

# **Лекция 6. Расчет потенциалов простейших электростатических полей**

**6.1. Уравнения Лапласа и Пуассона**

**6.2. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности**

**6.3. Расчет потенциалов простейших электростатических полей**

## 6.1. Уравнения Лапласа и Пуассона

### Пуассона

Часто предпочтительным методом нахождения  $\mathbf{E}$  является сведение задачи к решению дифференциального уравнения для потенциала.

**Теорема Гаусса:**  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$  и  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  следовательно

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \quad \nabla^2 \text{ - оператор Лапласа (лапласиан)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = (\nabla \nabla) \varphi = \\ &= \left( \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 \right) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \text{ - уравнение Пуассона}$$

**В области пространства, где заряды отсутствуют  $\rho=0$**

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ - уравнение Лапласа}$$

Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами

## 6.2. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением  $\vec{E}$ .

Отсюда следует, что **напряженность равна разности потенциалов  $U$  на единицу длины силовой линии.**

Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить

$\Phi$  между двумя точками, измеряя  $U$  между ними, причем тем точнее, чем ближе точки.

**В однородном электрическом поле** силовые линии – прямые.

Поэтому здесь определить  $\vec{E}$  наиболее просто:

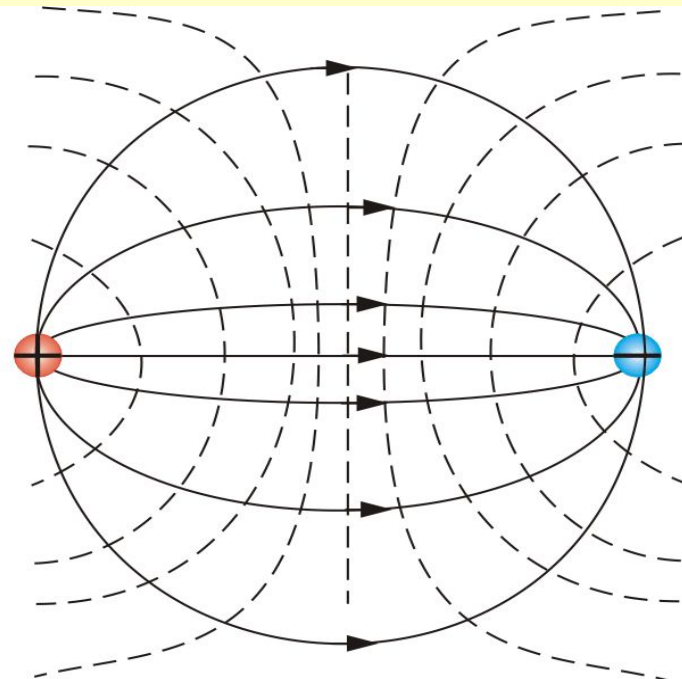
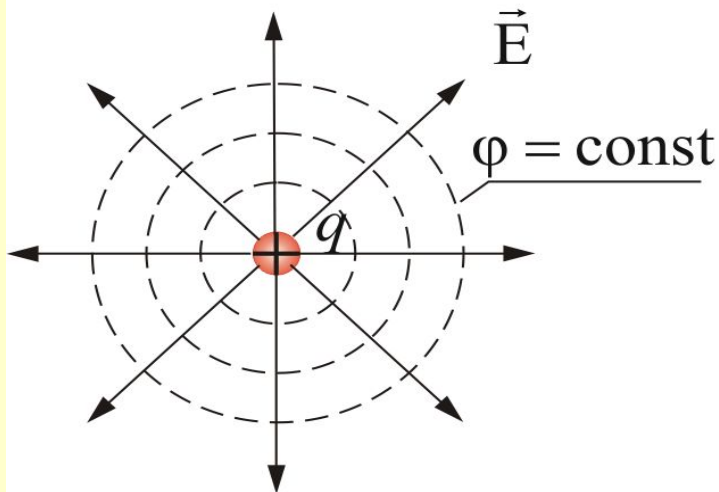
$$E = \frac{U}{l} \quad (5.6.1)$$

*Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.*

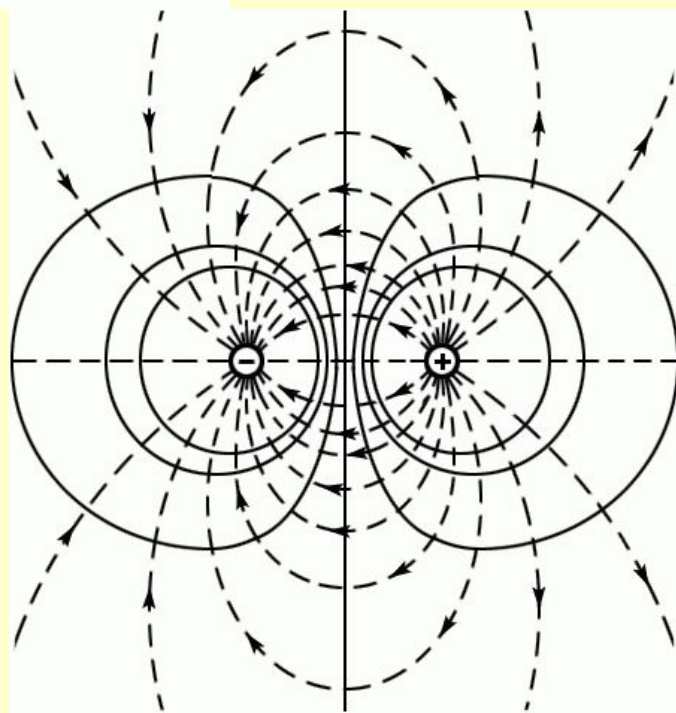
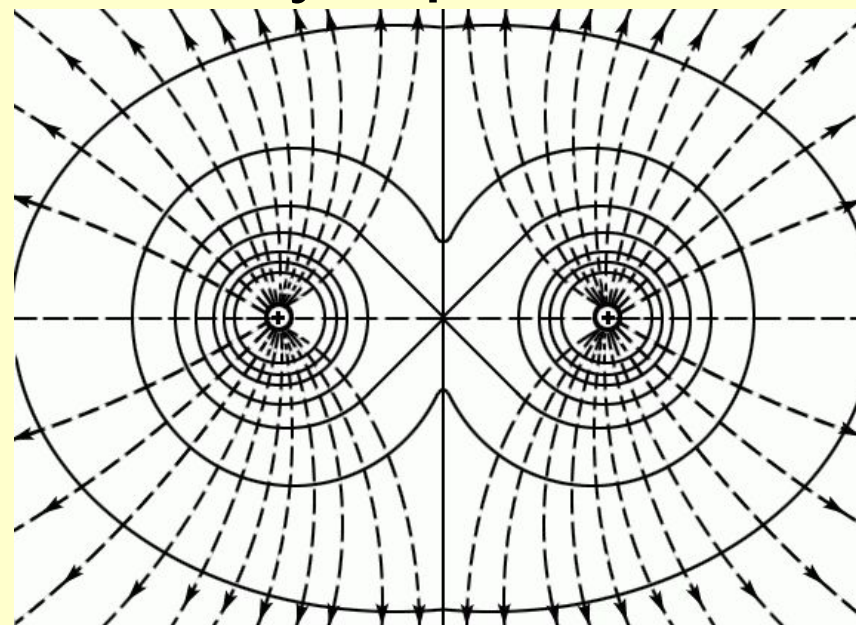
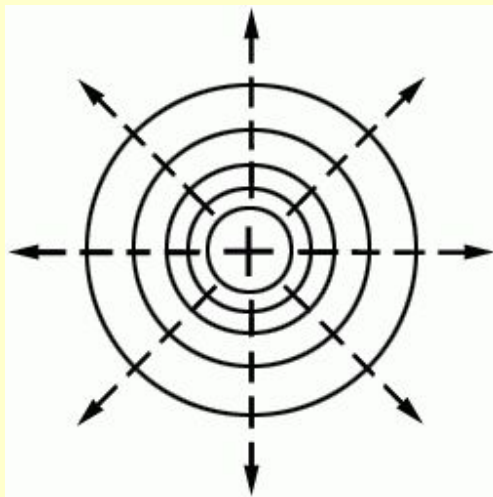
Уравнение этой поверхности

(6.6.2)

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.}$$



# Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны



Формула  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке.

Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям  $\vec{E}$  в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути.

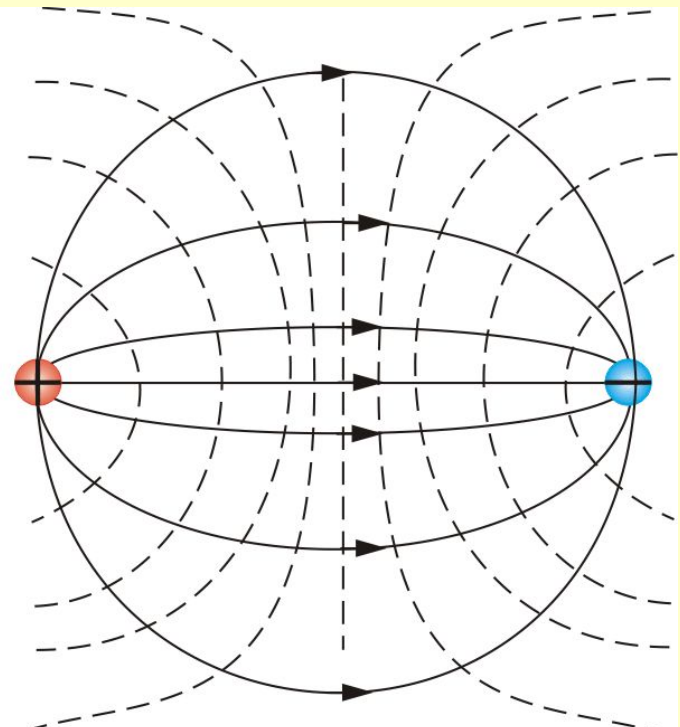
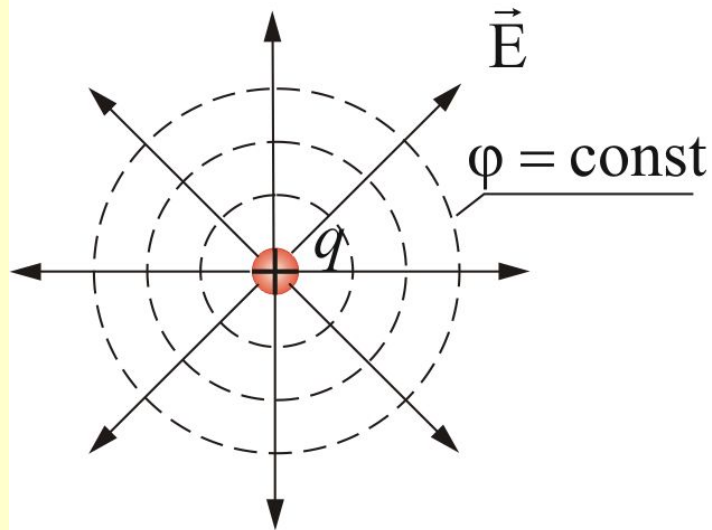
Для обхода по замкнутому контуру  $\varphi_1 = \varphi_2$  получим: т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0,$$

*Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.*



- Из обращения в нуль циркуляции вектора следует, что **линии электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах (истоки) и на отрицательных зарядах заканчиваются (стоки) или уходят в бесконечность**



## 6.3. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

### 6.3.1. Разность потенциалов между точками поля, образованного двумя бесконечными заряженными плоскостями

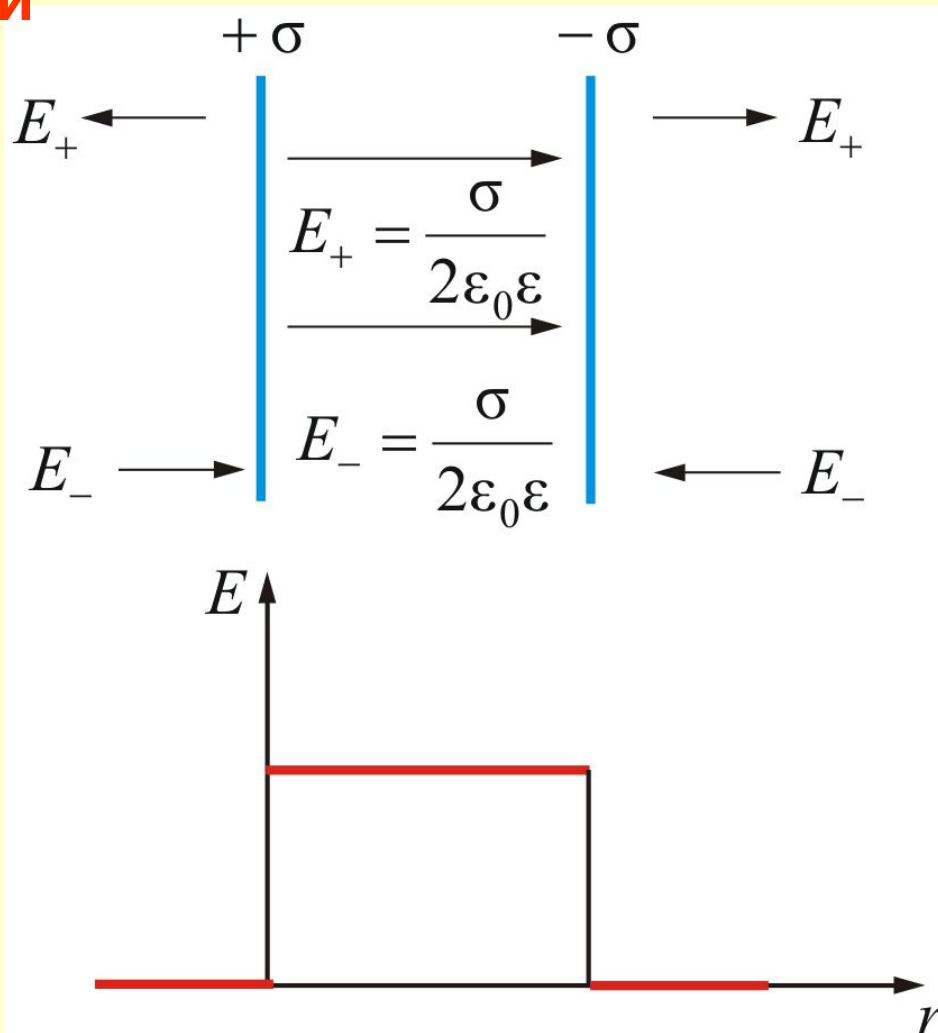


Рис. 6.1,а

Мы показали, что напряженность связана с потенциалом

$$E = -\frac{d\varphi}{dl}, \quad \text{тогда} \quad d\varphi = -E dl \quad (6.1.1)$$

где  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями

$\sigma = q/S$  – поверхностная плотность заряда.

Чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем

выражение  $d\varphi = -Edl$

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

При  $x_1 = 0$  и  $x_2 = d$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \quad (6.1.2)$$

На рисунке 6.1,б изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния между плоскостями.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

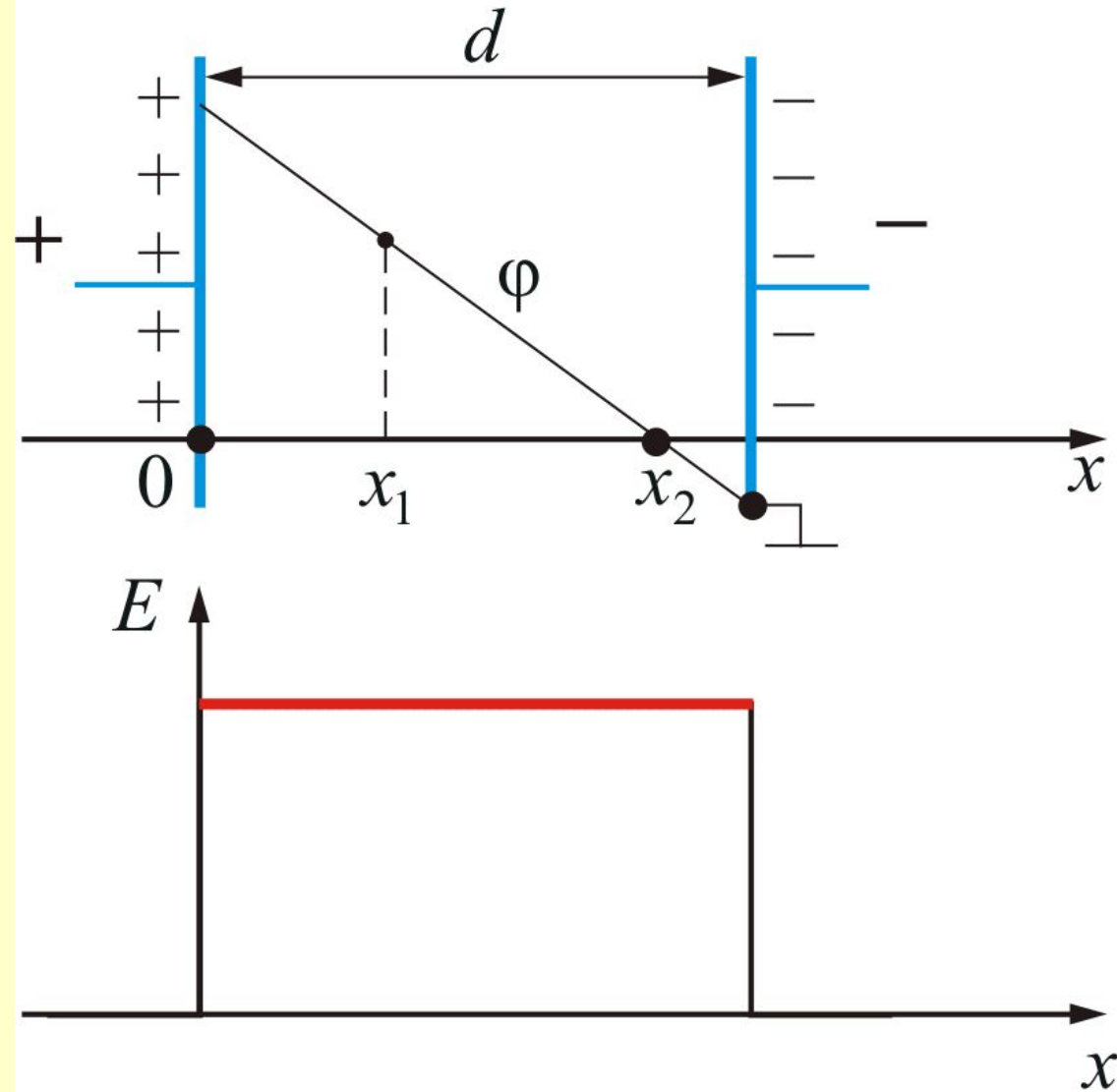


Рис. 6.1,б

## 6. 3.2. Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что

$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

Тогда, т.к.

$$d\varphi = -E dr; \quad \int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

отсюда следует, что разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \mathbf{const} - \mathbf{внутри\ и\ на\ поверхности} \\ \mathbf{цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} - \mathbf{вне\ цилиндра.} \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \mathbf{const} & \text{– внутри и на} \\ \mathbf{поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{– вне цилиндра.} \end{cases}$$

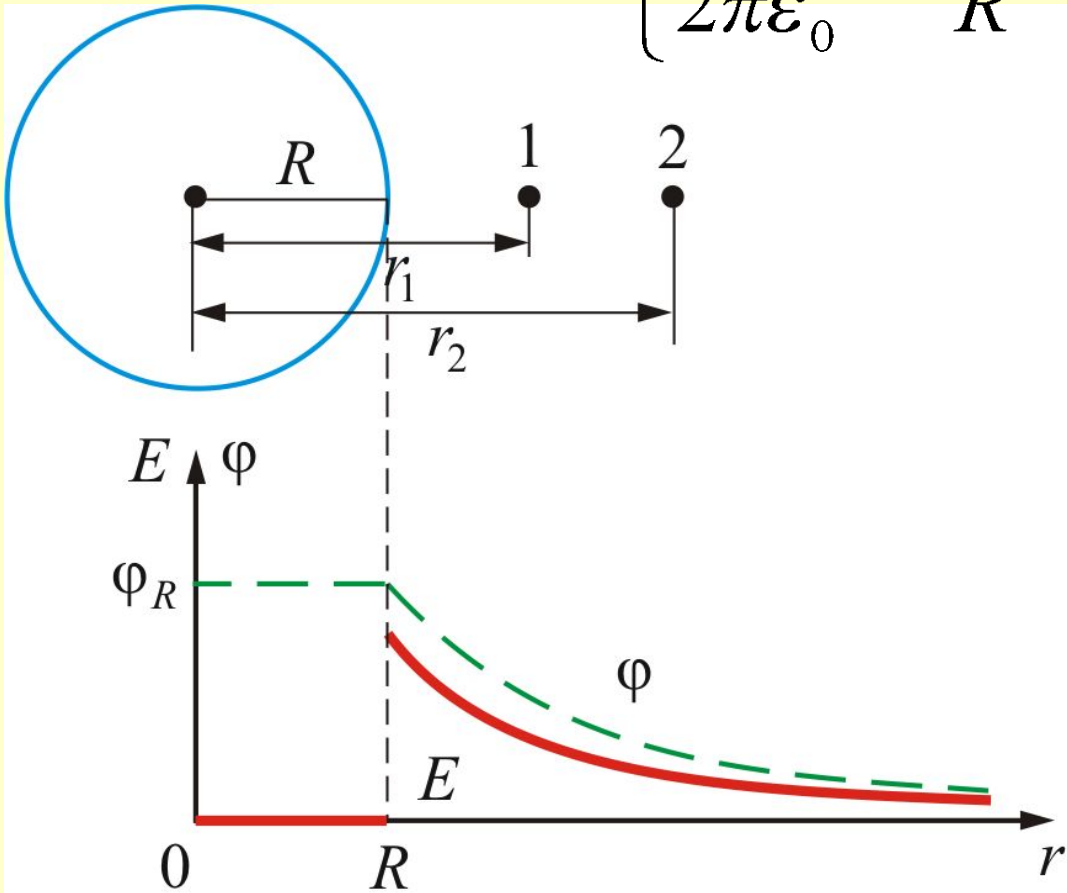


Рис. 6.2



### 6.3.3. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

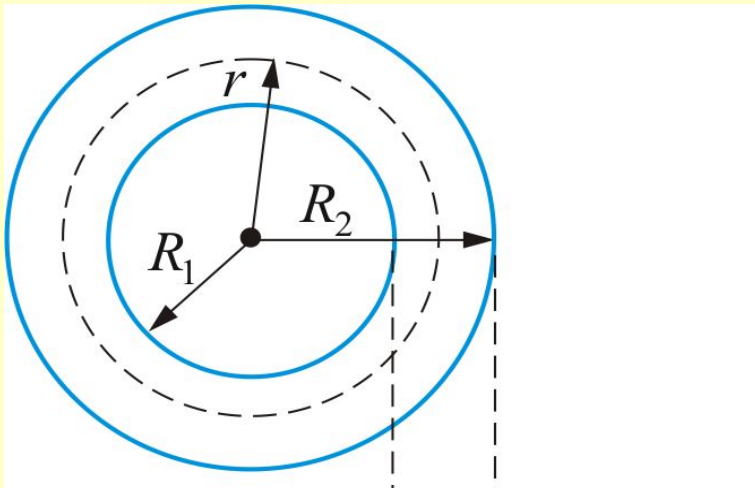


Рис. 6.3

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего} \\ \text{и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - \text{между цилиндрами,} \\ \text{когда } R_1 < r < R_2. \end{cases}$$

Т.к.  $d\varphi = -\varphi E dr$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

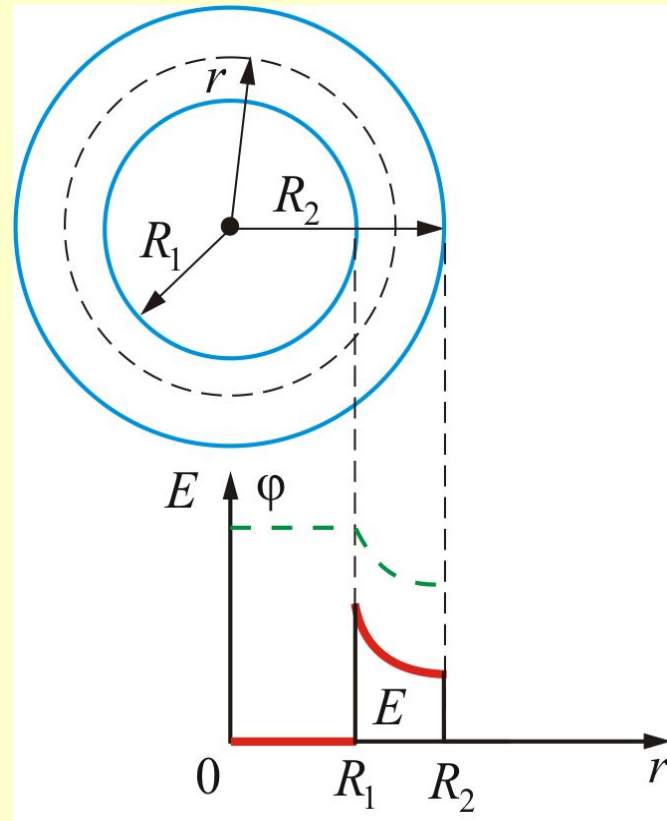
$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \mathbf{const} - \mathbf{внутри\ меньшего} \\ \mathbf{цилиндра} \ (r < R_1) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} - \mathbf{между\ цилиндрами} \ (R_1 < r < R_2) \\ 0 - \mathbf{вне\ цилиндров.} \end{cases}$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем,

$$E = 0, \varphi = \text{const};$$

между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и  $\varphi$  и  $E$  равны нулю.

