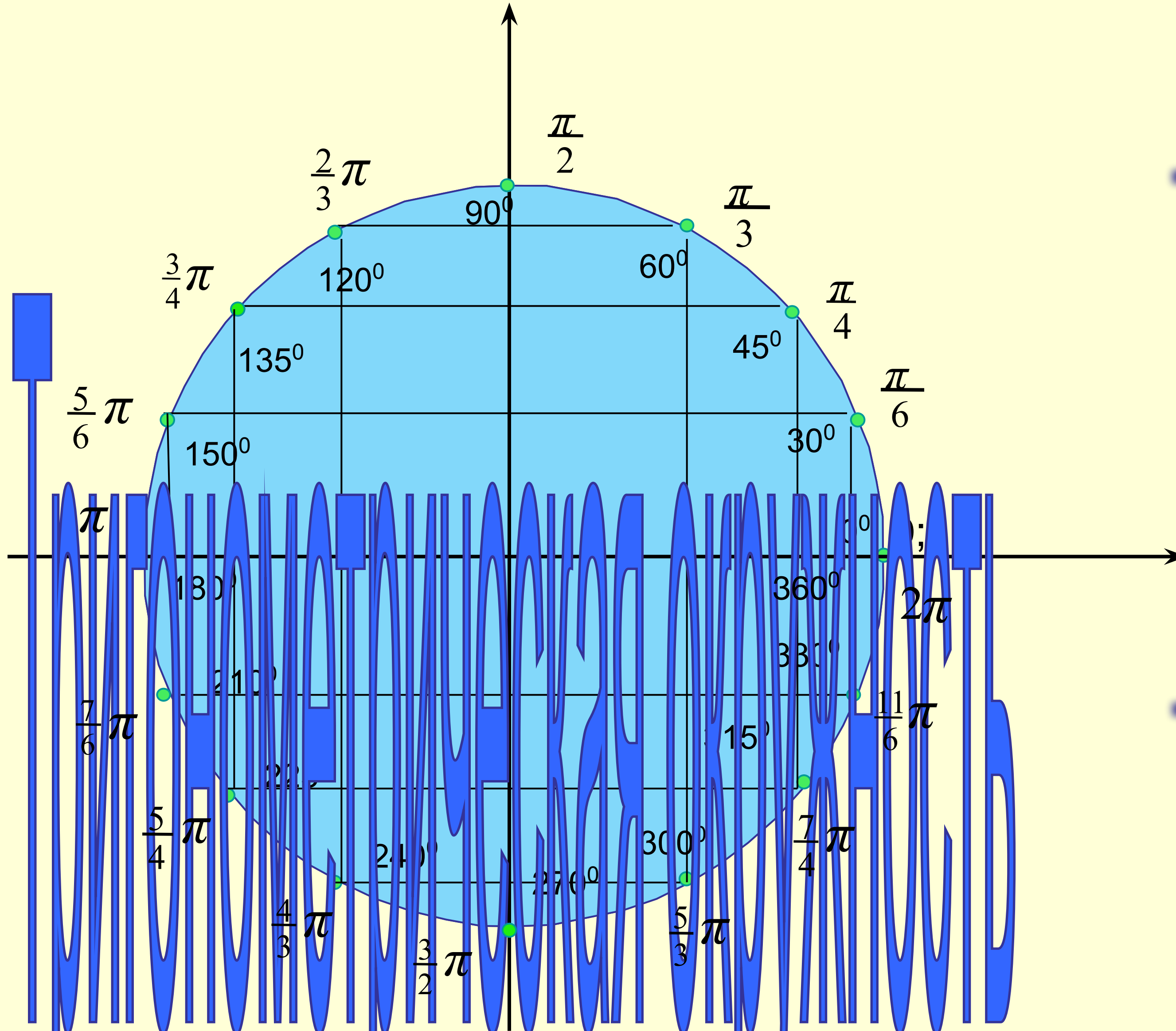
Тренажер

# Тригонометрическая окружность

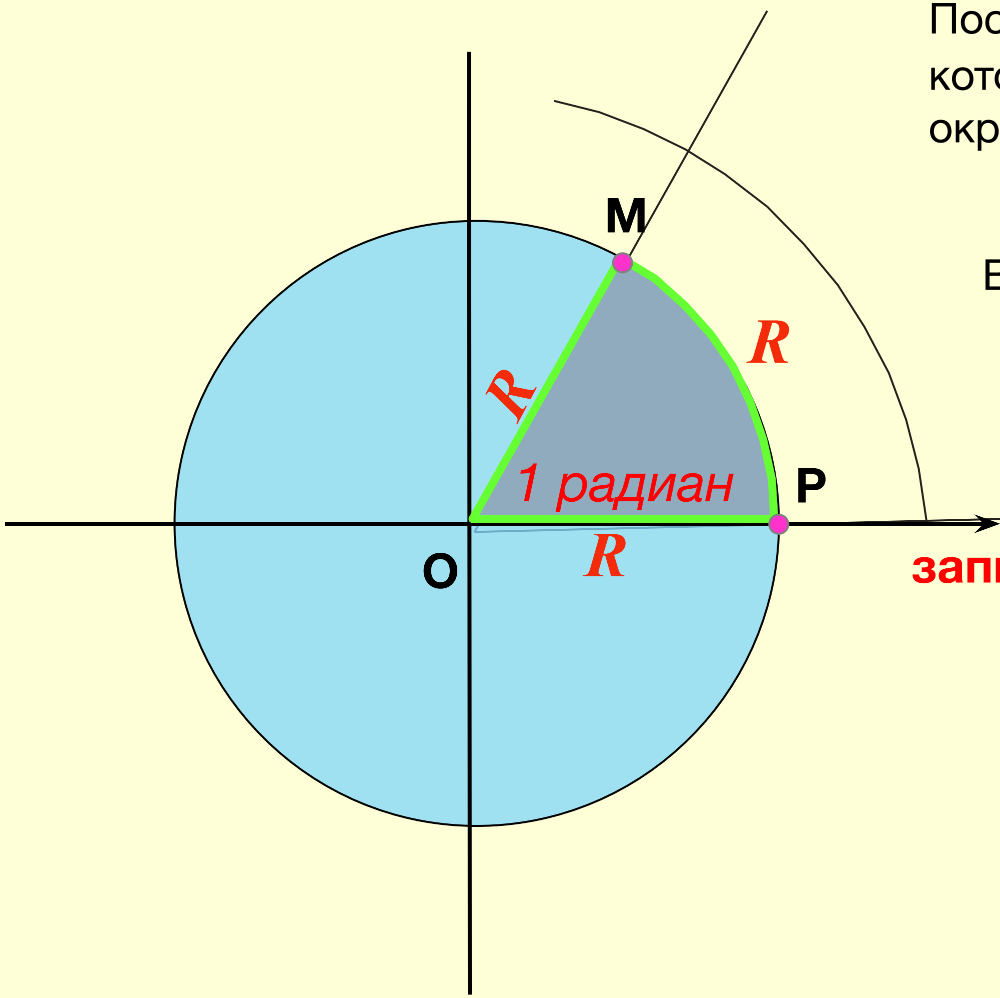



Тренажер

# Содержание

# Радианная мера углов и дуг.

Ты уже знаком с градусной мерой измерения углов. В математике и физике часто пользуются так же радианной мерой. Для того, чтобы познакомиться с таким способом измерения углов и дуг рассмотрим окружность радиуса R.




Построим угол MOP, такой что дуга MP, на которую он опирается, равна радиусу R окружности.

