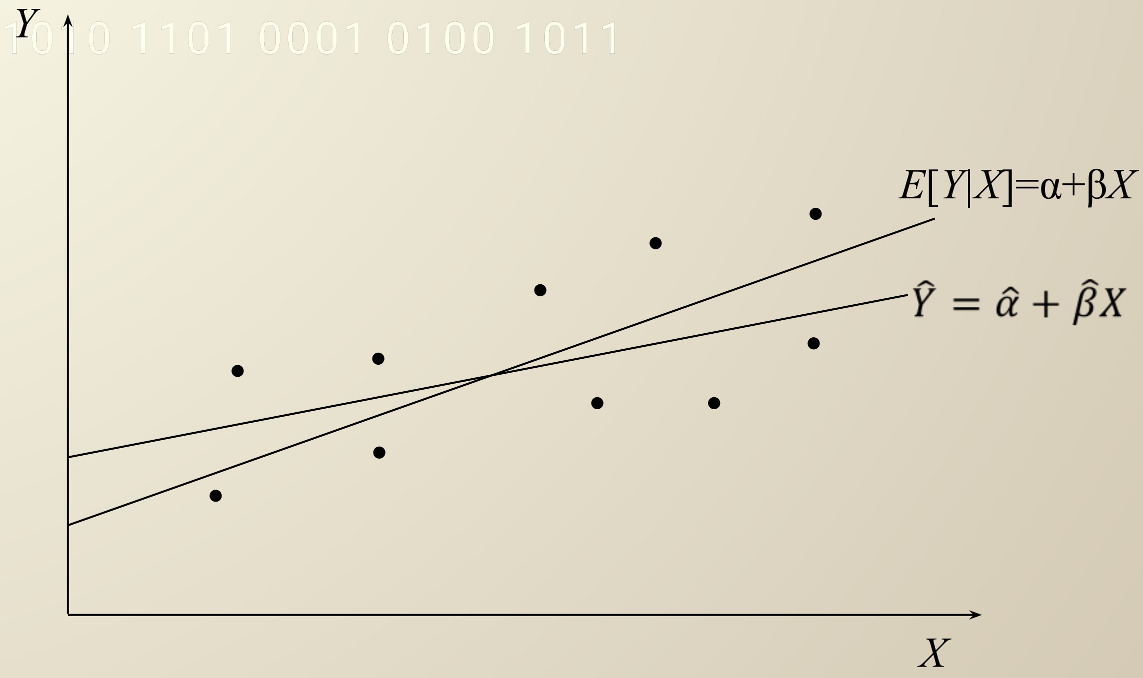
$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

остатки могут быть положительными и отрицательными

Рассмотрение остатков на графике



Истинная и оцененная линия регрессии



Мы надеемся, что построенная линия регрессии не очень сильно отличается от истинной, в частности, чем больше объем выборки, тем шансы на то, что линии похожи, возрастают (состоятельность).