Рис. 6.4



## 6.3.4. Разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной сферой (пустотелой)

Напряженность поля сферы определяется формулой

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

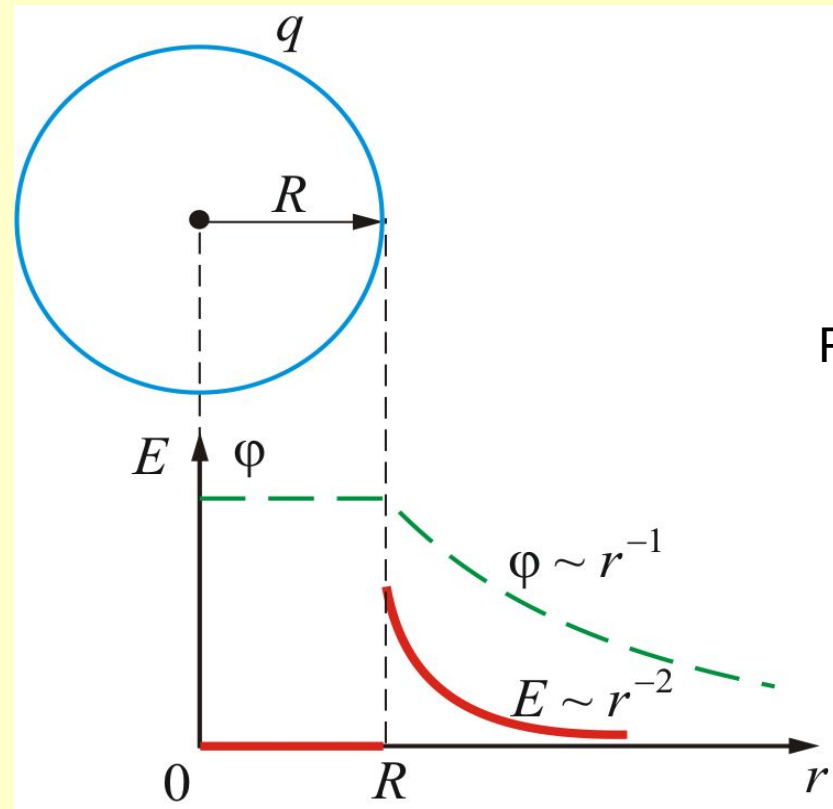


Рис. 6.5

• А т.к.  $d\varphi = -E dr$ , то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

т.е.  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

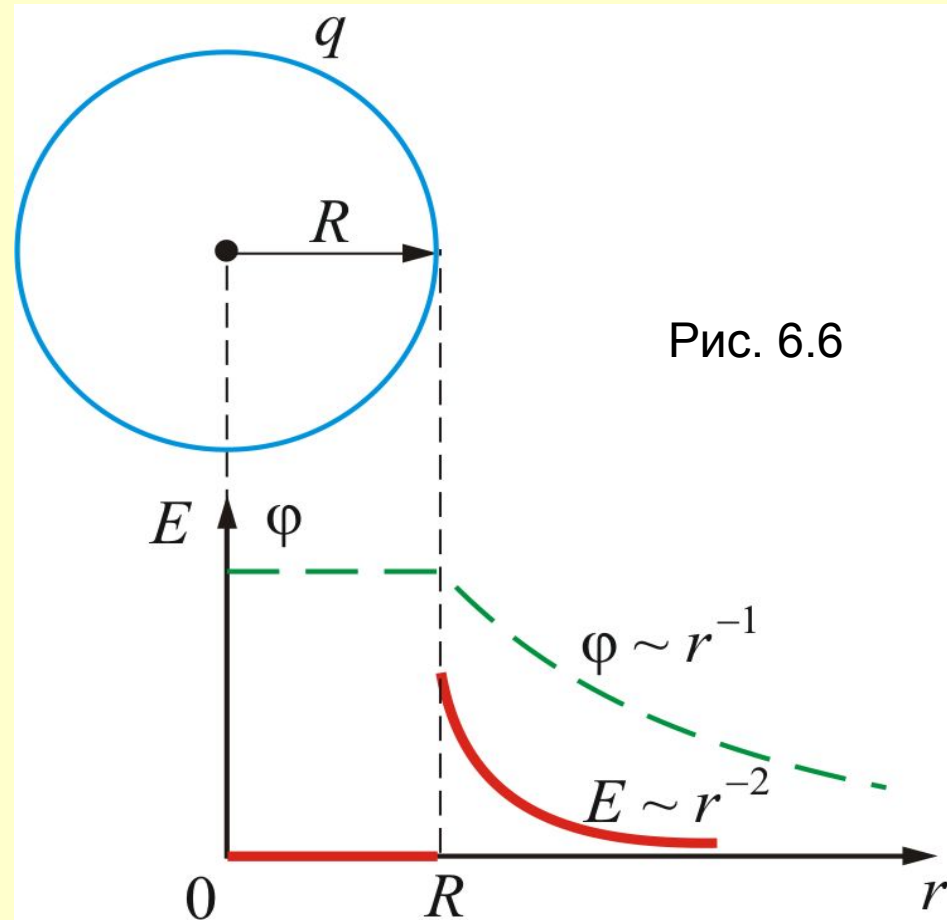


Рис. 6.6

- Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы:**
- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать  $E$  и  $\varphi$  от различных заряженных поверхностей.*
- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*

Тема: **ДИЭЛЕКТРИКИ** **В**  
**ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ**  
**ПОЛЕ**

7.1. Поляризация диэлектриков;

7.2. Различные виды диэлектриков:

7.2.1. Сегнетоэлектрики;

7.2.2. Пьезоэлектрики;

7.2.3. Пироэлектрики;

7.3. Вектор электрического смещения  $\vec{D}$ .

7.4. Поток вектора электрического смещения.

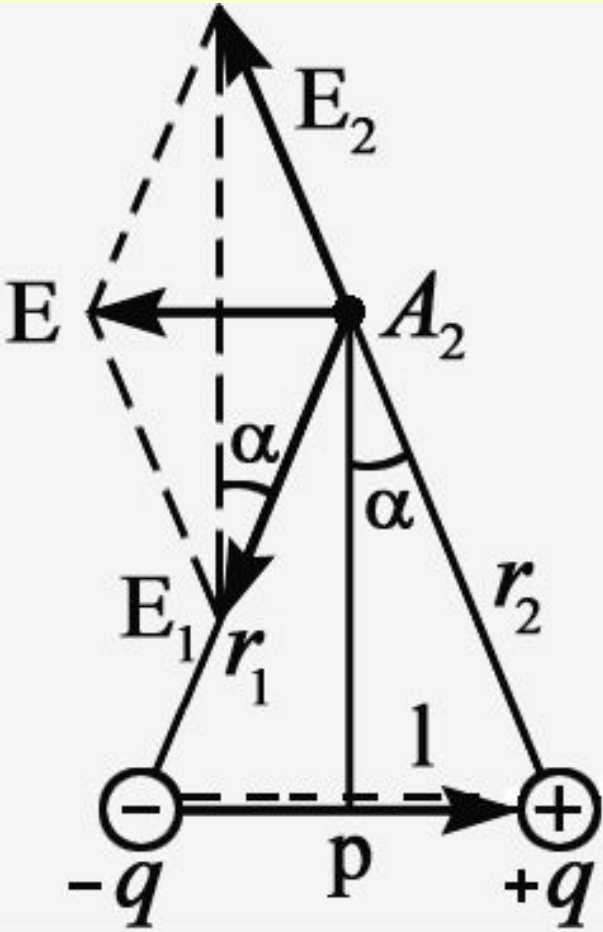
Теорема Гаусса для вектора  $\vec{D}$ .

7.5. Изменение  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлектриков.

До сих пор мы рассматривали  
электростатические поля и  
взаимодействие зарядов в вакууме. Как  
ведут себя заряды в среде? Что  
происходит с веществом в  
электростатическом поле?



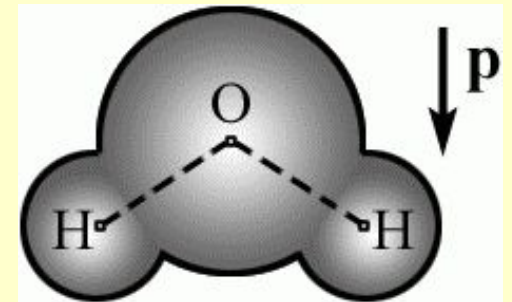
# Электрический диполь.



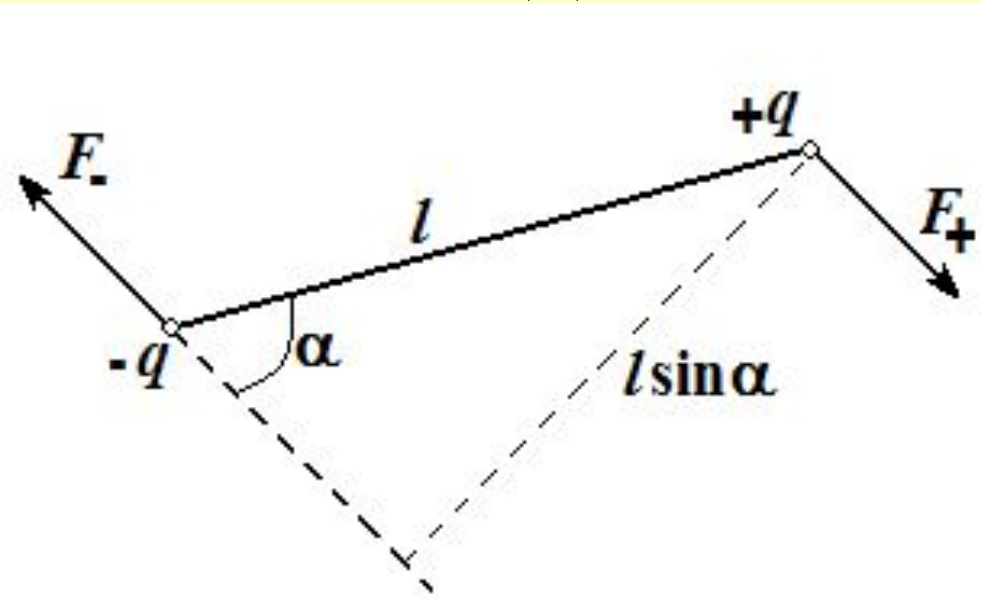
$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  - электрический дипольный момент.

$$E = 2E_1 \sin \alpha = \frac{2q_1 r_1 \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \approx \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



# Диполь во внешнем поле



$$F_+ = qE \quad u \quad F_- = -qE$$

$$M = qE \cdot l \sin \alpha = pE \sin \alpha$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$$

Электрическое поле стремится повернуть ось диполя так, чтобы его электрический момент  $\mathbf{p}$  установился по направлению поля. Положение равновесия, когда векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$  параллельны, устойчиво.

Энергия диполя во внешнем поле

$$W = q_+ \varphi_+ - q_- \varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = -E_l l$$

$$W = -\mathbf{pE}$$

## 4.1. Поляризация диэлектриков

- Все известные в природе вещества, в соответствии с их способностью проводить электрический ток, делятся на

*три основных класса:*

- *диэлектрики*  $\rho_{\text{д}} = 10^8 - 10^{18} \text{ Ом/м}$

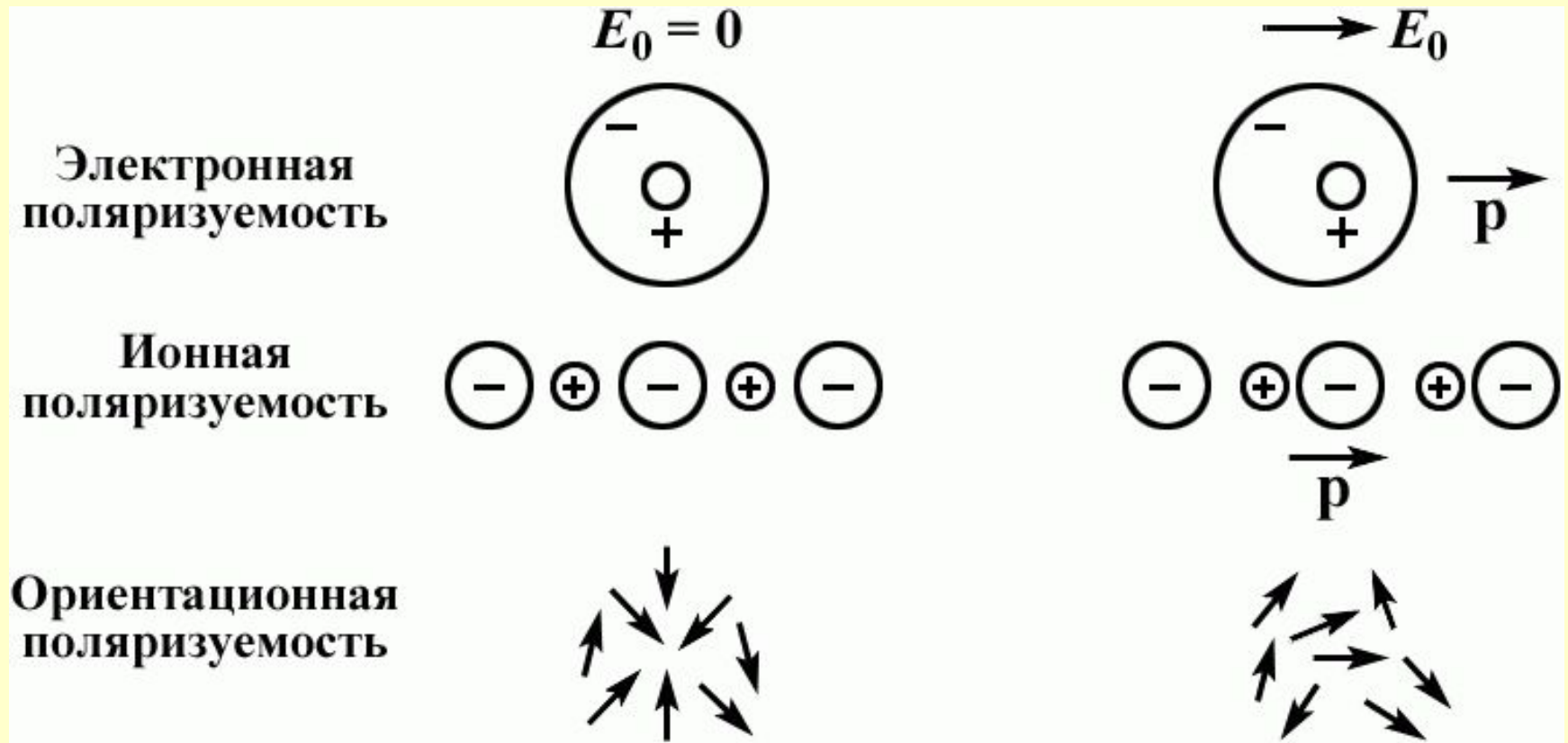
- *полупроводники*  $\rho_{\text{д}} > \rho_{\text{п/п}} > \rho_{\text{пр}}$ .