$\smile MP = R$

Величина угла MOP равна *1 радиану*.

$$1рад = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi}$$

**запиши**

$$\pi = 3{,}1459\ldots$$

**1рад. ≈ 57 $^0$17’**

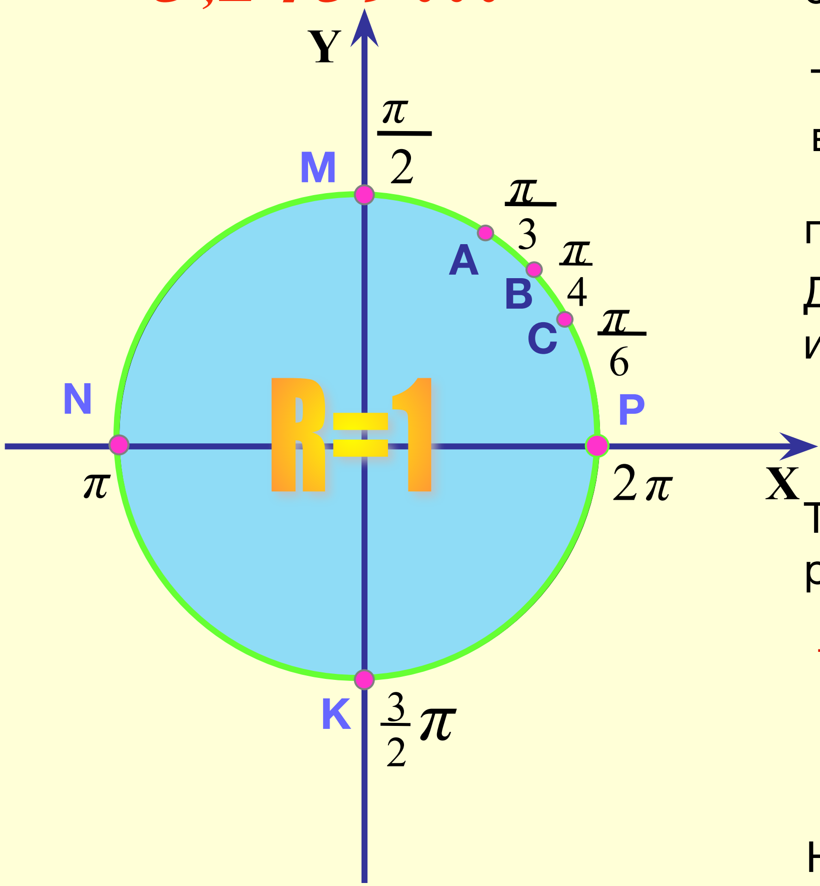
$\smile MP \approx 57^0 17' = 1рад.$

$\angle MOP \approx 57^0 17' = 1 рад.$

# Единичная окружность.

**Окружность, радиус которой равен 1, называется** *единичной*.

$\pi = 3,1459\ldots$




Построим две взаимно перпендикулярных оси: ось абсцисс и ось ординат.

Ты помнишь, что длина окружности выражается формулой : $l = 2\pi R,$

где R – радиус окружности.

Длину единичной окружности удобно измерять в радианах, т.к.

если R=1, то: $l = 2\pi$ (рад.)

Тогда длина дуги половины окружности равна: $\pi$ (рад.)

$\frac{\pi}{2}$ (рад.) - четверть длины окружности,

$\frac{3\pi}{2}$ (рад.) - три четверти длины окружности.

Наименование радиан обычно опускают.

Точки M,P,K,N – назовем узловыми.

Отметим так же точки: A,B,C.

Рассмотри рисунки 1 и 2 единичной окружности.

Из рисунков видно, что величину угла поворота шарика вокруг точки О, а так же величину дуги единичной окружности, можно задавать двумя способами:

## в градусной мере

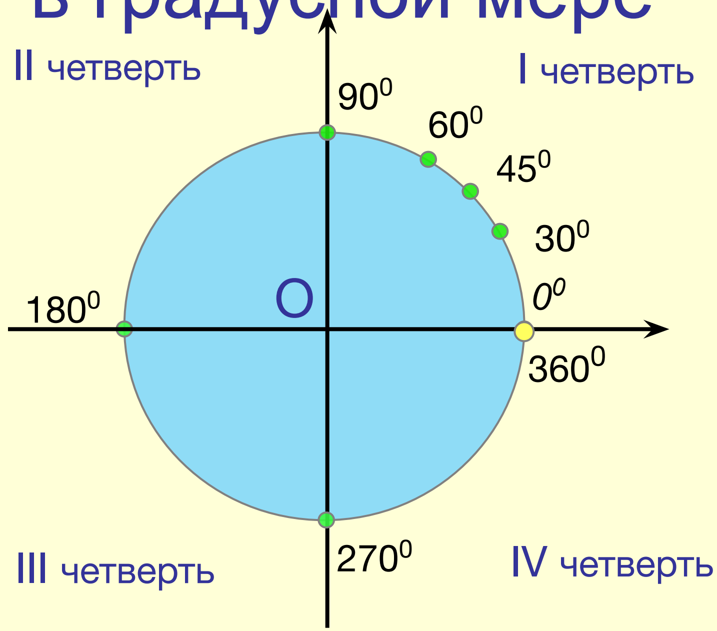



Рис.1

## в радианной мере

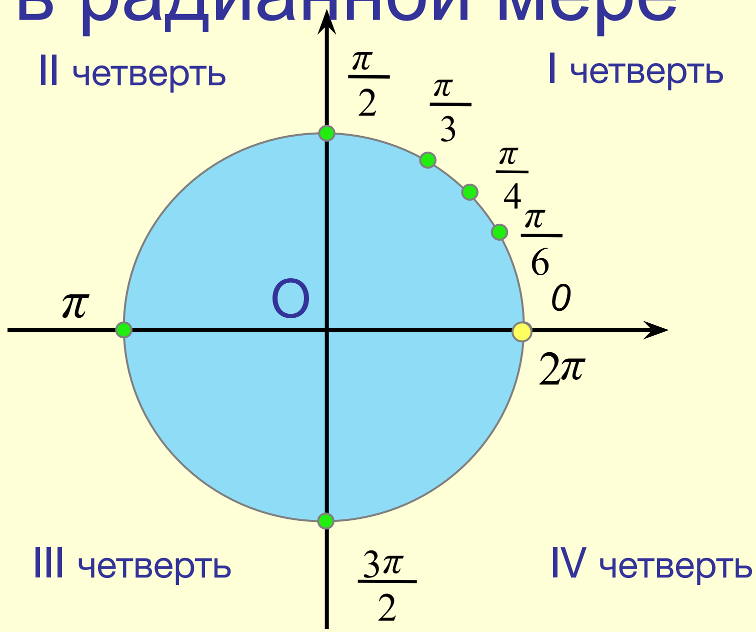



Рис.2

Теперь можно составить таблицу измерения углов в градусной и радианной мерах.