Грусть печаль

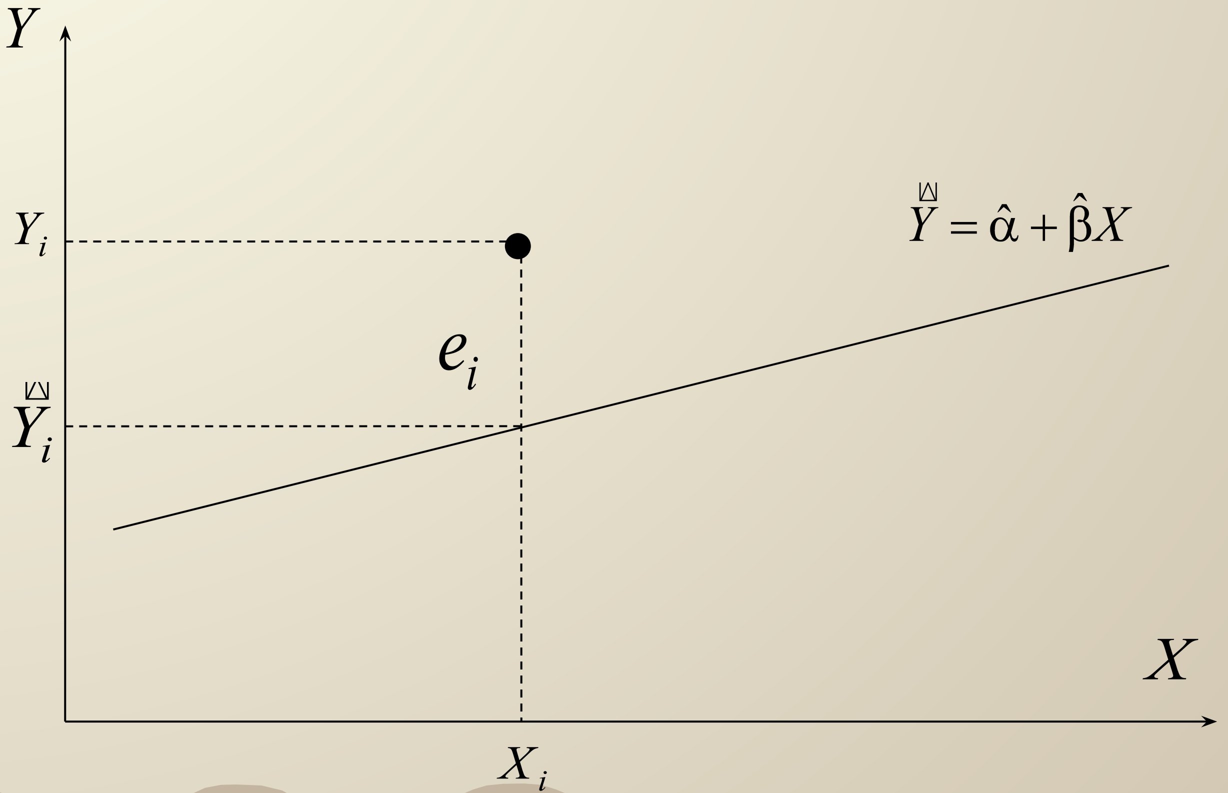
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Метод наименьших квадратов не всегда состоятельный

Как найти «наилучшую» прямую аналитически?

- Выберем меру близости одной точки к прямой.
- Построим интегральную меру близости всех точек к прямой, учитывающую меру близости отдельных точек и выберем ту прямую, для которой эта мера близости минимальна.

Мера близости одной точки к прямой – остаток.



$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$$

Интегральная мера близости

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 = RSS \to \min_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left| e_i \right| = \sum_{i=1}^{N} \left| Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i \right| \to \min_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

Интегральная мера близости

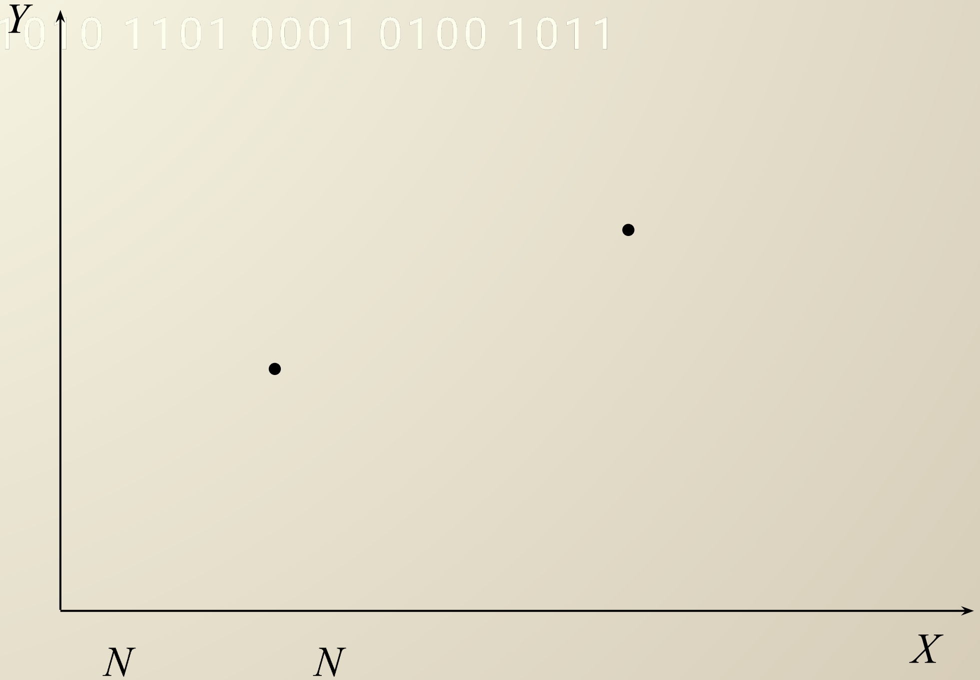
$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 = RSS \to \min_{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left| e_i \right| = \sum_{i=1}^{N} \left| Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i \right| \to \min_{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$

почему бы не минимизировать просто сумму остатков?