- *проводники*  $\rho_{\text{пр}} = 10^{-6} - 10^{-8} \text{ Ом/м}$

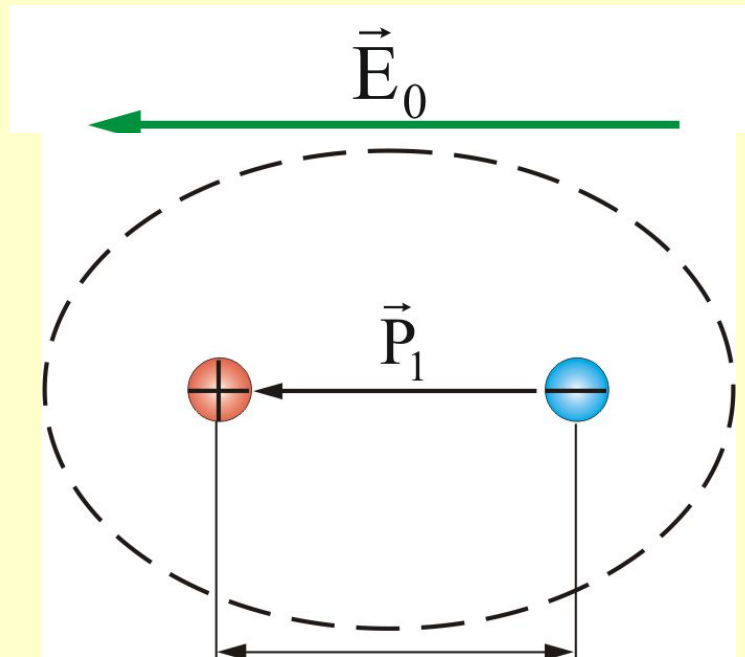
- **В идеальной диэлектрике свободных зарядов**, то есть способных перемещаться на значительные расстояния (превосходящие расстояния между атомами), **нет**.
- Но это не значит, что диэлектрик, помещенный в электростатическое поле, не реагирует на него, что в нем ничего не происходит.

- *Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля называется **поляризацией**.*
- *Способность к поляризации является **основным свойством диэлектриков**.*

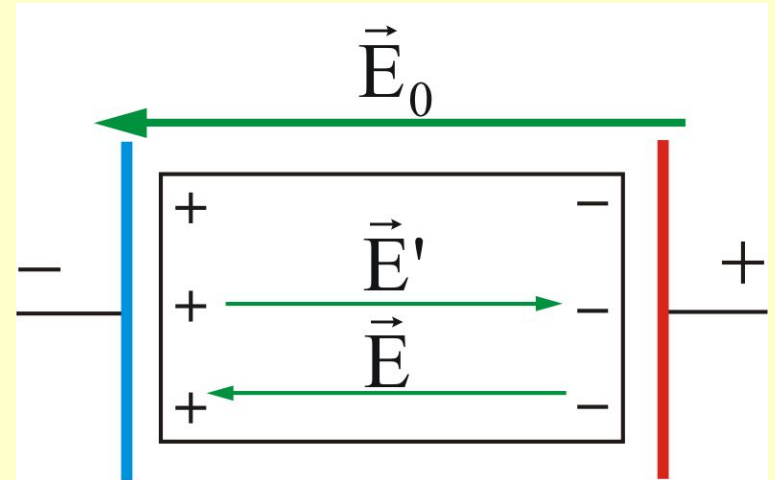
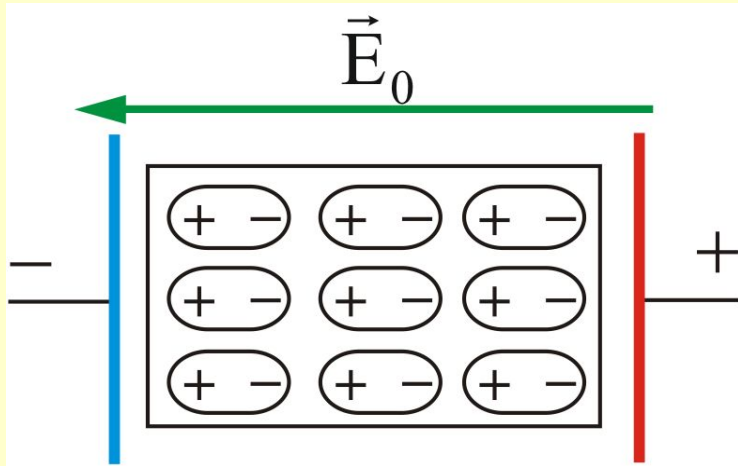
**Поляризуемость диэлектрика включает составляющие – электронную, ионную и ориентационную (дипольную).**



- Главное в поляризации – смещение зарядов в электростатическом поле. В результате, каждая молекула или атом образует электрический момент  $P$



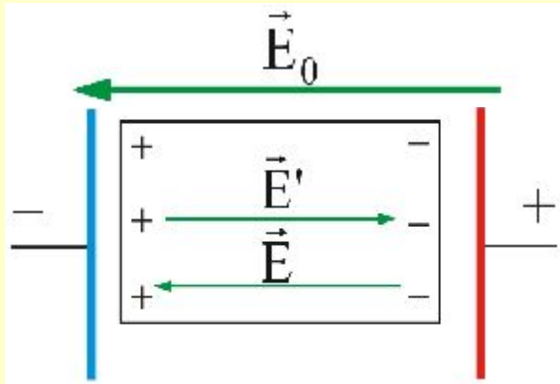
- **Внутри диэлектрика** электрические заряды диполей компенсируют друг друга. Но на внешних поверхностях диэлектрика, прилегающих к электродам, появляются заряды противоположного знака (**поверхностно связанные заряды**).

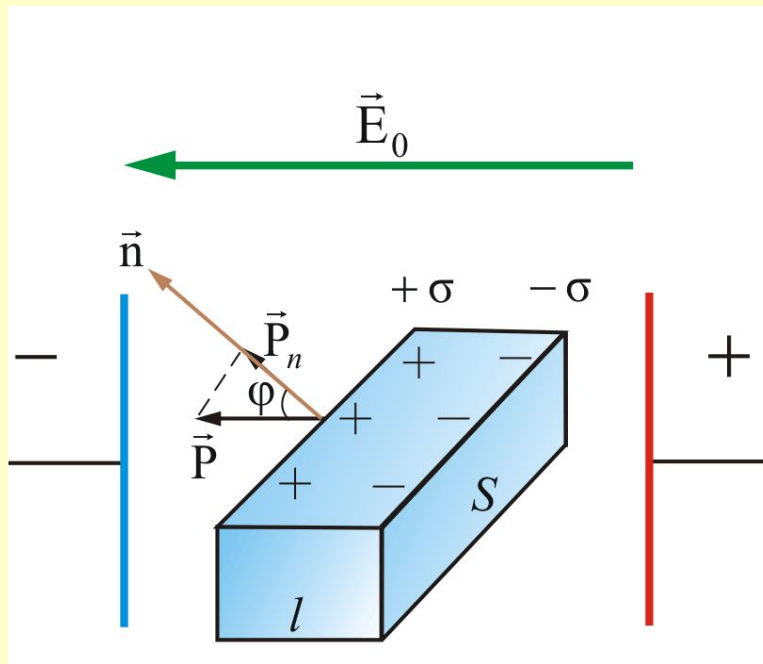




- Обозначим  $E'$  – **электростатическое поле связанных зарядов**. Оно направлено всегда против внешнего поля  $E_0$
- Следовательно, **резльтирующее электростатическое поле внутри диэлектрика**

$$E = E_0 - E'$$





- Поместим диэлектрик в виде параллелепипеда в электростатическое поле  $\vec{E}_0$
- Электрический момент тела, можно найти по формуле:
- $P = ql = \sigma' Sl$ , или  $P = \sigma' Sl \cos \varphi$ ,
- $\sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов.

- Введем новое понятие – **вектор поляризации – электрический момент единичного объема.**

- $$\underline{\underline{P}} = \sum_k^n \underline{\underline{P}}_{1k} = n\underline{\underline{P}}_1, \quad (4.1.4)$$

- где  $n$  – концентрация молекул в единице объема,
- $\underline{\underline{P}}_1$  – электрический момент одной молекулы.

- С учетом этого обстоятельства,
- $$\underline{P} = \underline{PV} = \underline{PSl} \cos(\varphi) \quad (4.1.5)$$
- (т.к.  $V = Sl \cos \varphi$  – объем параллелепипеда).
- Приравняем (4.1.3.) и (4.1.5) и учтем, что – проекция  $\underline{P}$  на направление  $\underline{\hat{n}}$  – вектора нормали,

$$\underline{P} \cos \varphi = P_n$$

- тогда

$$\sigma' = \underline{P}_n$$

$$\sigma' = \underline{P}_n$$

- **Поверхностная плотность** поляризационных зарядов равна нормальной составляющей **вектора поляризации** в данной точке поверхности.
- Отсюда следует, что **индуцированное в диэлектрике электростатическое поле**  $E'$  будет влиять только на нормальную составляющую вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ .

- Вектор поляризации можно представить так:

- $$\underline{\underline{P}} = n \underline{\underline{P}}_1 = n \alpha \varepsilon_0 \underline{\underline{E}} = \chi \varepsilon_0 \underline{\underline{E}}, \quad (4.1.7)$$

- где  $\alpha$  – поляризуемость молекул,

- $\chi = n\alpha$  **диэлектрическая восприимчивость** – макроскопическая безразмерная величина, характеризующая поляризацию единицы объема.

Следовательно, и у результирующего поля  $\vec{E}$  изменяется, по сравнению с  $\vec{E}_0$ , только нормальная составляющая.

Тангенциальная составляющая поля остается без изменения.

- В векторной форме результирующее поле можно представить так:

- $$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (4.1.8)$$

- Результирующая электростатического поля в диэлектрике равно внешнему полю, деленному на диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$ :

- $$E = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (4.1.9)$$

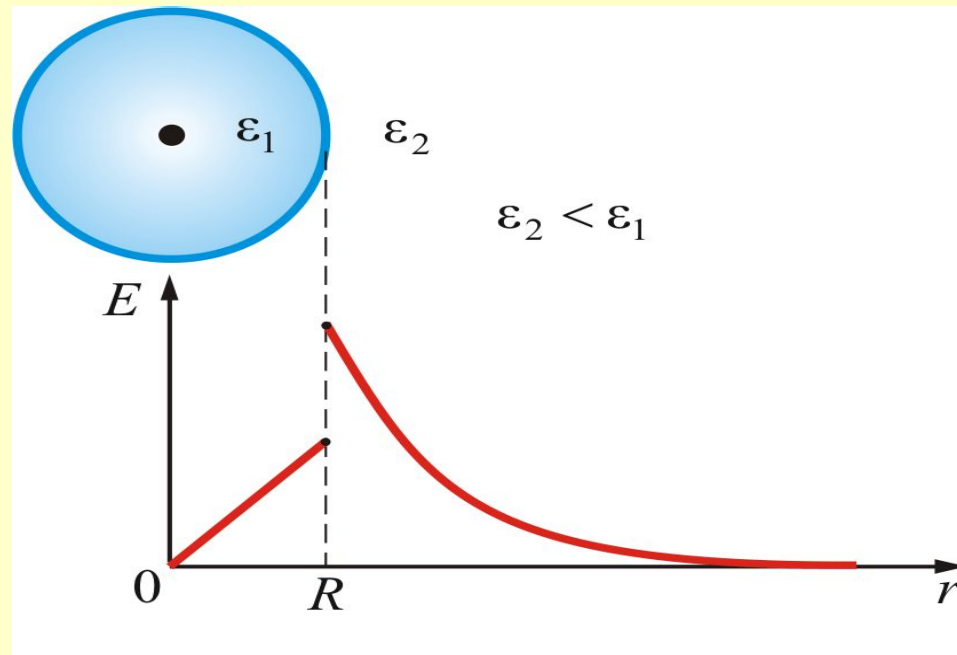
- Величина  $\varepsilon = 1 + \chi$  характеризует электрические свойства диэлектрика.

- Физический смысл диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$  – величина, показывающая во сколько раз электростатическое поле внутри диэлектрика меньше, чем в вакууме:

- $$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (4.1.10)$$



- График зависимости напряженности электростатического поля шара от радиуса, с учетом диэлектрической проницаемости двух сред ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ), показан на рисунке
- Как видно из рисунка, напряженность поля изменяется скачком при переходе из одной среды в другую .

