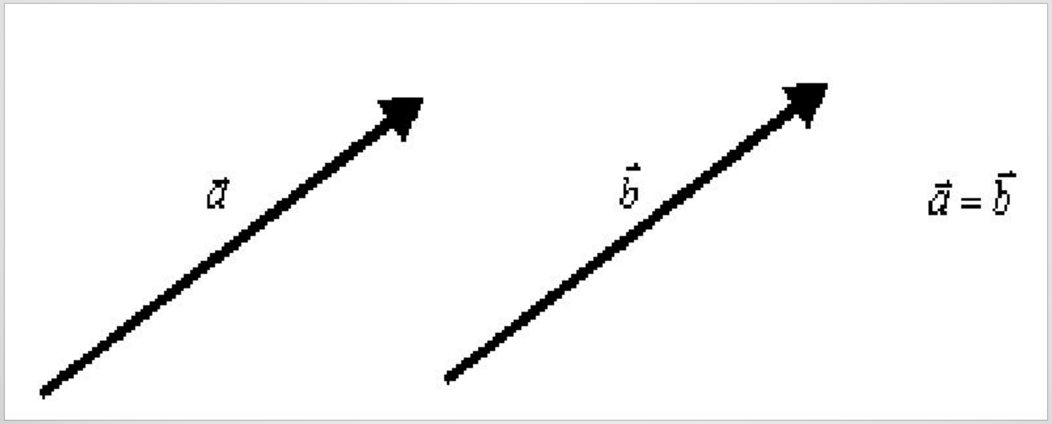
Вектора. Пространства . Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Векторы в пространства.

Определения:

1. Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ с началом в т. A и концом в т. B.
2. Длиной (модулем) $\left|\overline{AB}\right|$ вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB.
3. Векторы называются равными, если они имеют одинаковые модули



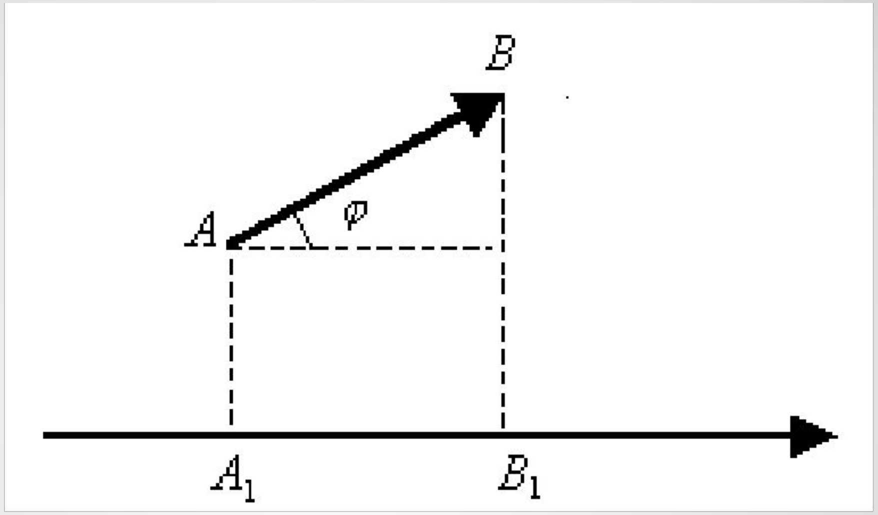
и одно и то же направление.

Из определения 3 следует, что любой вектор можно передвигать параллельно самому себе.

1. Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых называются коллинеарными (параллельными) и обозначаются $\vec{a}\,||\,\vec{b}$
2. Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB}=\overline{0}$ или $\overline{AB}=0$ - нулевой вектор.
3. Если $|\overline{e}|=1$, то $\overline{e}$ - единичный вектор.
4. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости, или находятся в параллельных плоскостях.
5. Проекцией вектора $\overline{a}=\overline{AB}$ на ось l называется величина