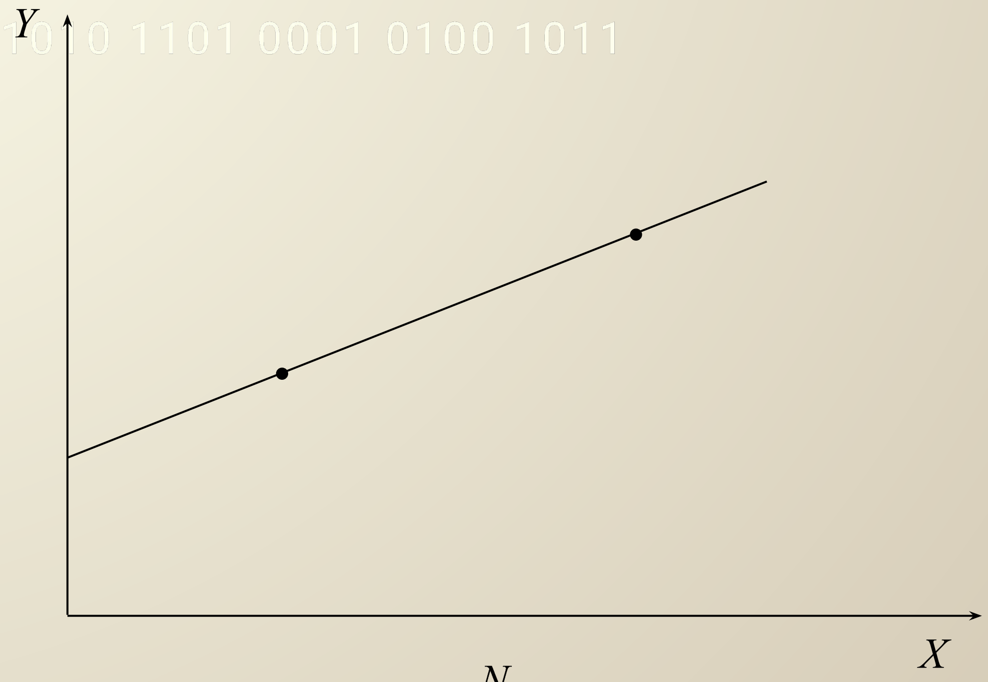
$$\sum_{i=1}^{N} e_i = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) \to \min_{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$

Для какой прямой сумма остатков равна 0?



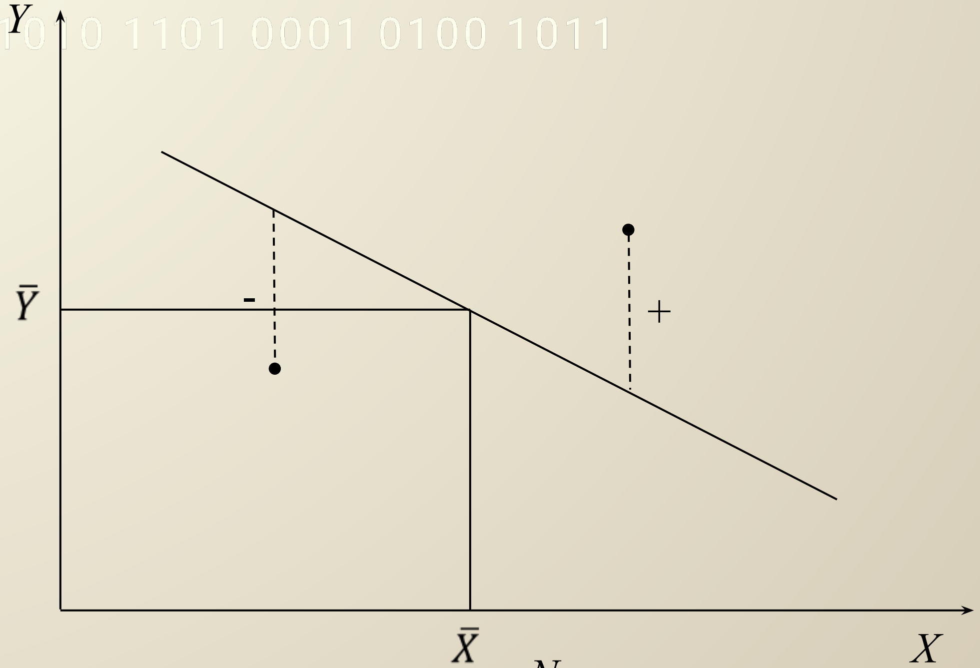
$$\sum_{i=1}^{N} e_i = \sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) \to \min_{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$