**Выучи!**

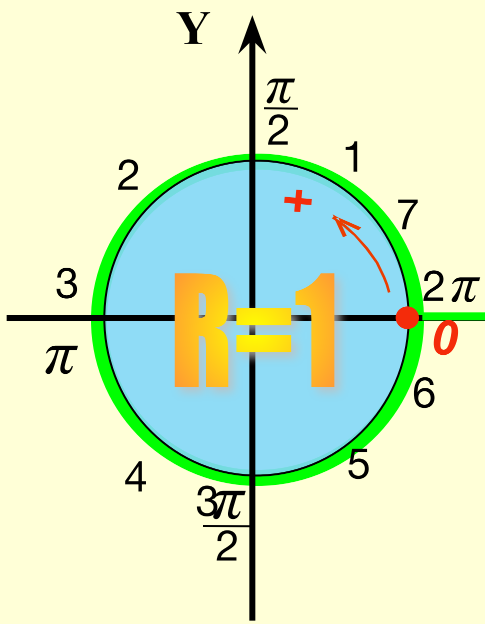
| Градусная мера | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $180^0$ | $270^0$ | $360^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Радианная мера | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

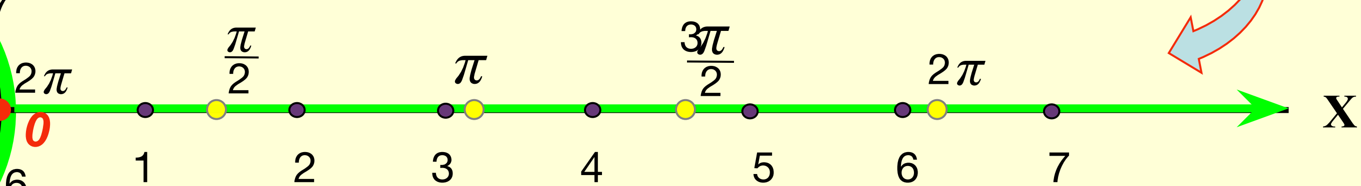
Рассмотри, как можно установить соответствие между множеством действительных чисел на числовой прямой и точками единичной окружности.

$\pi = 3{,}1459\ldots$

Координатный луч с началом в точке ***0*** «намотаем», как нить, на окружность сначала в положительном направлении – против хода часовой стрелки, потом в отрицательном направлении – по ходу часовой стрелки.

Щелкни для этого точку.



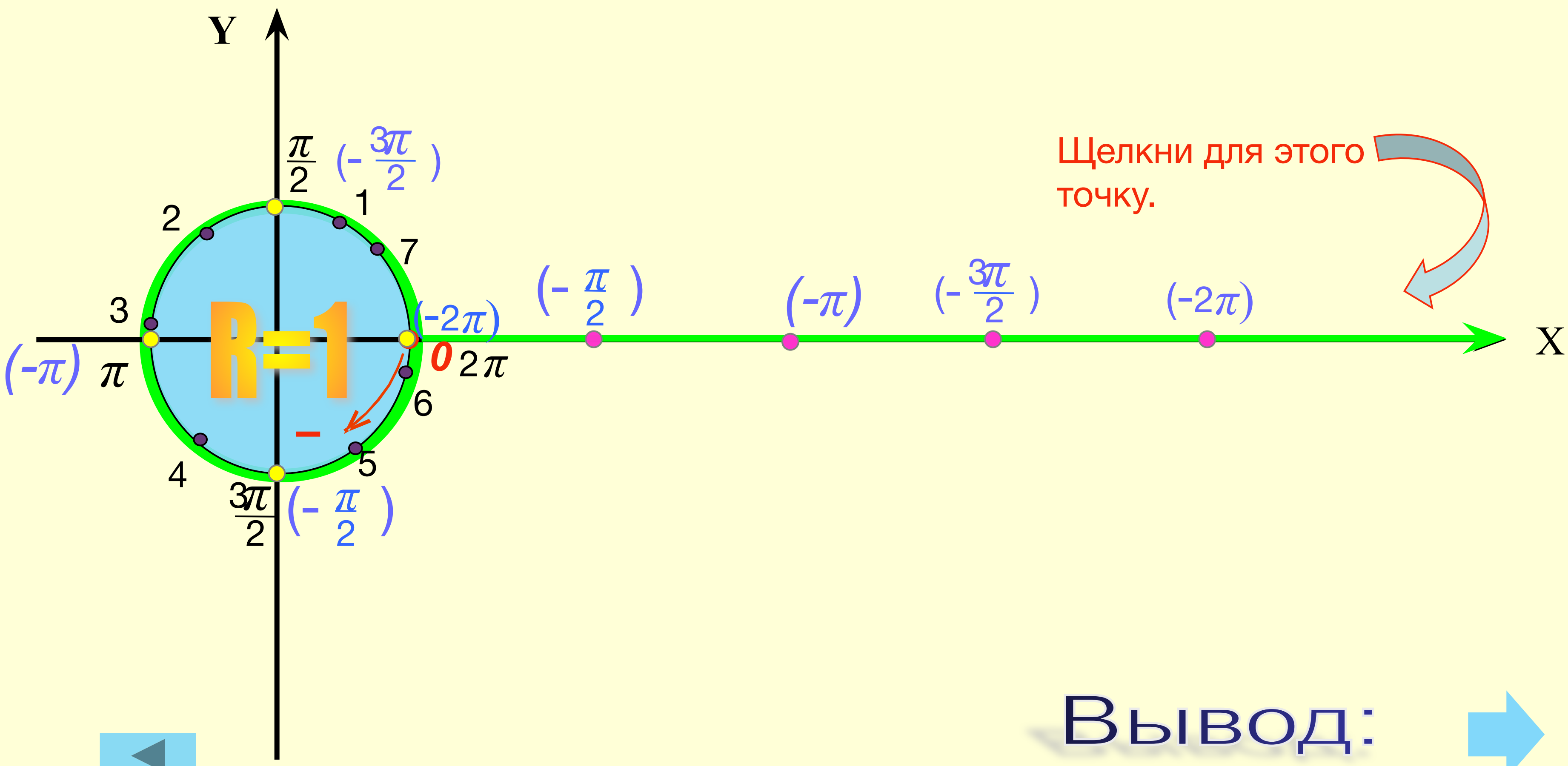




Понятно, что «наматывание» можно продолжать бесконечно.

А теперь «наматываем» в отрицательном направлении.

«Наматываем» в отрицательном направлении.
Покажем только узловые точки.

$\pi = 3{,}1459\ldots$




Вывод:

# Вывод:

При рассмотрении единичной окружности удобно использовать радианную меру, т.к. при этом числа, выражающие длину дуги и длину окружности кратные числа.

Каждой точке окружности соответствует не одно, а бесконечное множество действительных чисел.

Каждому числу на окружности соответствует одна (единственная) точка.

Например, точке М, кроме числа $\frac{\pi}{2}$, соответствуют числа :

