Тригонометрические уравнения Практикум по решению

- $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
- $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$
- $\mathrm{tg}\, x + 3\,\mathrm{ctg}\, x - 4 = 0$
- $4\sin x + 3\cos x = 0$
- $\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$
- $1 + \cos x + \cos 2x = 0$
- $\cos x - \sin 2x = 0$
- $\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x = 0$
- $4\cos^2 x - 1 = 0$

?

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Уравнение

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

квадратное

относительно "sin x"

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Пусть $\underline{\sin x = t}$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

a b c

$\underline{D = b^2 - 4ac}$

$$D = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25$$

$\underline{t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a}$

$$t_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{25})/4$$

$t_1 = -2$ | $t_2 = ½$

$\sin x = -2$ | $\sin x = ½$

Нет корней | $x = (-1)^k \cdot п/6 + пk$

$\sin x = a\ (|a| \le 1)$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + пk,$

$k \in Z$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot п/6 + пk,$

?

$$2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Если в уравнении встречаются разные тригонометрические функции, то надо попытаться их заменить на какую-нибудь одну, используя тригонометрические тождества.

Каким тригонометрическим тождеством связаны синус и косинус одного и того же аргумента?

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x - 5 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 5 = 0$$

$$-2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

Пусть $\cos x = t$

$$\underset{a}{2} t^2 + \underset{b}{5} t + \underset{c}{3} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$t_1 = -3/2$	$t_2 = -1$
$\cos x = -3/2$	$\cos x = -1$
Нет корней	$x = \pi + 2\pi k$

$\cos x = a$ $(|a| \leq 1)$

при $a = -1$

частный случай

Ответ: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

?

$\underline{tg\ x} + 3\ \underline{ctg\ x} - 4 = 0$

Если в уравнении встречаются разные тригонометрические функции, то надо попытаться их заменить на какую-нибудь одну, используя тригонометрические тождества.

Каким тригонометрическим тождеством связаны тангенс и котангенс одного и того же аргумента?

$tg\ x \cdot ctg\ x = 1$

$\operatorname{tg} x + 3 \underline{\operatorname{ctg} x} - 4 = 0$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$

$\operatorname{tg} x + 3 \cdot \underline{1/\operatorname{tg} x} - 4 = 0$

$\underline{\operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x}$

$t + 3/t - 4 = 0 \quad | \cdot t$

Пусть $\underline{\operatorname{tg} x = t}$

$t^2 + 3 - 4t = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

a b c

$\underline{D = b^2 - 4ac}$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$\underline{t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a}$

$t_1 = 1$ $t_2 = 3$

$\operatorname{tg} x = 1$ $\operatorname{tg} x = 3$

$\operatorname{tg} x = a$ (а-любое число)

$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

$x = \pi/4 + \pi n$ $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$

Ответ: $x = \pi/4 + \pi n;\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k;\ k, n \in Z$

?

$4 \sin x + 3 \cos x = 0$

Это уравнение однородное 1 - ой степени относительно sin x и cos x

Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень называется ***однородным***

Уравнение решается путём деления обеих его частей на старшую степень косинуса, то есть на

$\underline{\cos x \neq 0}$

В результате получается уравнение вида

$\boxed{A \operatorname{tg} x + B = 0}$

$4 \sin x + 3 \cos x = 0$

I : $\cos x \neq 0$

$\Downarrow$

$4 \underline{\sin x / \cos x} + 3 \cos x / \cos x = 0$

$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$

$\Downarrow$

$4 \underline{\operatorname{tg} x} + 3 = 0$

$\underline{a x + b = 0}$

$a x = - b$

$x = -b / a$

$\Downarrow$

$4 \operatorname{tg} x = - 3$

$\Downarrow$

$\operatorname{tg} x = - 3 / 4$

$\operatorname{tg} x = a$ (а-любое число)

$\Downarrow$

$x = \operatorname{arctg}(-3 / 4) + \pi k$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}(-\frac{3}{4}) + \pi k;\ k \in Z$

?