для такой



$$e_1 = e_2 = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} e_i = e_1 + e_2 = 0$$

и для такой



$$e_1 = -e_2 \qquad \sum_{i=1}^{N} e_i = e_1 + e_2 = 0$$

Метод наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 \to \min_{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$

Среди всех возможных прямых выбираем ту, для которой сумма квадратов остатков минимальна

Минимизация

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\alpha}} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)X_i = 0$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)X_i = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} e_i = \mathbf{0} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} X_i e_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

Система нормальных уравнений

$$
\begin{cases}
N\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i = \sum\limits_{i=1}^{N} Y_i \\
\hat{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i + \hat{\beta}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i Y_i
\end{cases}
$$

МНК-коэффициенты ПЛРМ

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\hat{\beta} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i}{N} - \dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \dfrac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \right)^2}$$

- коэффициент наклона

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

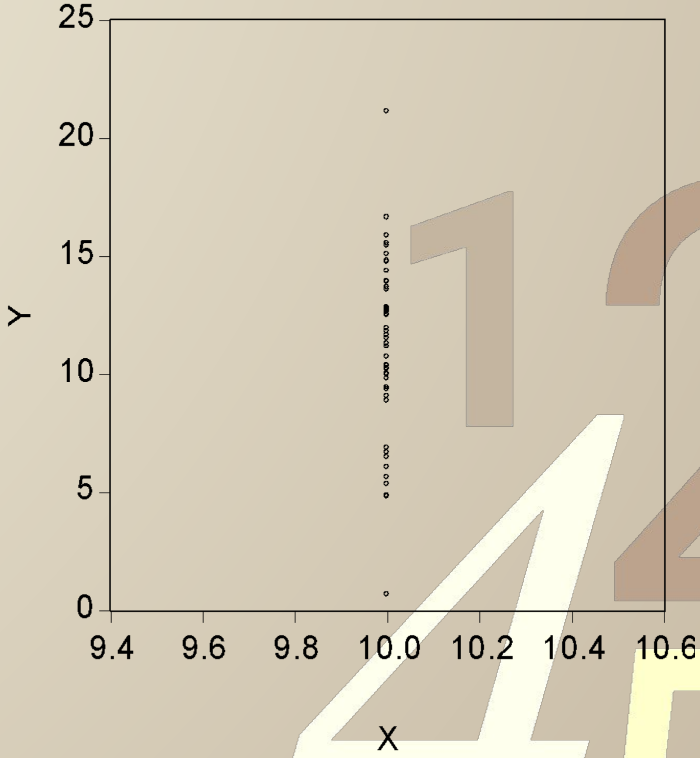
- свободный коэффициент

Другие формы записи коэффициента наклона

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\hat{Cov}(X,Y)}{\hat{Var}(X)}$$

Замечания

- Линия регрессии проходит через точку $(\bar{X}, \bar{Y})$
- Мы предполагаем, что среди X_i есть разные, тогда $d_X \neq 0$. В противном случае, оценок по методу наименьших квадратов не существует.



Теснота линейной корреляционной связи

В качестве меры близости данных наблюдений к линии регрессии служит выборочный коэффициент парной линейной корреляции (парный линейный коэффициент корреляции):

$$r_{xy} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i}{N} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \left(\overline{X}\right)^2}\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} Y_i^2}{N} - \left(\overline{Y}\right)^2}}$$