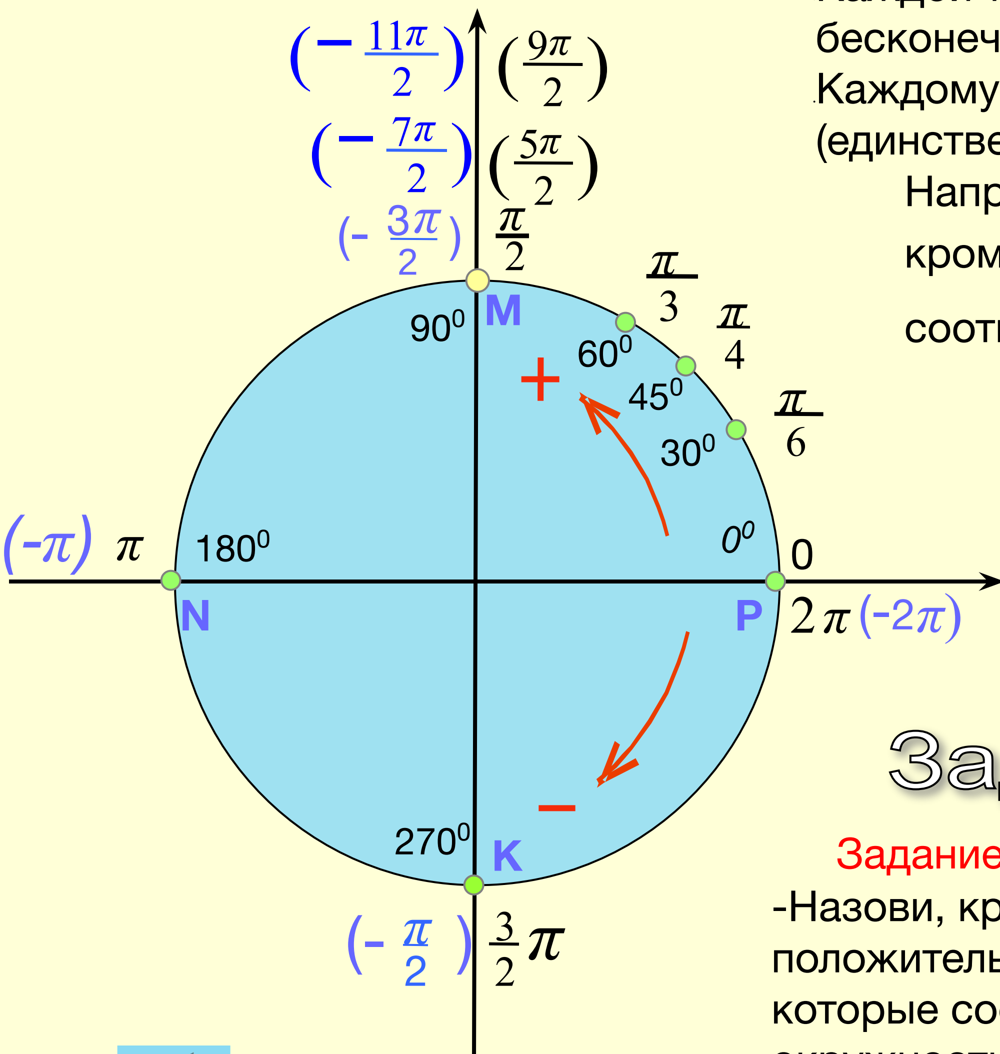
$$\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}+4\pi=\frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-6\pi=-\frac{11\pi}{2}$$




## Задание 1:

Задание выполни письменно!

-Назови, кроме отмеченных, еще по одному положительному и отрицательному числу, которые соответствуют выделенным точкам окружности.

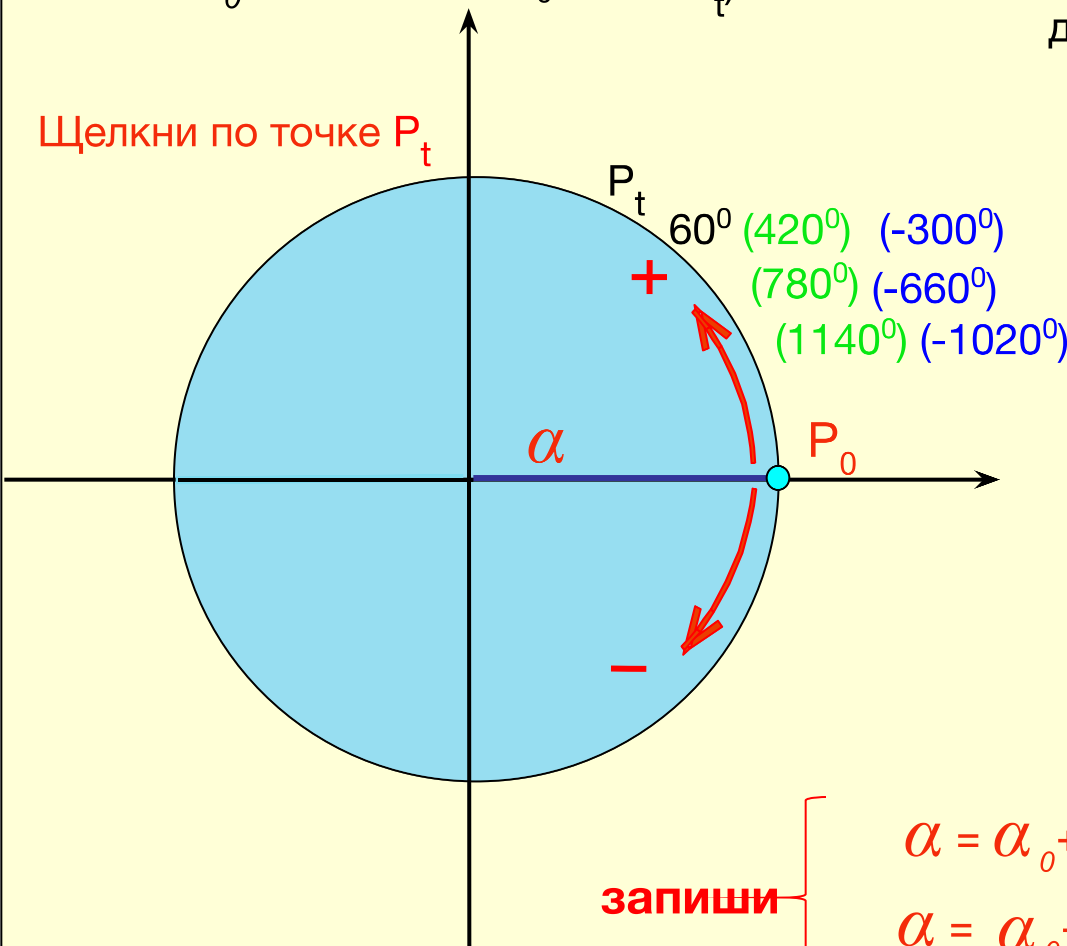
## 1) Запись чисел,соответствующих одной точке единичной окружности.

Будем рассматривать все точки единичной окружности как точки, полученные поворотом точки $P_0$ вокруг начала координат на некоторый угол.

$\alpha_0 = 60^0$ $(P_0 \longrightarrow P_t)$.

Проследи, как будет меняться угол поворота для точки $P_t$ :

Щелкни по точке $P_t$




| |
|---|
| **1 поворот: $60^0 - 360^0 = -300^0$** |
| **2 поворот: $60^0 - 2\cdot360^0 = -660^0$** |
| **3 поворот: $60^0 - 3\cdot360^0 = -1020^0$** |
| * * * * * * * * * * * * * * * |
| **k поворот: $60^0 - k\cdot360^0$** |

Вращаться можно как в положительном, так и в отрицательном направлениях.

# Вывод:

Для точки $P_t$ все углы поворота можно записать так:

**запиши**

$$\alpha = \alpha_0 + 360^0 k \quad ,\text{где } k = \pm1, \pm2, \pm3 \pm \ldots$$

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k \quad ,\text{где } k = \pm1, \pm2, \pm3 \pm \ldots$$

# Задание 2:

Запиши **все** числа, соответствующие выделенным точкам единичной окружности.

Задание выполни письменно!

$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ ,где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm ..$ .

Щелкни по точке, что бы проверить себя.