$$np_l\overline{a}=|\overline{a}|\cos\varphi\ ,$$

где φ - угол между направлениями оси l и вектора $\overline{a}$



Очевидно, что если A_1 и B_1 проекции точек A, B на ось l, то

$$A_1B_1 = np_l\overline{a}$$

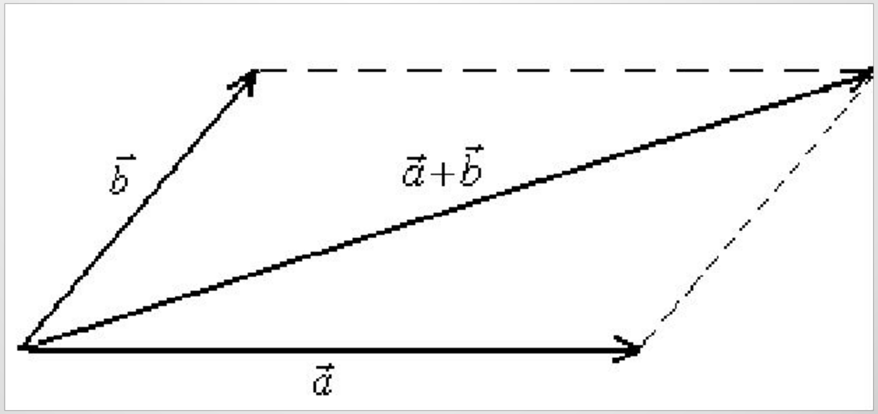
9. Произведением $\alpha \cdot \bar{a}$ числа α на вектор $\bar{a}$, называется вектор, модуль которого равен $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$, а направление совпадает с $\bar{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно $\bar{a}$, если $\alpha < 0$

Очевидно, что

а) Если $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, то существует число α, что $\bar{a} = \alpha \bar{b}$,

б) Если $\bar{a} \,||\, \bar{l}$ и $|\bar{l}| = 1$, то $\bar{a} = -|\bar{a}|\bar{l}$ или $\bar{a} = -|\bar{a}|\bar{l}$

10. Два вектора складываются по правилу параллелограмма.



Очевидно, что базисом в R_2 могут быть любые два неколлинеарных вектора, а в R_3 - любые три некомпланарных вектора.

Прямоугольная декартовая система координат

Определение 15. Направляющими косинусами вектора $\bar{a}$ называются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ углы, составляющие вектором $\bar{a}$ соответственно с координатными осями OX, OY, OZ.

Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Отсюда следует

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

З а м е ч а н и е 1. Так как три координаты (две координаты в R_2) однозначно определяют вектор, то многие геометрические задачи можно решать аналитически (через совокупность координат).

Скалярное произведение векторов

Определение 16. Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\overline{a}\cdot\overline{b}$, вычисляемое по формуле

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = ab\cos\alpha, \quad \alpha = \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right). \tag{4}$$

Так как $b\cos\alpha = пр_{\overline{a}}\overline{b}$, то $\overline{a}\overline{b} = a\,пр_{\overline{a}}\overline{b}$

Свойства скалярного произведения

1. Если $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\overline{b} = 0$.
2. $\overline{a}\cdot\overline{a} = a^2$
3. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$
4. $\overline{a}\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \overline{a}\overline{b} + \overline{b}\,\overline{c}$

$$m\left(\overline{a}\overline{b}\right) = \left(m\overline{a}\right)\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\left(m\overline{b}\right).$$

З а к л ю ч е н и е. С помощью скалярного произведения определяются:

1. Перпендикулярность двух векторов

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (6)$$

2. Косинус угла между векторами

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (7)$$

3. Проекцию одного вектора на другой

$$пр_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 2. Все вышеприведенные определения и формулы верны и в R_2. Надо только отбросить координату z.

Векторное произведение векторов

Определение 17. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на $\overline{b}$ назовем вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = [\overline{a}; \overline{b}]$, определяемый по правилу:

$$1.\ |\overline{c}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = ab\sin, \quad \alpha = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right), \quad o \le \alpha \le \pi \ , \tag{9}$$

1. $\overline{c} \perp \overline{a}, \quad \overline{c} \perp \overline{b}$
2. $\overline{c}$ направлен в ту сторону от плоскости, образуемой векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, так, чтобы кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ был против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\overline{c}$.

Свойства векторного произведения

1. Если $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = 0$.
2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
3. $\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $m\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(m\bar{a}\right) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(m\bar{b}\right)$.

Смешанное произведение векторов

Определение 18. Смешанным произведением векторов $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторов $\bar{a}\times\bar{b}$ и $\bar{c}$, и записывается в координатной форме

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Так как $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$, то смешанное произведение записывается в виде $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$.

Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Так как $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, а $h=np_{\bar{d}}\bar{c}$, где $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$, и $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|np_{\bar{d}}\bar{c}$, то $V=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|$.

З а м е ч а н и е . С помощью смешанного произведения определяются:

1. Компланарность 3-х векторов

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \qquad (13)$$

2. Объем параллелопипеда, построенного на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$

$$V=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right| \qquad (14)$$