Вспомним теоретический коэффициент корреляции

$$corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)*Var(Y)}}$$

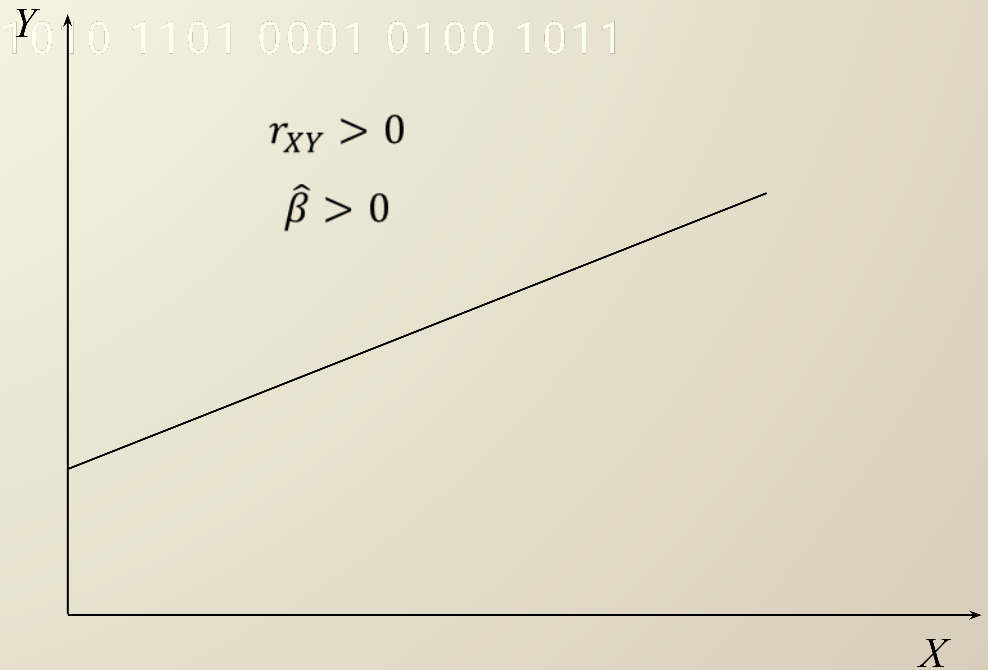
$$r_{xy}=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}X_iY_i}{N}-\overline{X}\,\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}X_i^2}{N}-\left(\overline{X}\right)^2}\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}Y_i^2}{N}-\left(\overline{Y}\right)^2}}=\frac{C\hat{o}v(X,Y)}{\sqrt{V\hat{a}r(X)*V\hat{a}r(Y)}}$$

Связь между коэффициентом корреляции и коэффициентом наклона

$$\hat{\beta} = r_{XY} \frac{d_Y}{d_X} \qquad r_{XY} = \hat{\beta} \frac{d_X}{d_Y}$$

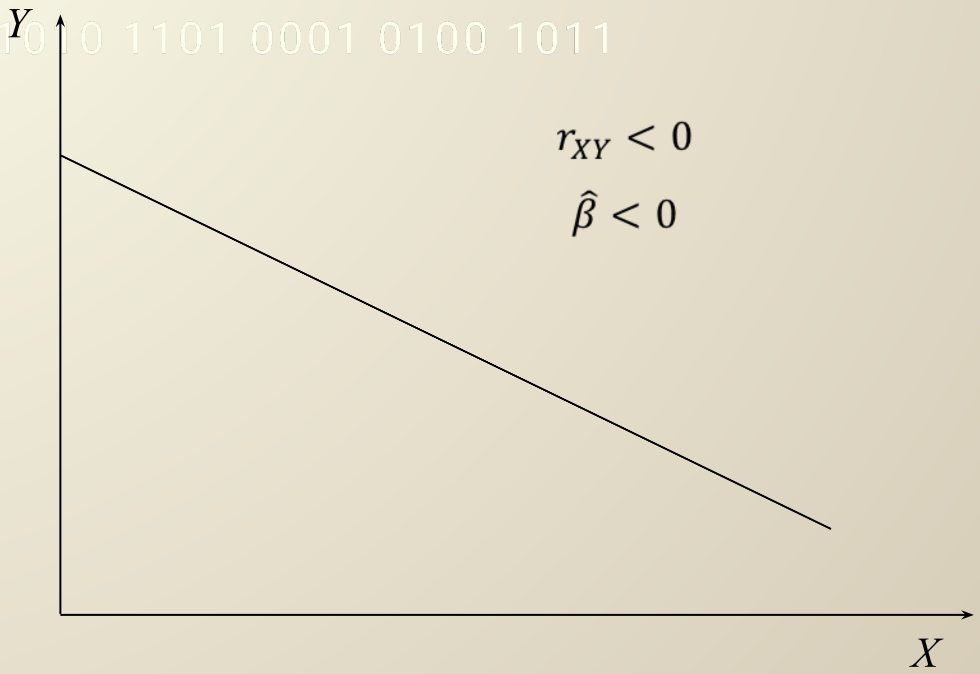
Знак коэффициента наклона линии регрессии и коэффициента корреляции совпадают