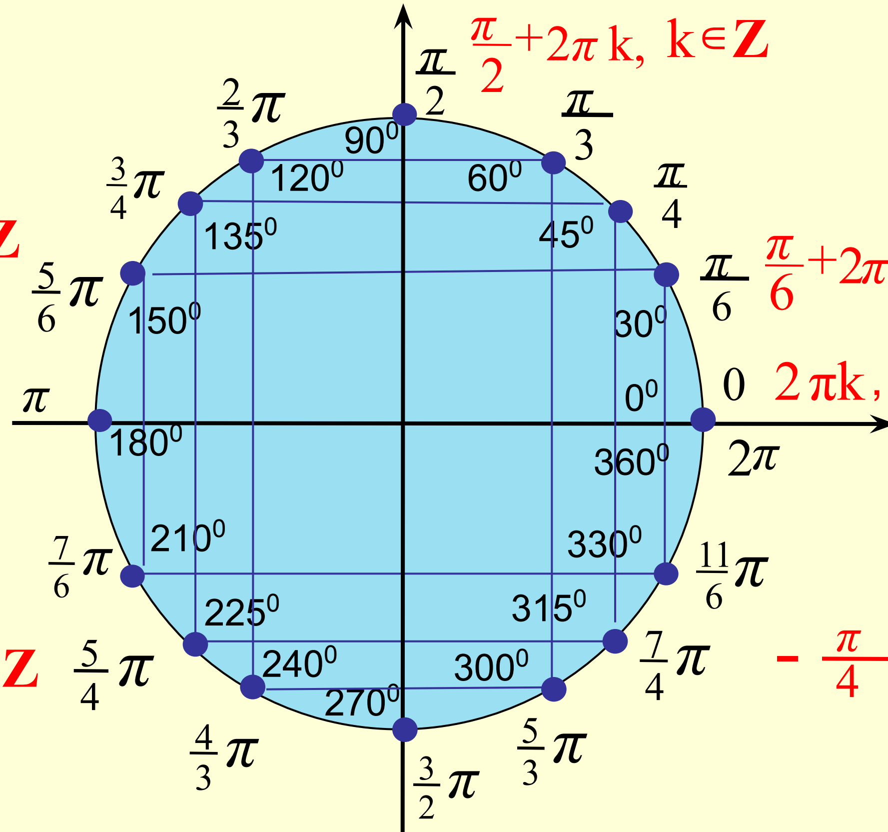
$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$

$\pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

$2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$




$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

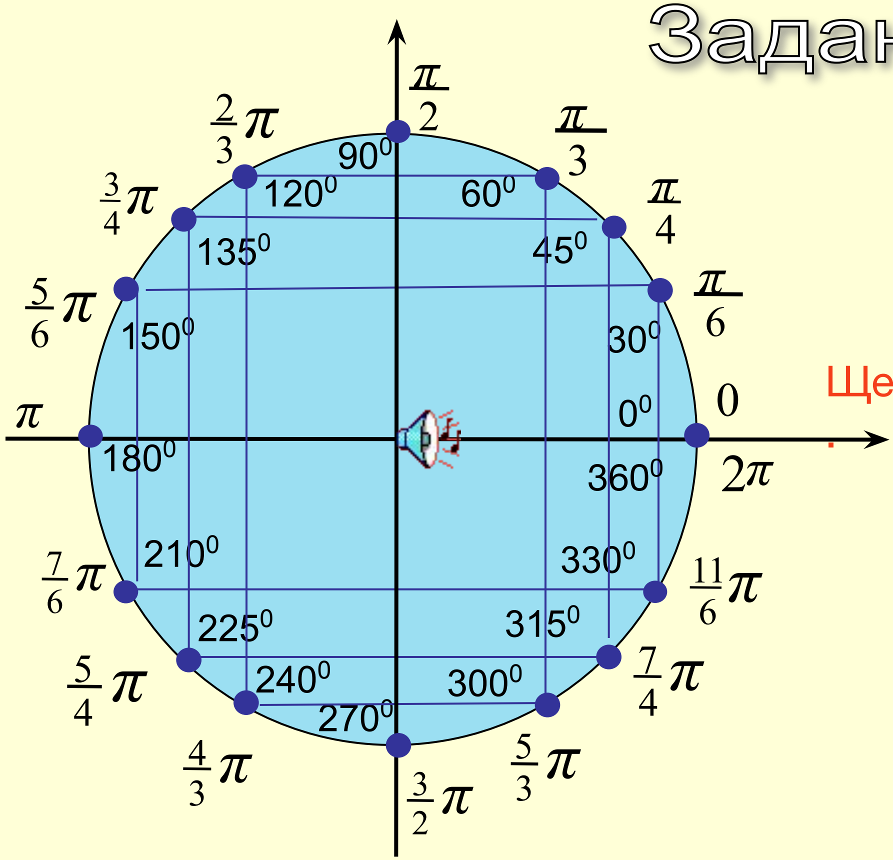
$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$

## Перед тобой модель единичной окружности

# Задание 3:

-Найди на единичной окружности точки, соответствующие числам:




Щелкни по точке

| | |
|---|---|
| $\frac{\pi}{3}+2\pi$ | |
| $\frac{3\pi}{2}+6\pi$ | |
| $4\pi-\frac{5\pi}{4}$ | |
| $\frac{\pi}{6}-2\pi$ | |
| $-\frac{2\pi}{3}+4\pi$ | |
| $-\frac{3\pi}{2}$ | |
| $\frac{8\pi}{3}$ | |
| $\frac{7\pi}{3}$ | |

Забей мяч

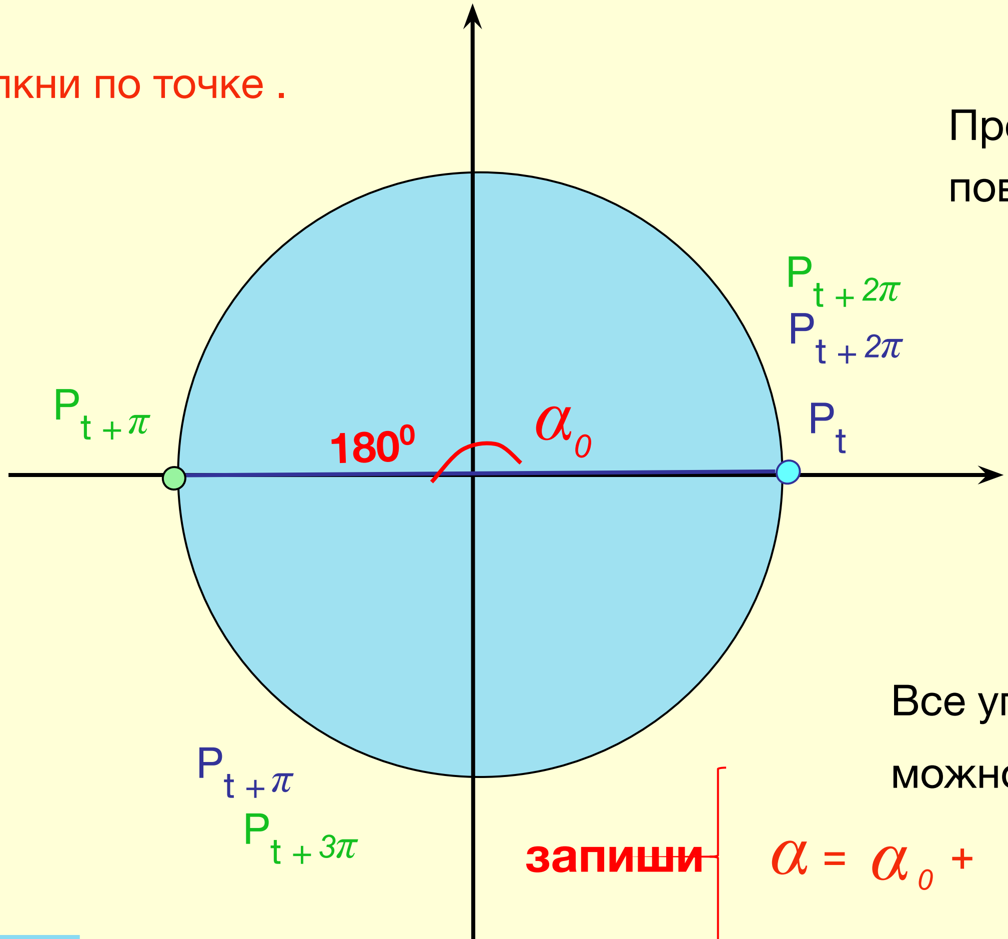
Перед тобой модель единичной окружности

## 2) Запись чисел, соответствующих двум диаметрально противоположным точкам единичной окружности.

Пусть даны две диаметрально противоположные точки $P_t$ и $P_{t+\pi}$ единичной окружности. Зададим для точки $P_t$ угол поворота : $\alpha_0$

Тогда, для точки $P_{t+\pi}$ угол поворота: $\alpha_0 + \pi$

Щелкни по точке .