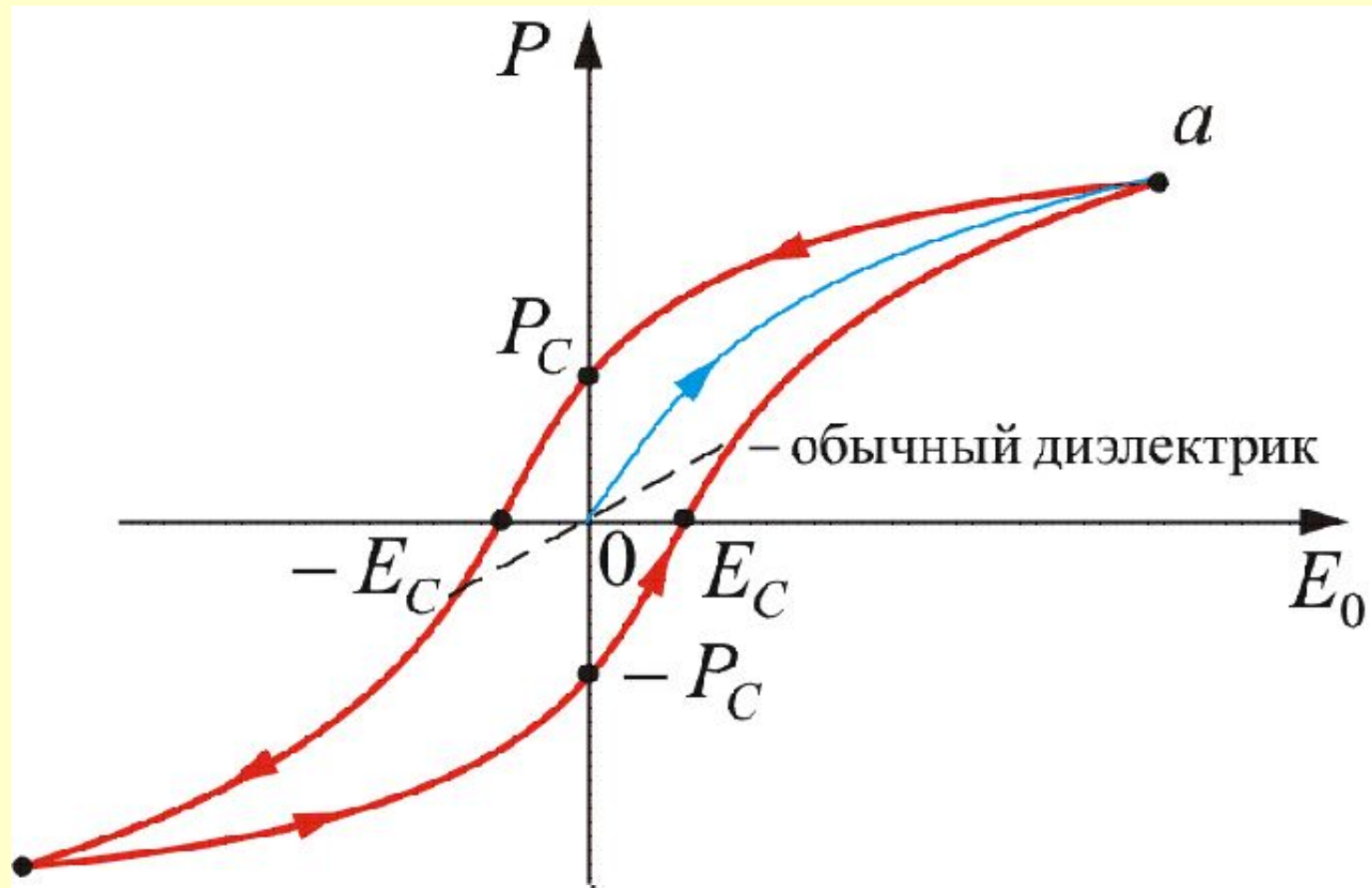


## 4.2. Различные виды диэлектриков

- В 1920 г. была открыта **спонтанная** (самопроизвольная) **поляризация**.
- Всю группу веществ, называли **сегнетоэлектрики** (или *ферроэлектрики*).
- Все сегнетоэлектрики обнаруживают резкую анизотропию свойств (сегнетоэлектрические свойства могут наблюдаться только вдоль одной из осей кристалла). У изотропных диэлектриков поляризация всех молекул одинакова, у анизотропных – поляризация, и следовательно, вектор поляризации в разных направлениях разные.

- Рассмотрим **основные свойства сегнетоэлектриков:**
- 1. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  в некотором температурном интервале велика ( $\epsilon \sim 10^3 - 10^4$ )
- 2. Значение  $\epsilon$  зависит не только от внешнего поля  $E_0$ , но и от предыстории образца.
- 3. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (а следовательно, и  $P$ ) – нелинейно зависит от напряженности внешнего электростатического поля (**нелинейные диэлектрики**).

- Это свойство называется *диэлектрическим гистерезисом*
- Здесь точка *a* – состояние насыщения.

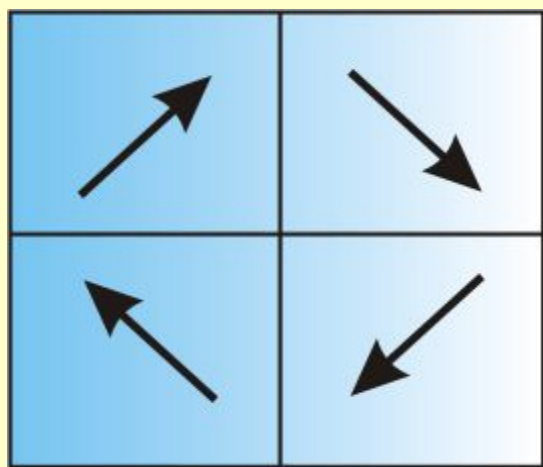


- 4. Наличие точки Кюри – температуры, при которой (и выше) сегнетоэлектрические свойства пропадают. При этой температуре происходит фазовый переход 2-го рода.

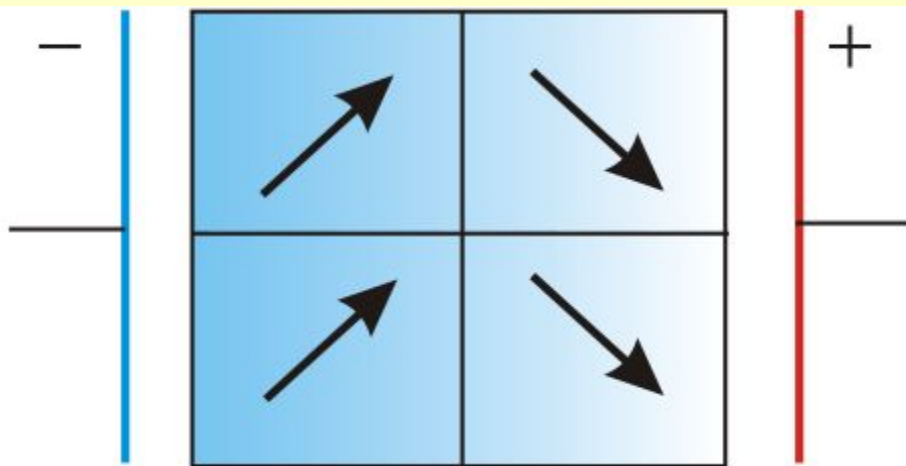
Например,

- титанат бария:  $133^{\circ}\text{C}$ ;
- сегнетова соль:  $-18 + 24^{\circ}\text{C}$ ;
- ниобат лития  $1210^{\circ}\text{C}$ .

- Стремление к минимальной потенциальной энергии и наличие дефектов структуры приводит к тому, что сегнетоэлектрик разбит на **домены**



$$P = 0$$



$$P \sim E$$

- Среди диэлектриков есть вещества, называемые **электреты** – диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электростатического поля (аналоги постоянных магнитов).

# Пьезоэлектрики

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электрического поля, но и под действием механической деформации. Это явление называется ***пьезоэлектрическим эффектом***.

- Явление открыто братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 году.
- Если на грани кристалла наложить металлические электроды (обкладки) то при деформации кристалла на обкладках возникнет разность потенциалов.
- Если замкнуть обкладки, то потечет



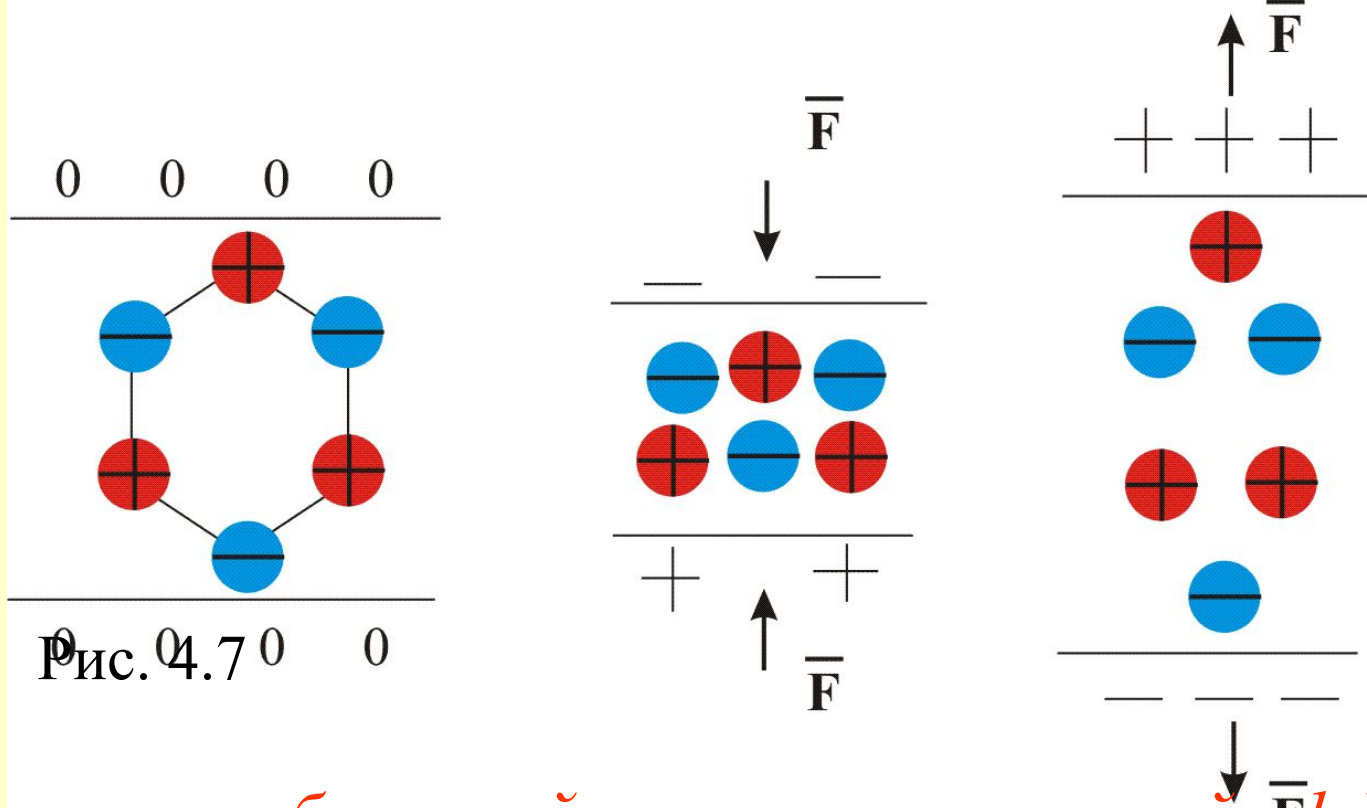


Рис. 4.70

*Возможен и обратный пьезоэлектрический эффект:*

- Возникновение поляризации сопровождается механическими деформациями.
- Если на пьезоэлектрический кристалл подать напряжение, то возникнут механические деформации кристалла, причем, деформации будут пропорциональны приложенному электрическому полю  $E$