Положительная корреляция



С ростом переменной X переменная Y в среднем растет (имеет тенденцию к росту)

Отрицательная корреляция



С ростом переменной X переменная Y в среднем убывает (имеет тенденцию к уменьшению)

Свойства коэффициента корреляции

$$\left| r_{xy} \right| \le 1$$

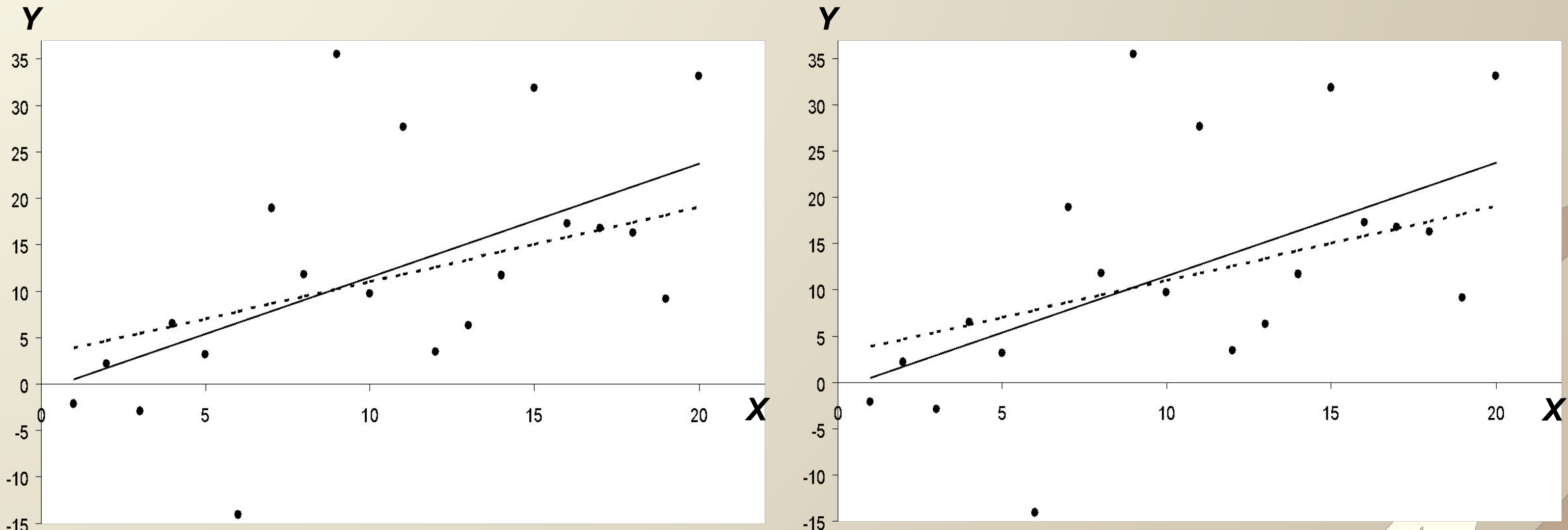
$r_{xy} = \pm 1$ - необходимое и достаточное условием того, что все наблюдаемые значения (X_i, Y_i) лежат на прямой регрессии

Свойства коэффициента корреляции (продолжение)

$r_{XY} = 0$ переменные не связаны линейной корреляционной связью. Линия регрессии проходит горизонтально.

$0 < |r_{xy}| < 1$ между переменными существует линейная корреляционная связь, которая тем лучше (ближе к линейной функциональной), чем ближе коэффициент корреляции по модулю к 1

Уравнение одно, коэффициенты корреляции разные



$Y = 3.0 + 0.8X$

Вопросы для самопроверки

- Что такое функциональная зависимость между переменными.
- Что такое статистическая зависимость.
- Что такое корреляционная зависимость.
- Дайте определение независимых переменных.
- Что такое линия регрессии.
- Какова основная идея метода наименьших квадратов.
- Какие меры близости точек к линии регрессии вы знаете.
- Почему мы называем расчетные коэффициенты линии регрессии «статистическими оценками».
- Как выбрать функциональную форму линии регрессии.
- Форы записи МНК коэффициента наклона регрессионной прямой.
- В чем заключается экономический смысл случайной составляющей регрессионного уравнения.
- Для чего нужен коэффициент корреляции.
- Как связан коэффициент корреляции и коэффициент наклона линии регрессии.
- Перечислите свойства коэффициента корреляции.
- В каком случае линии регрессии по методу наименьших квадратов не существует.