Проследи как будет меняться угол поворота для точек $P_t$ и $P_{t+\pi}$

| $P_t$ | $P_{t+\pi}$ |
|---|---|
| $\alpha_0$ | $\alpha_0 + \pi$ |
| $\alpha_0 + \pi$ | $\alpha_0 + 2\pi$ |
| $\alpha_0 + 2\pi$ | $\alpha_0 + 3\pi$ |

* * * * * * * * * * * * *

Все углы поворота для точек $P_t$ и $P_{t+\pi}$ можно записать так:

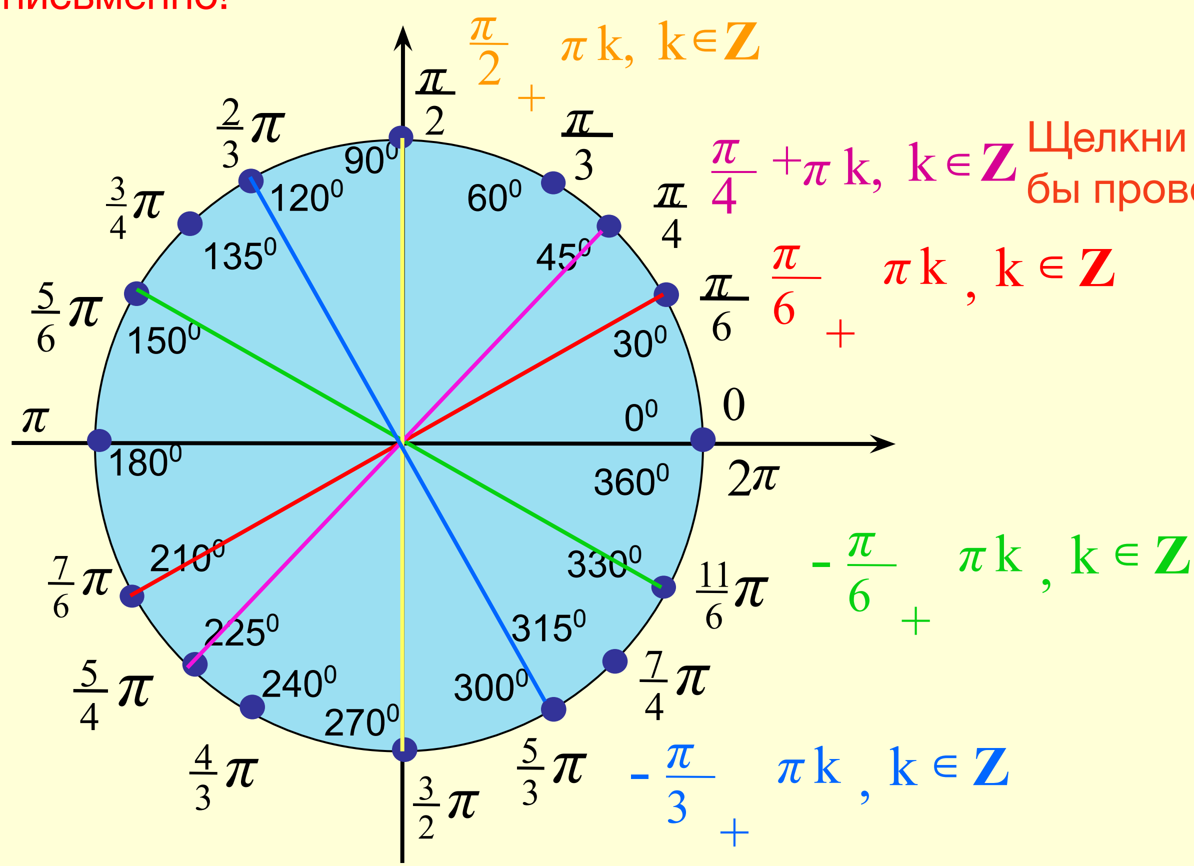
**запиши** $\alpha = \alpha_0 + \pi k$ ,где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm ..$

# Задание 4:

Запиши все числа, соответствующие двум диаметральным выделенным точкам единичной окружности. $\alpha = \alpha_0 + \pi k$ ,где $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm ..$.

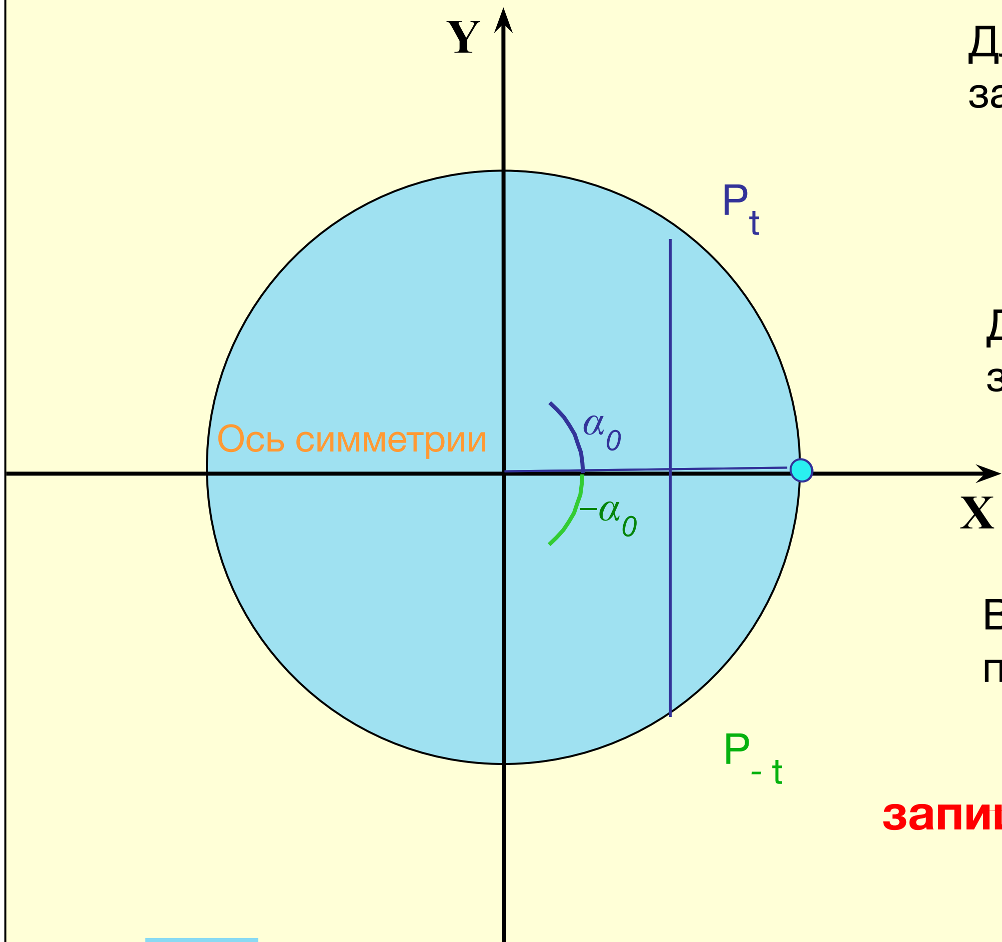
Задание выполни письменно!

Щелкни по точке, что бы проверить себя.




