ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Производная функции в точке. Геометричекий и механический смысл производной

п 1. Основные понятия.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a; b)$. Возьмем любое значение $x \in (a;b)$ и приращение Δx аргументу x в точке x_0 такое, что $x_0+\Delta x \in (a; b)$. Приращению аргумента Δx соответствует приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 +\Delta x) - f(x_0).$$

Считая $\Delta x \neq 0$, рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

которое будем называть разностным отношением (в данной точке x_0).

Определение. ***Производной*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (1), при условии, что этот предел существует.

Производная функции $y = f(x)$, в точке x_0 обозначается символом $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Таким образом, по определению производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

п 2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции *y = f(x)* (рис. 1). Точки *M* и *P* имеют координаты: *M* $(x_0, f(x_0))$, *P* $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. *Угол между секущей MP* и осью *OX* обозначим $\varphi(\Delta x)$

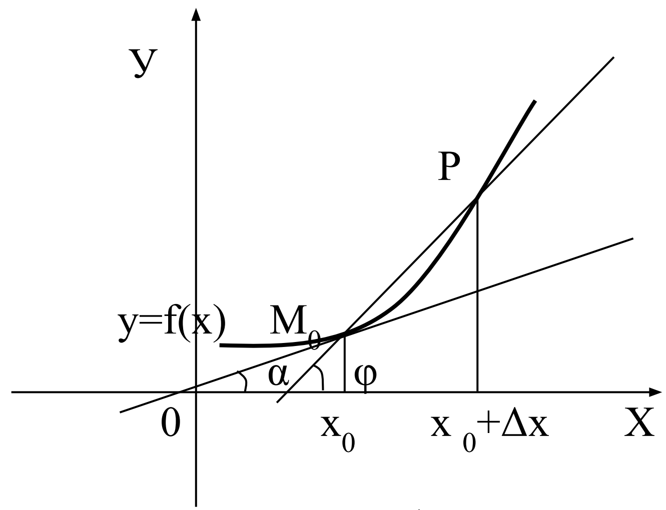

Рис.1

Имеем $$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как секущая *MP* при $\Delta x\to 0$ переходит в касательную, то $$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\operatorname{tg}\alpha,$$
где α –угол, образованной касательной с осью *OX*.

.

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Следовательно, $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$

Таким образом, производная функции f(x) в точке x_0 является ***угловым коэффициентом*** касательной к графику функции f(x) в точке M_0 (x_0 , f(x_0)).

Уравнение касательной, в этом случае, имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) .$$

Прямая, проходящая через точку M_0(x_0, f(x_0)) перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к данной кривой.

Ее уравнение

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) .$$

п 3. Механический смысл производной.

Пусть функция s = f(t) описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е. зависимость пути s, пройденного точкой от начала отсчета за время t. Тогда производная - это ***мгновенная скорость*** v(t_0) точки в момент времени t_0 **.**

п 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема . Если функции u=u(x), v=v(x) имеют производные в данной точке *x*, то в этой точке существуют производные их суммы, разности, произведения и частного (частное при условии, что *v(x)≠0*), причем имеют место формул

1^0 $$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$,

в частности $$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x),$$

2^0 $$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

3^0 $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$, (v(x)≠0).

Замечание 1. Нахождение производной функции называется ***дифференцированием.***

Замечание 2. Производная функции в точке определяет скорость изменения этой функции в данной точке.

§ 2. Производная обратной функции. Правило дифференцирования сложной функции.

п 1. Обратная функция.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и обратная ее функция $x = \varphi(y)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в точке x_0 этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$, определяемую равенством

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Например. Дана функция $y = \arcsin x$. Обратная ей функция $x = \sin y$.

Т. к. $x' = (\sin y)' = \cos y$, то

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \left| \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

п.2 Сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — называется сложной функцией с промежуточным аргументом **u** и независимым аргументом **x**.

Теорема . Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x_0, равную

$$y'_x(x_0) = y'_u \cdot u'_x$$

Пример. Найти производную функции

$$y = \sin^5 x .$$

Решение. Здесь $y = f(u) = u^5$, а $u = \varphi(x) = \sin x$. Т.к. $y'_u = (u^5)' = 5u^4$,

а $u'_x = (\sin x)' = \cos x$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 5u^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cdot \cos x$$

п.3 Таблица производных функций

1. $(c)' = 0.$
2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$,

2a. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$