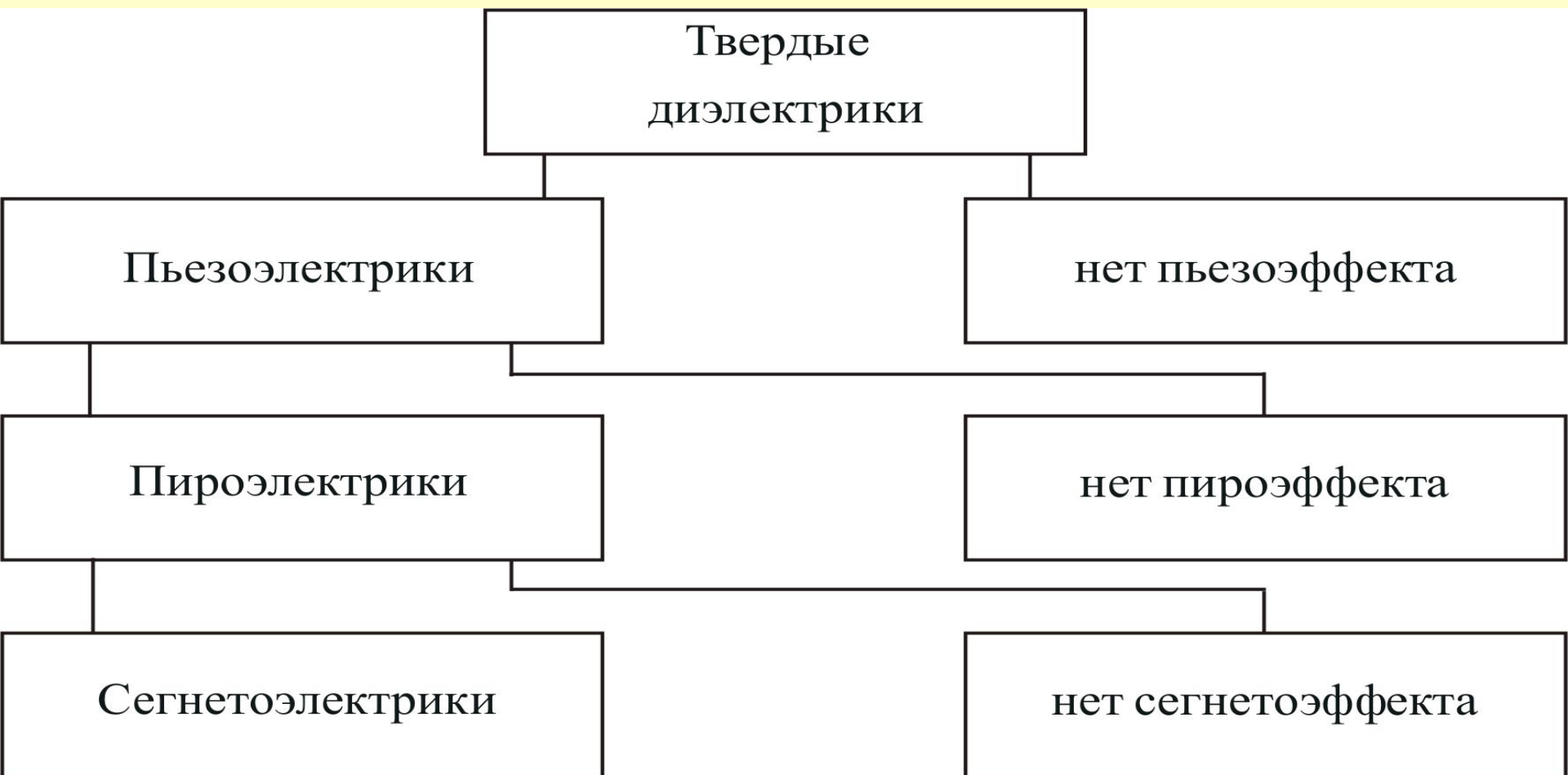
- Сейчас известно более 1800 пьезокристаллов.
- Все сегнетоэлектрики обладают пьезоэлектрическими свойствами
- Используются в пьезоэлектрических адаптерах и других устройствах).

## 4.2.3. Пироэлектрики

*Пироэлектричество – появление электрических зарядов на поверхности некоторых кристаллов при их нагревании или охлаждении.*

- При нагревании один конец диэлектрика заряжается положительно, а при охлаждении он же – отрицательно.
- Появление зарядов связано с изменением существующей поляризации при изменении

Все пирозэлектрики являются пьезоэлектриками, но не наоборот. Некоторые пирозэлектрики обладают сегнетоэлектрическими свойствами.



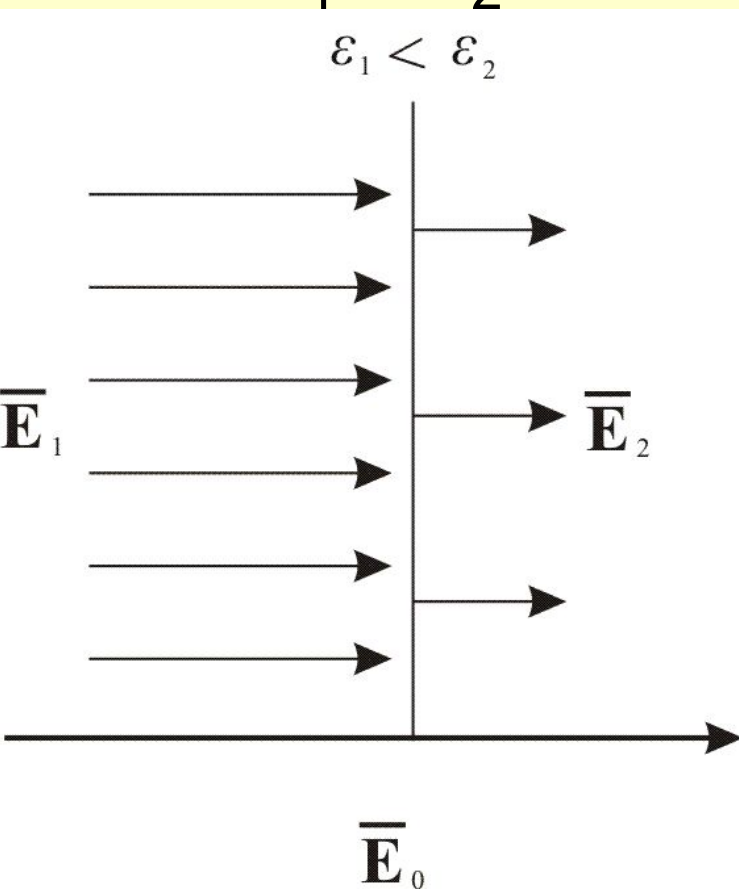
В качестве **примеров** использования различных диэлектриков можно привести: **сегнетоэлектрики** – электрические конденсаторы, ограничители предельно допустимого тока, позисторы, запоминающие устройства;

**пьезоэлектрики** – генераторы ВЧ и пошаговые моторы, микрофоны, наушники, датчики давления, частотные фильтры, пьезоэлектрические адаптеры;

**пироэлектрики** – позисторы, детекторы ИК-излучения, болометры (датчики инфракрасного излучения), электрооптические модуляторы.

## 4.3. Вектор электрического смещения $\mathbf{D}$

Имеем границу раздела двух сред с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , так что,  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (рис. 4.8).



$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad \text{или} \quad E_1 = E_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

*Напряженность электрического поля  $E$  изменяется скачком при переходе из одной среды в другую.*

Рис. 4.8

- Главная задача электростатики – расчет электрических полей, то есть  $\vec{E}$  в различных электрических аппаратах, кабелях, конденсаторах,.....
- Эти расчеты сами по себе не просты да еще наличие разного сорта диэлектриков и проводников еще более усложняют задачу.

- Для упрощения расчетов была введена новая векторная величина – **вектор электрического смещения** (электрическая индукция).

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (4.3.1)$$

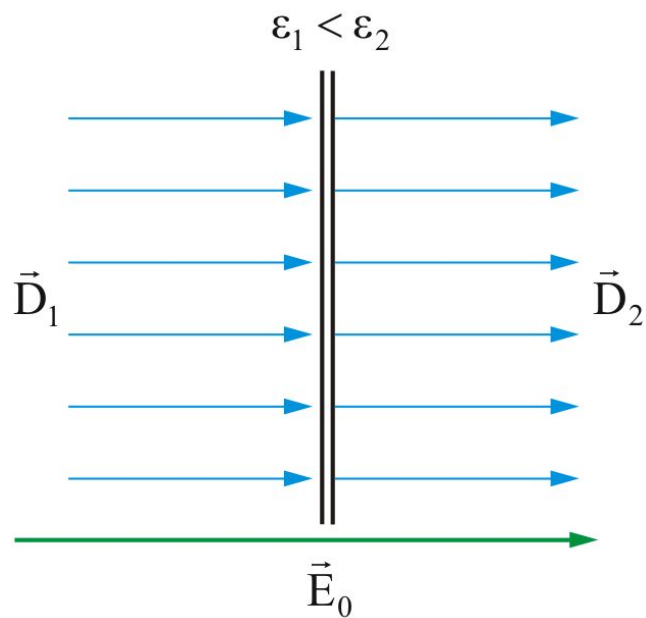
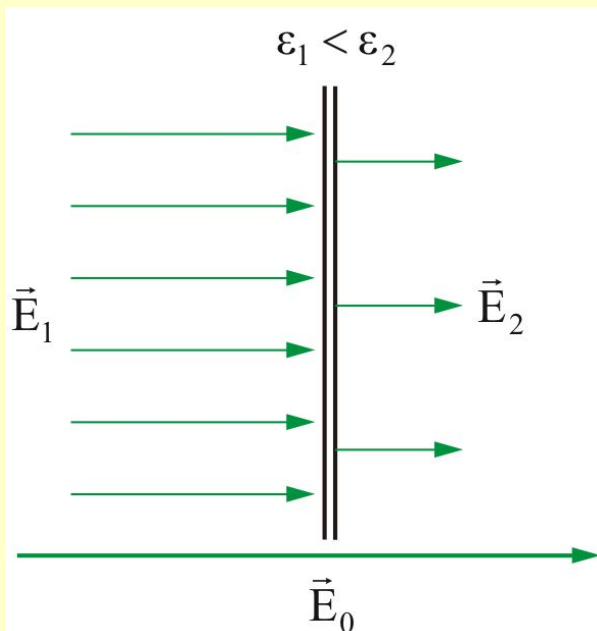
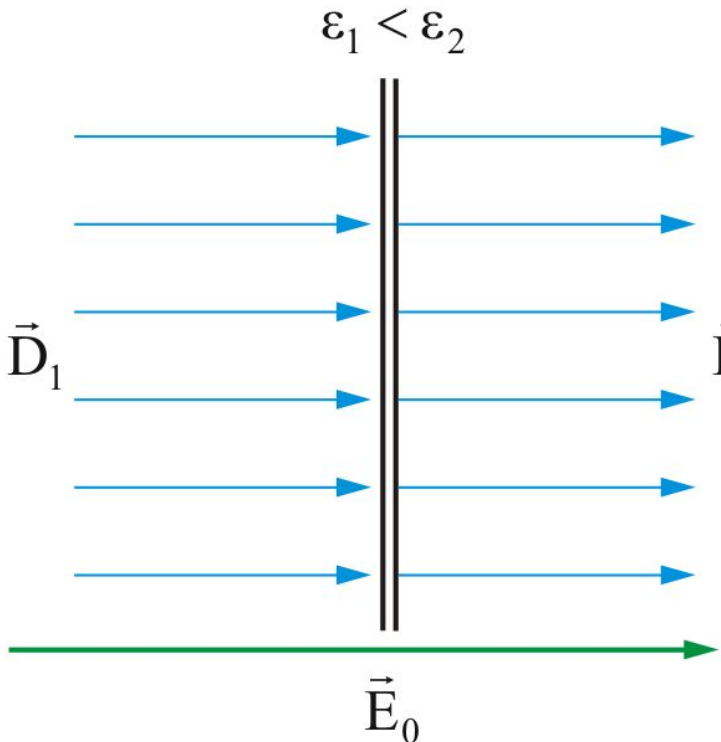
- Из предыдущих рассуждений  $E_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 E_2$  тогда  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2$  отсюда и

$$D_{n1} = D_{n2}$$



$$D_{n1} = D_{n2}$$

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  остается неизменным при переходе из одной среды в другую и это облегчает расчет  $\vec{D}$ .



Зная  $\vec{D}$  и  $\epsilon$ , легко рассчитывать

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

$$\underline{\underline{D}} = \epsilon \epsilon_0 \underline{\underline{E}} = (1 + \chi) \epsilon_0 \underline{\underline{E}} = \epsilon_0 \underline{\underline{E}} + \chi \epsilon_0 \underline{\underline{E}}$$

отсюда можно записать:

$$\underline{\underline{D}} = \epsilon_0 \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{P}}, \quad (4.3.3)$$

где  $\underline{\underline{P}}$  - вектор поляризации,

$\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды, характеризующая поляризацию единичного объема среды.

- Для точечного заряда в вакууме

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

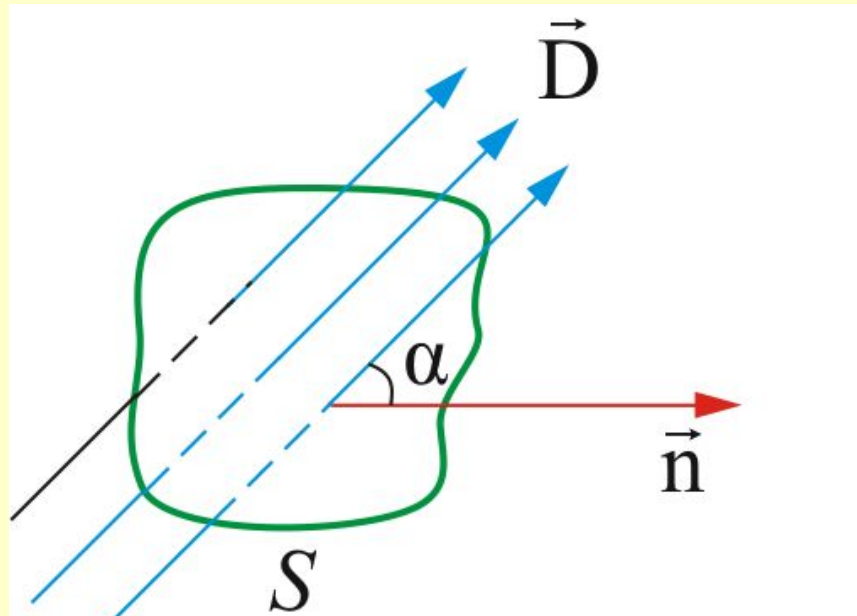
- Для  $\vec{D}$  имеет место принцип суперпозиции, как и для  $\vec{E}$ , т.е.