$\sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 6 \cos^2 x = 0$

Уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и ту же степень называется *однородным*

Это уравнение однородное 2 - ой степени относительно sin x и cos x

Уравнение решается путём деления обеих его частей на старшую степень косинуса, то есть на $\cos^2 x \neq 0$

В результате получается уравнение вида

$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$

$\sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 6 \cos^2 x = 0$ | : $\cos^2 x \neq 0$

$\sin^2 x/\cos^2 x - (5 \sin x \cdot \cos x)/\cos^2 x + 6 \cos^2 x/\cos^2 x = 0$

$tg\, x = \sin x/\cos x$

$tg^2 x - 5\, tg x + 6 = 0$

Пусть $tg\, x = t$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

a b c

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$

$t_1 = 2$ | $t_2 = 3$

$tg\, x = a$ (a-любое число)

$tg\, x = 2$ | $tg\, x = 3$

$x = arctg\, a + \pi k,\ k \in Z$

$x = arctg 2 + \pi k$ | $x = arctg 3 + \pi n$

Ответ: $x = arctg 2 + \pi k;\ x = arctg 3 + \pi n;\ k, n \in Z$

?

$1 + \cos x + \cos 2x = 0$

Это уравнение решается с помощью одной из формул тригонометрии:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

В некоторых тригонометрических уравнениях предварительно требуется преобразовать выражение с помощью формул тригонометрии:

- основных тригонометрических тождеств,
- сложения,
- двойного аргумента

В результате получается уравнение с одной функцией одного и того же аргумента

$1 + \cos x + \underline{\cos 2x} = 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$1 + \cos x + \underline{2\cos^2 x - 1} = 0$

$\cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\cos x$ - общий множитель

$\cos x(1 + 2\cos x) = 0$

Произведение равно «0», если .....

$\cos x = 0$

$1 + 2\cos x = 0$

$\cos x = a$ $(|a| \le 1)$

$x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$

$x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$

$\cos x = -½$

$x = \pm \arccos(-½) + 2\pi k$

$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$

Ответ: $x = \pi/2 + \pi n$; $\pm 2\pi/3 + 2\pi k$, $k, n \in Z$

?

$\cos x + \sin 2x = 0$

Это уравнение решается с помощью формулы тригонометрии:

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

В некоторых тригонометрических уравнениях предварительно требуется преобразовать выражение с помощью формул тригонометрии:

- основных тригонометрических тождеств,
- сложения,
- двойного аргумента

В результате получается уравнение, которое решается путём вынесения общего множителя за скобки

$\cos x - \underline{\sin 2x} = 0$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos x - \underline{2\sin x \cdot \cos x} = 0$

$\cos x$ - общий множитель

$\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

Произведение равно «0», если .....

$\cos x = 0$

$1 - 2\sin x = 0$

$x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z$

$\sin x = ½$

$\sin x = a \ (|a| \le 1)$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin ½ + \pi k$

$x = (-1)^k \cdot \pi/6 + \pi k$

Ответ: $x = \pi/2 + \pi n; \ (-1)^k \cdot \pi/6 + \pi k, \ k, n \in Z$

?

$$\sqrt{3} \cdot tg^2 x - 3\, tg\, x = 0$$

⇓

Это уравнение решается путём вынесения общего множителя за скобки

⇓

В результате разность тригонометрических функций преобразуется в произведение, которое по условию равно «0»

$\sqrt{3} \cdot tg^2 x - 3\, tg\, x = 0$

tg x - общий множитель

$tg\, x (\sqrt{3} \cdot tg\, x - 3) = 0$

Произведение равно «0», если .....

$tg\, x = 0$

$\sqrt{3} \cdot tg\, x - 3 = 0$

$x = arctg\, 0 + \pi k$

$tg\, x = 3/\sqrt{3}$

$tg\, x = a$ (а-любое число)

$x = \pi n,$
$n \in Z$

$tg\, x = \sqrt{3}$

$x = arctg\, a + \pi k,$
$k \in Z$

$x = arctg\, \sqrt{3} + \pi k$

$x = \pi/3 + \pi k$

Ответ: $x = \pi n;\ \pi/3 + \pi k,\ k, n \in Z$

?

$4\cos^2 x - 1 = 0$

Это уравнение решается путём разложения выражения на множители

**В результате выражение в левой части уравнения преобразуется в произведение,
которое по условию равно «0»**

$$4\cos^2 x - 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

Произведение равно «0», если …..

$2\cos x - 1 = 0$	$2\cos x + 1 = 0$
$\cos x = 1/2$	$\cos x = -1/2$
$x = \pm \arccos 1/2 + 2\pi n$	$x = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k$
$x = \pm \pi/3 + 2\pi n$	$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$

$\cos x = a$

(а-любое число)

$x = \pm \arccos a + 2\pi k,$

$k \in Z$

Ответ: $x = \pm \pi/3 + 2\pi n;\ \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k, n \in Z$