**Перед тобой модель единичной окружности**

## 3) Запись чисел, соответствующих двум точкам единичной окружности, симметричным относительно оси абсцисс.




На окружности даны две симметричные точки

$P_t$ и $P_{-t}$ .

Для точки $P_t$ все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$$

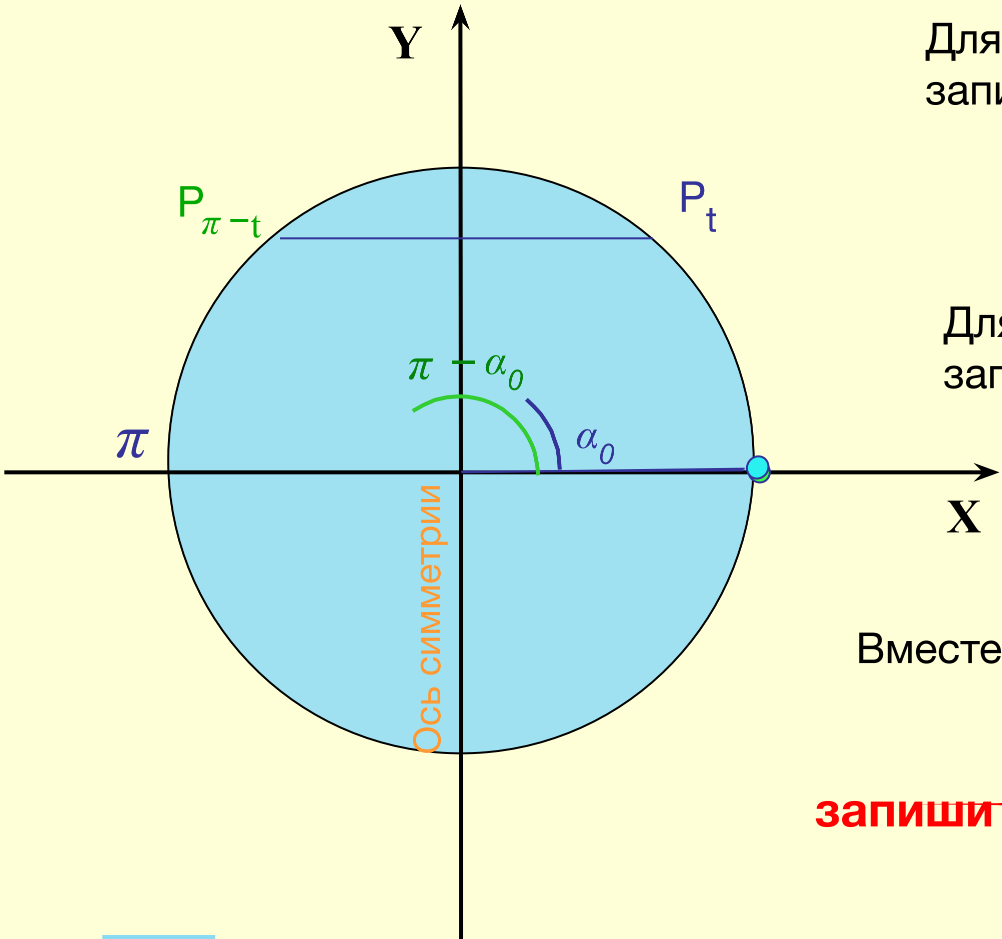
Для точки $P_{-t}$ все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = -\alpha_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

Вместе для точек $P_t$ и $P_{-t}$ все углы поворота:

**запиши** $\left\{ \alpha = \pm\alpha_0 + 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z} \right.$

## 4) Запись чисел, соответствующих двум точкам единичной окружности, симметричным относительно оси ординат.




На окружности даны две симметричные точки $P_t$ и $P_{\pi-t}$.

Для точки $P_t$ все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$$

Для точки $P_{-t}$ все углы поворота можно записать так:

$$\alpha = \pi - \alpha_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

Вместе для точек $P_t$ и $P_{\pi-t}$ все углы поворота:

**запиши** $$\left\{ \alpha = (-1)^k \alpha_0 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \right.$$

# Задание 5:

Запиши все числа, соответствующие двум симметричным выделенным точкам единичной окружности.

Задание выполни письменно!

$$\alpha = \pm\alpha_0 + 2\pi k\ ,k\in Z$$

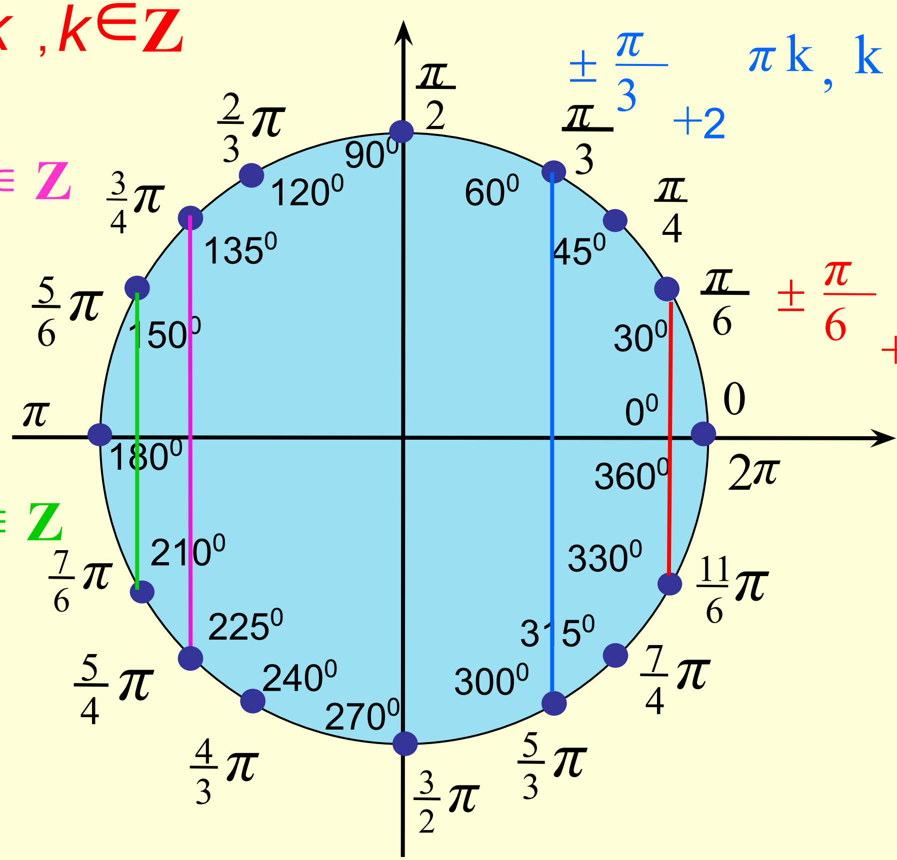
$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

Щелкни по точке, что бы проверить себя.

$\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

$\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$




Перед тобой модель единичной окружности

# Задание 6:

Запиши все числа, соответствующие двум симметричным выделенным точкам единичной окружности.

Задание выполни письменно!