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{D}_k.$$

## 4.4. Поток вектора электрического смещения.

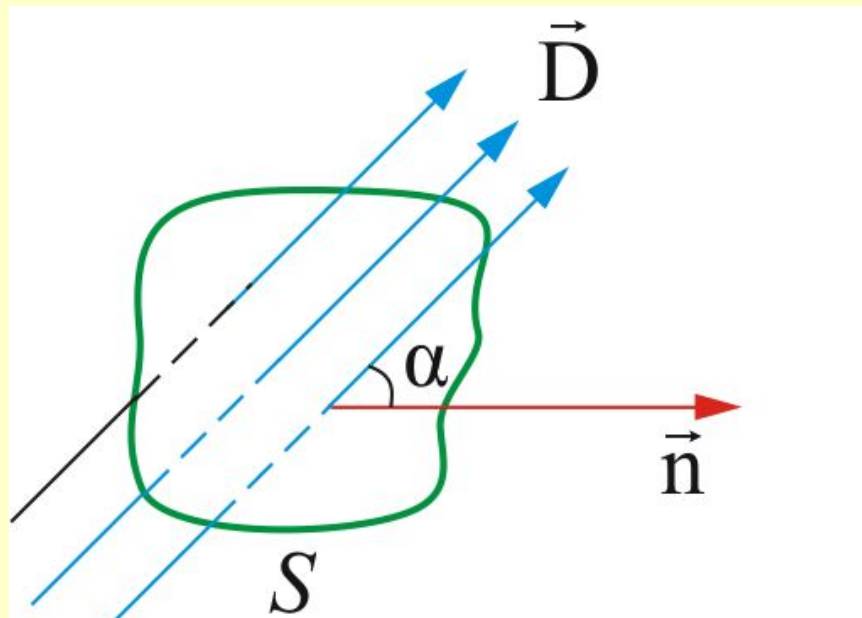
### Теорема Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{D}$

Пусть произвольную площадку  $S$  пересекают линии вектора электрического смещения  $\vec{D}$  под углом  $\alpha$  к нормали:



В однородном электростатическом поле  
**поток вектора**  $\vec{D}$  равен:

$$\Phi_D = DS \cos \alpha = D_n S.$$



Теорему Остроградского-Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$  получим из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора  $\mathbf{E}$  :

•

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon} \quad E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \oint_S D_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}$$

- Теорема Остроградского-Гаусса для  $\vec{D}$

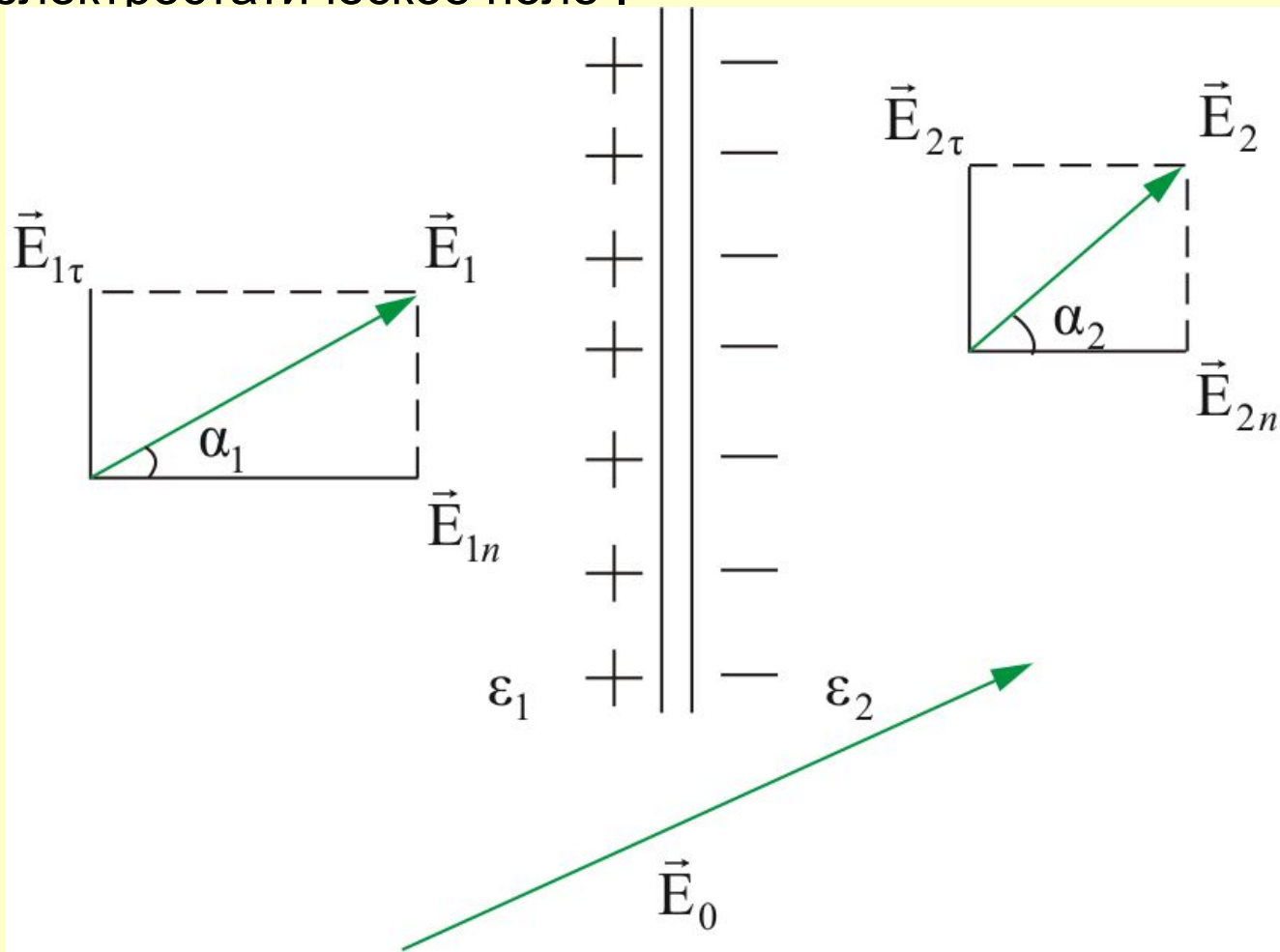
$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q_k \quad (4.4.1)$$

- Поток вектора  $\vec{D}$  через любую замкнутую поверхность определяется **только свободными зарядами**, а не всеми зарядами внутри объема, ограниченного данной поверхностью.
- Это позволяет не рассматривать связанные (поляризованные) заряды, влияющие на  $\vec{E}$  и упрощает решение многих задач.
- В этом смысл введения вектора  $\vec{D}$ .



## 4.5. Изменение $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков

- Рассмотрим простой случай (рисунок 4.12): два бесконечно протяженных диэлектрика с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , имеющих общую границу раздела, пронизывает внешнее электростатическое поле.



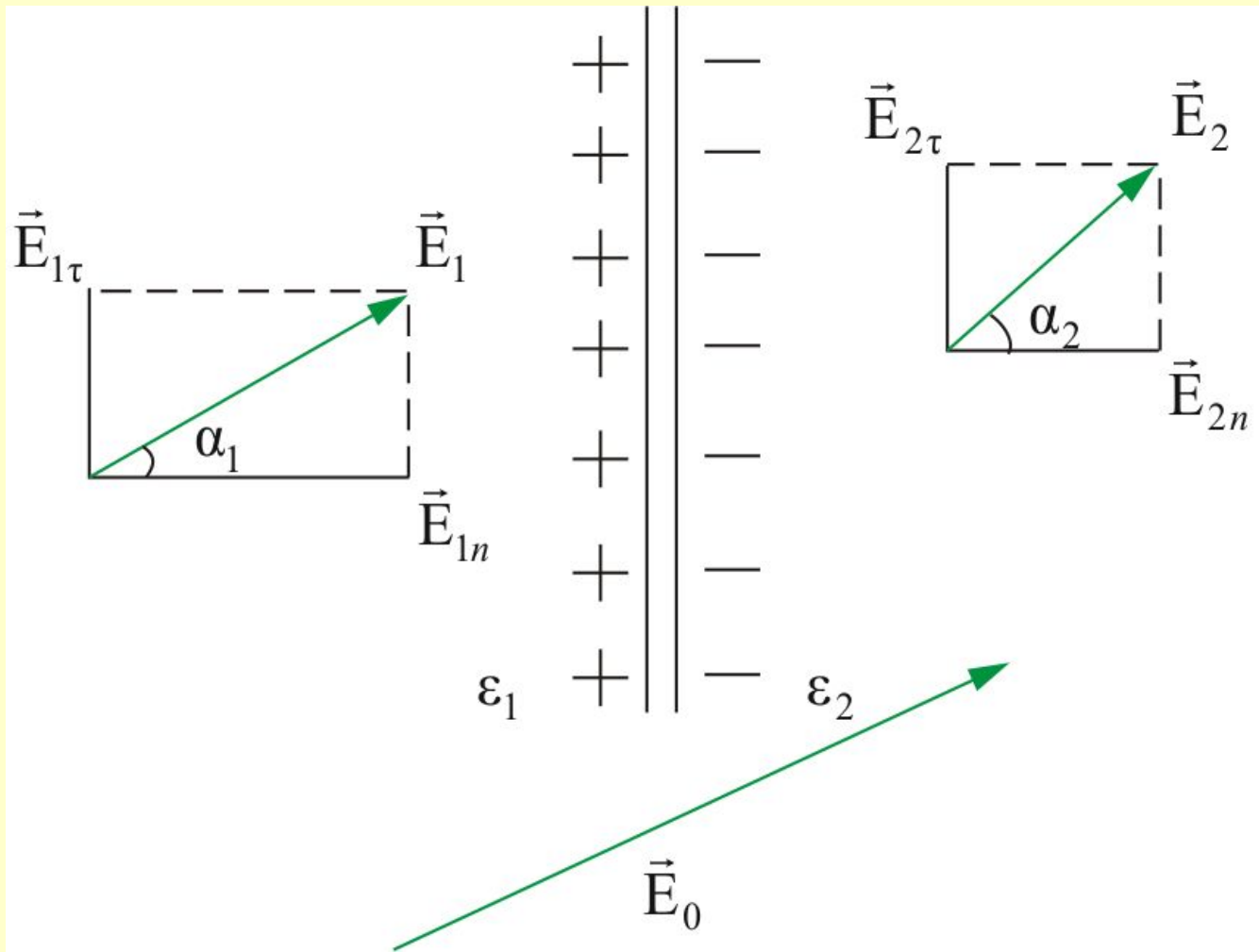
• Пусть  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ .

• Из п. 4.3 мы знаем, что

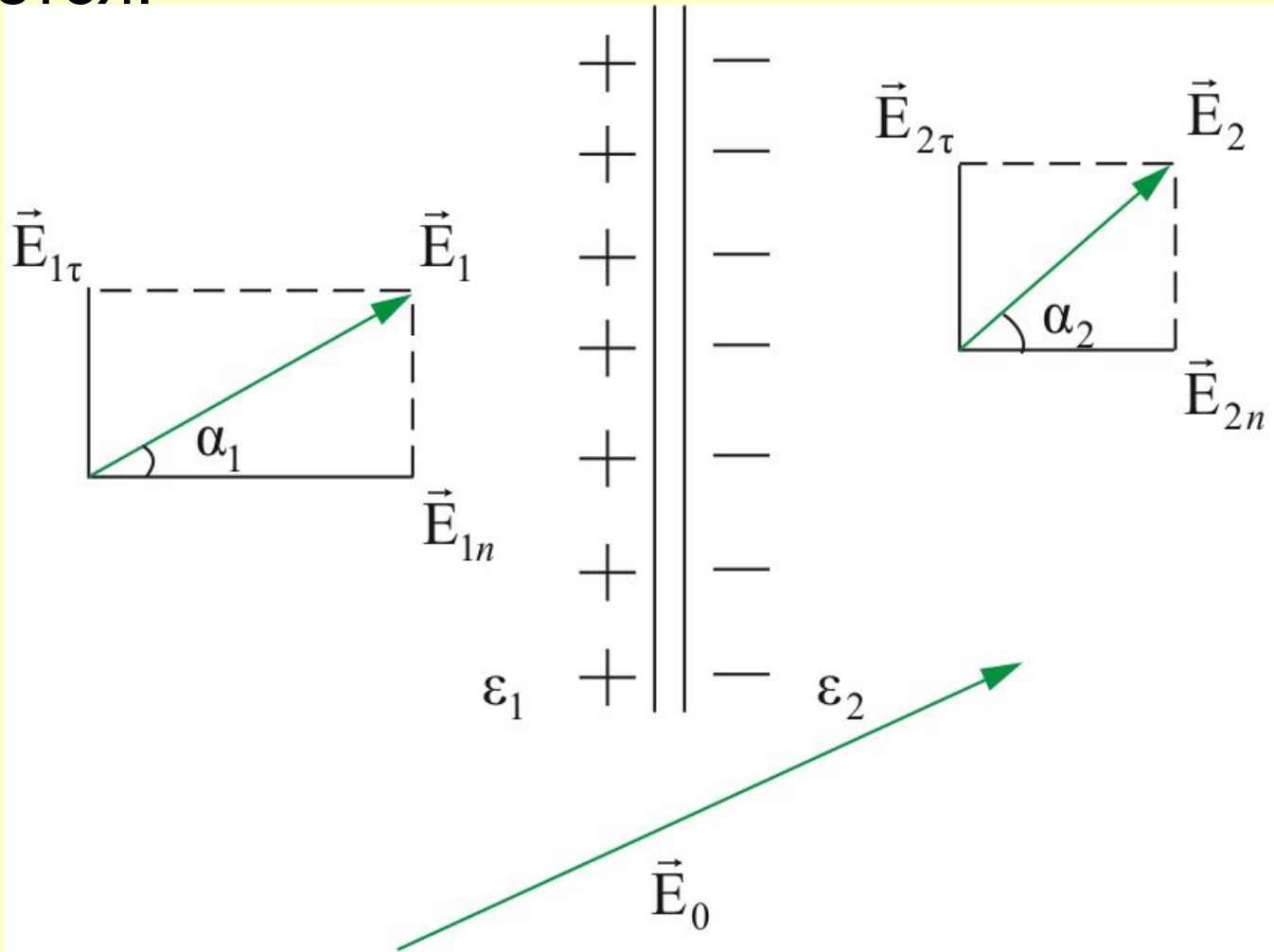
$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

и



- Образовавшиеся поверхностные заряды изменяют только *нормальную составляющую* а тангенциальная составляющая остается постоянной, в результате направление вектора  $\vec{E}$  изменяется:



- То есть направление вектора  $E$

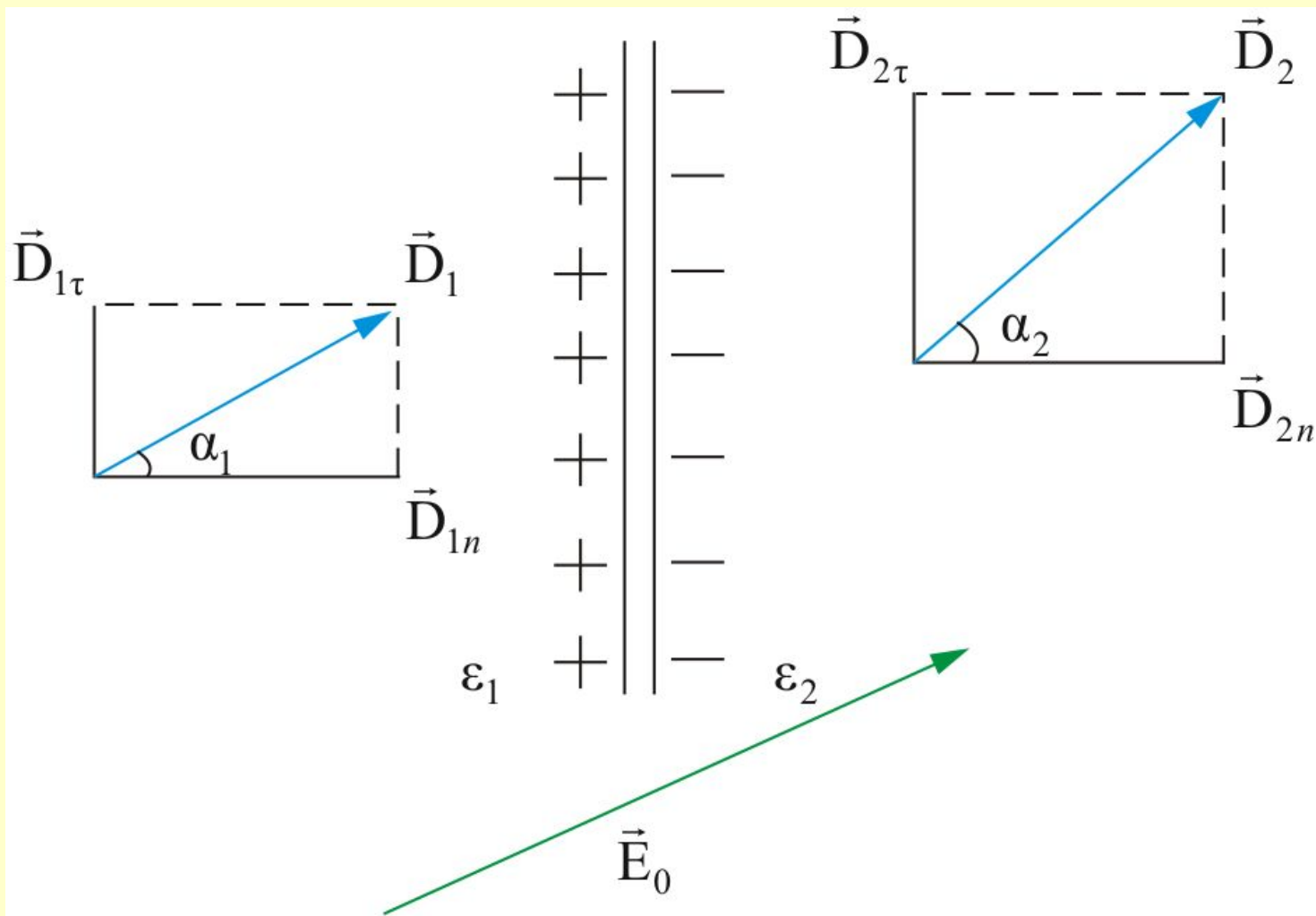
изменяется:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{2n} E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

- ***Это закон преломления вектора напряженности электростатического поля.***

- Рассмотрим изменение вектора  $\vec{D}$  и его проекций  $D_n$  и  $D_\tau$



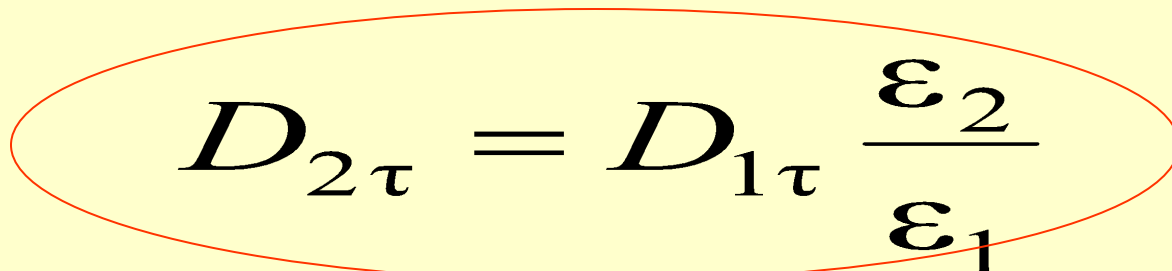
• Т.к.  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ , то имеем:

•  $D_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n} \quad D_{2n} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n}$

•  $\frac{D_{1n}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \varepsilon_1} = 1$

• т.е.  $D_{1n} = D_{2n}$  – нормальная составляющая вектора не изменяется.

•  $\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1\tau}}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$


$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

• т.е. тангенциальная составляющая вектора увеличивается в  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$  раз

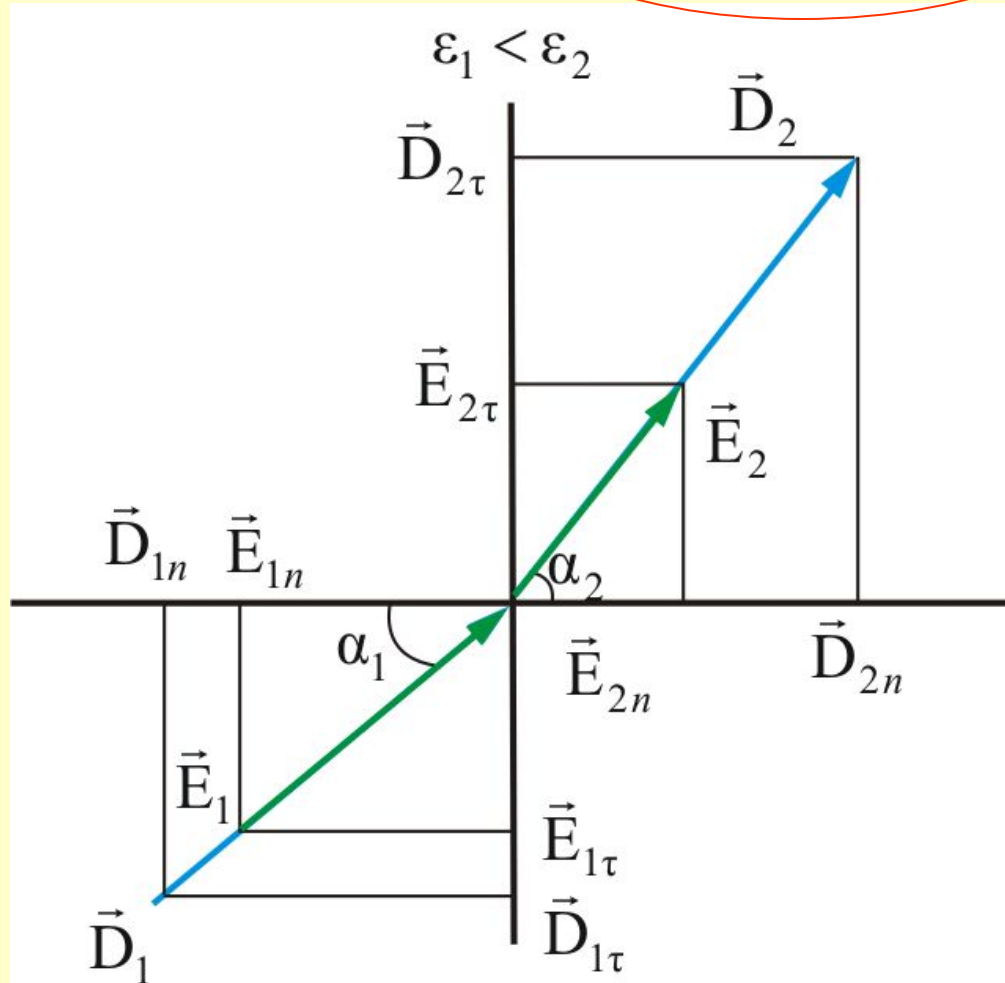
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{2\tau} D_{1n}}{D_{2n} D_{1\tau}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

- **закон преломления вектора  $D$ .**

- Объединим рисунки 4.12 и 4.13 и проиллюстрируем **закон преломления для векторов  $E$  и  $D$** :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

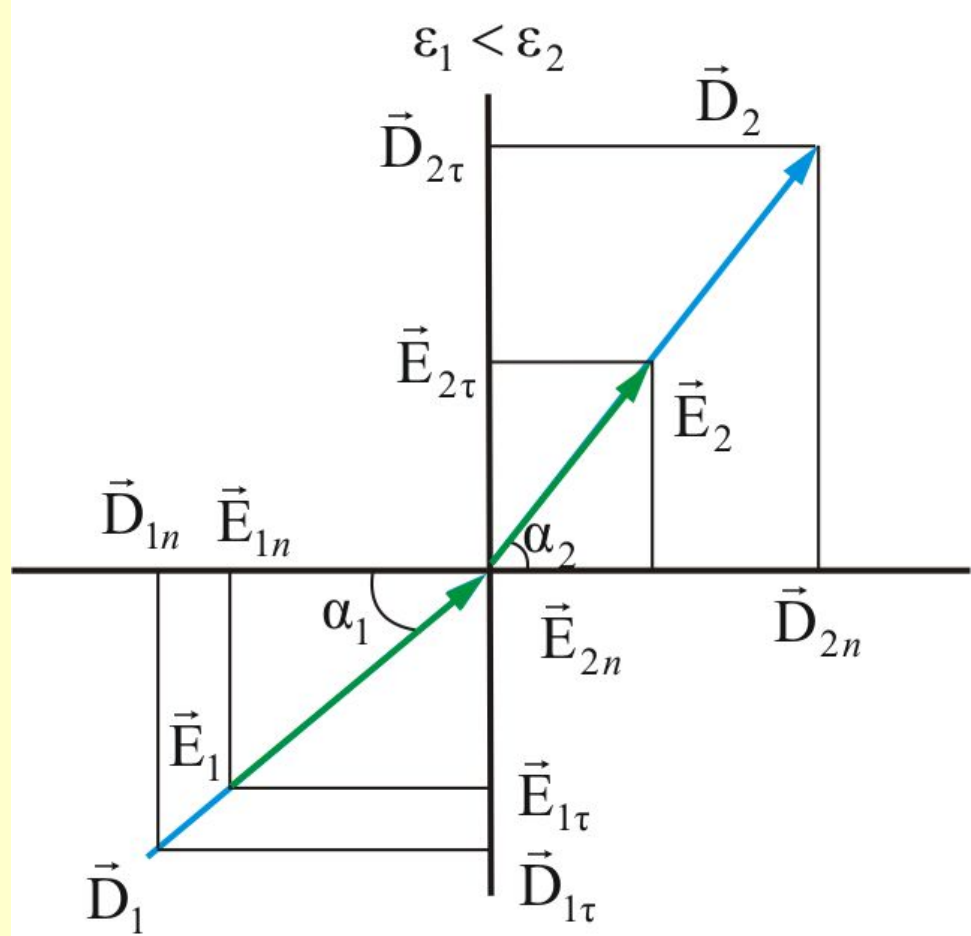




- Как видно из рисунка, при переходе из одной диэлектрической среды в другую вектор  $\vec{D}$  преломляется на тот же угол, что и  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$$

- Входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  удаляются от нормали.



**Сегодня: \***

Лекция окончена.

До свидания!

**УРА! УРА! УРА!**

**Сегодня: \***

Лекция окончена.

**До свидания!**