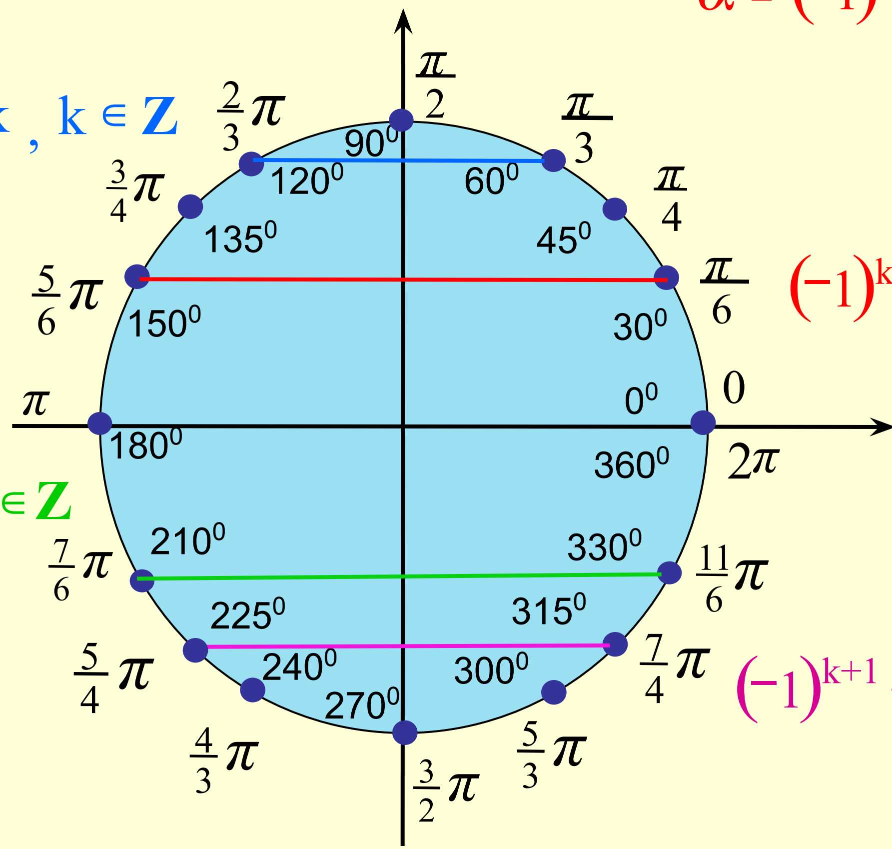
$$\alpha = (-1)^k \alpha_0 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

$(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

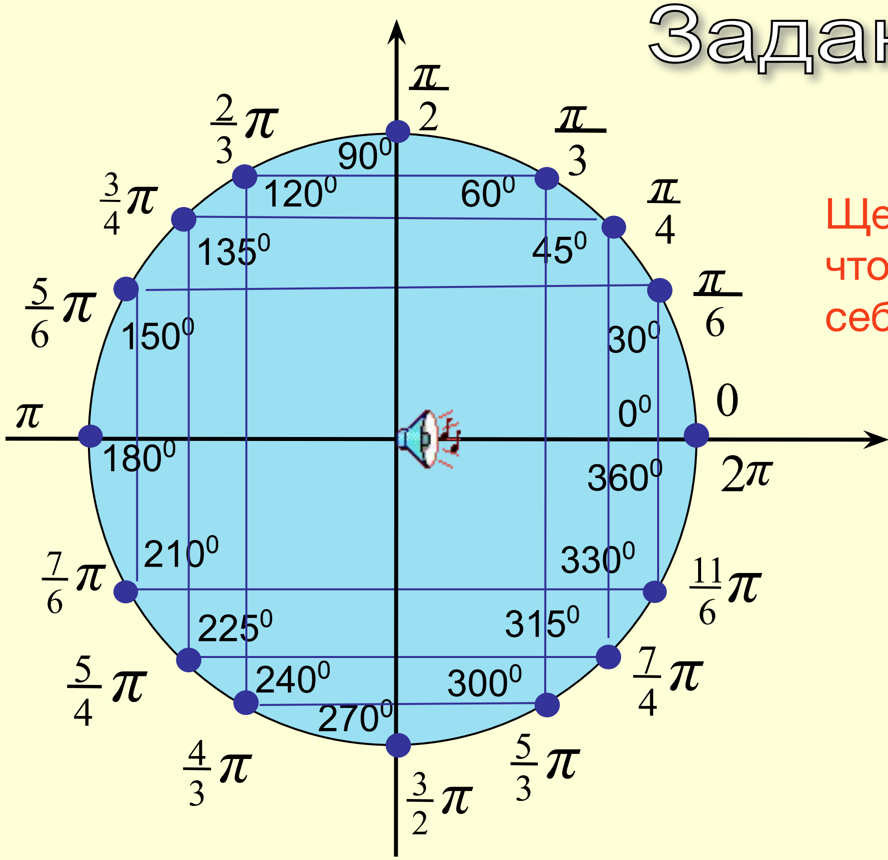



Щелкни по точке, что бы проверить себя.

Перед тобой модель единичной окружности

# Задание 7:

-Найди на единичной окружности точки, соответствующие числам:




Щелкни по точке, что бы проверить себя .

| | |
|---|---|
| $-\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$ | |
| $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ | |
| $(-1)^{k}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ | |
| $(-1)^{k}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$ | |
| $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$ | |

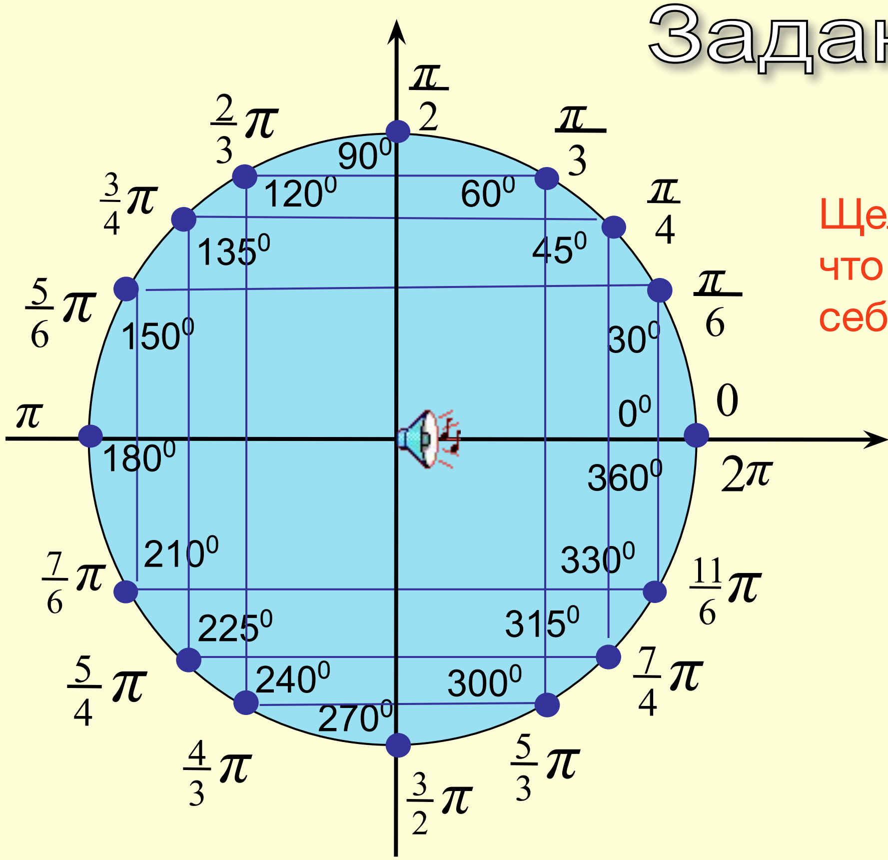
Забей в кажую клетку 2 мяча

## Перед тобой модель единичной окружности

# Задание 8:

-Найди на единичной окружности точки, соответствующие числам:

Щелкни по точке, что бы проверить себя.




| | |
|---|---|
| $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in Z$ | |
| $\frac{\pi}{3} + \pi k, \; k \in Z$ | |
| $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in Z$ | |
| $\frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in Z$ | |
| $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in Z$ | |

Забей в кажую клетку 2 мяча

**Перед тобой модель единичной окружности**