

Математические основы

САПР

Лекция 1

Mathcad

Mathcad — математически ориентированная универсальная система компьютерной математики для автоматизации решения математических задач в различных областях науки, техники и образования.

Mathcad

- *Mathcad* – математически ориентированная универсальная система компьютерной математики для автоматизации решения математических задач в различных областях науки, техники и образования.
- Название системы *Mathcad* происходит от двух слов:
- *Mathematica* – математика;
- *CAD* – системы автоматизированного проектирования или САПР.

- Основная **идея *Mathcad*** состоит в том, что вычисляемые выражения записываются в визуальной форме, максимально приближенной к математической записи, привычной для человека. Используется **принцип *WYSIWYG* (*What You See Is What You Get* - «что видите, то и получаете»)**.

Возможности системы

- 1. *Числовые расчеты* со скалярами, матрицами и векторами (матрицами из одного столбца). Возможны расчеты с использованием комплексных чисел.
- 2. *Аналитические преобразования*: интегрирование, дифференцирование, вычисление пределов, сумм и произведений рядов, упрощение, преобразования Лапласа и Фурье и др.
- 3. *Определение законов вычисления элементов матриц*, что позволяет реализовать итерационные вычисления, в том числе по рекуррентным формулам.
- 4. *Работа со стандартными функциями*: интерполяция, экстраполяция, численное интегрирование, матричные функции и др.

- 5. *Определение пользовательских функций.*
- 6. *Построение двумерных и трехмерных графиков различных видов.*
- 7. *Решение систем линейных и нелинейных уравнений.*
- 8. *Решение оптимизационных задач* вида: найти значения переменных, при которых функция принимает минимальное или максимальное значение.
- 9. *Решение дифференциальных уравнений* (обыкновенные дифференциальные уравнения и системы уравнений; уравнения Пуассона и Лапласа).
- 10. *Элементы программирования.*

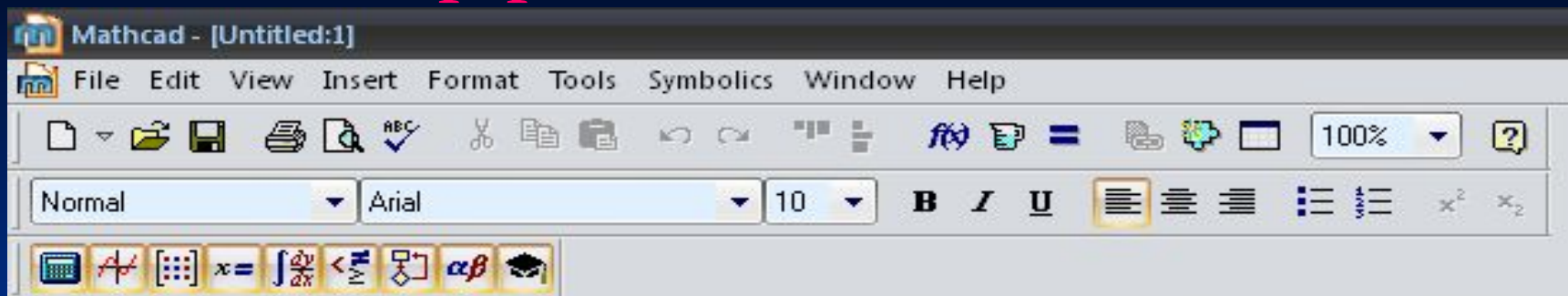
Mathcad содержит:

- обширную **библиотеку** встроенных математических **функций**;
- инструменты **построения графиков** различных типов;
- средства создания текстовых комментариев и **оформления отчетов**;
- конструкции, подобные **программным конструкциям** языков программирования, позволяющие писать программы для решения задач, которые невозможно или очень сложно решить стандартными инструментами пакета;
- удобно организованную **интерактивную систему** получения справки и оперативной подсказки.

Достоинства *Mathcad*

- Во-первых, это **универсальность** пакета *Mathcad*, который может быть использован для решения самых разнообразных инженерных, экономических, статистических и других научных задач.
- Во-вторых, **программирование** на общепринятом математическом языке позволяет преодолеть языковой барьер между машиной и пользователем. Потенциальные пользователи пакета - от студентов до академиков.
- В-третьих, **интеграция** с офисными программами (Excel, Word) и другими программными продуктами (Mathlab, Maple, Creo).

Интерфейс системы *Mathcad*



Calculator

sin	cos	tan	ln	log
n!	i	x	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt[n]{\quad}$
e^x	$\frac{1}{x}$	()	x^2	x^y
π	7	8	9	/
$\frac{\square}{\square}$	4	5	6	\times
\div	1	2	3	$+$
\equiv	.	0	-	$=$

Graph

Matrix

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ x_n x^{-1} $|x|$

$f(x)$ $M^{<>}$ M^T $m..n$

$\delta \cdot \hat{v}$ $\delta \times \hat{v}$ ΣU $\frac{d}{dt}$

Evaluati...

$=$ $:=$ \equiv

\rightarrow $\bullet \rightarrow$ $f x$

$x f$ $x f y$ $x^f y$

Calculus

$\frac{d}{dx}$ $\frac{d^n}{dx^n}$ ∞

\int_a^b $\sum_{i=1}^n$ $\prod_{i=1}^n$

\int \sum_n \prod_n

$\lim_{\rightarrow a}$ $\lim_{\rightarrow a^+}$ $\lim_{\rightarrow a^-}$

Boolean

$=$ $<$ $>$ \leq \geq

\neq \neg \wedge \vee \oplus

Programming

Add Line \leftarrow

if otherwise

for while

break continue

Greek

α β γ δ ϵ ζ

η θ ι κ λ μ

ν ξ \omicron π ρ σ

τ υ ϕ χ ψ ω

Symbolic

\rightarrow $\bullet \rightarrow$ Modifiers

float complex assume

solve simplify substitute

factor expand coeffs

Документ в системе Mathcad

- **Состоит из блоков.** В документе блоки имеют точку привязки, расположенную слева. Блоки могут быть трех типов - текстовые, вычислительные, графические.
- **Текстовые блоки** играют роль неисполняемых комментариев. Они служат лишь для повышения наглядности документа.
- **Вычислительные блоки** состоят из исполняемых математических выражений, например, формул, уравнений, равенств, неравенств и т.д.
- **Графические блоки** также являются исполняемыми.
- **Тип создаваемых документов** -- ***.mcd** или ***.xmtcd**

Входной язык системы Mathcad

- *Математически ориентированный* входной язык является *визуально-ориентированным* языком программирования и предназначен для общения пользователя с системой.
- *Визуально-ориентированный* язык общения системы Mathcad надо отличать от языка реализации системы, т.е. обычного языка программирования высокого уровня, на котором написана система.
- *Языком реализации* системы Mathcad является один из самых мощных языков высокого уровня – *C++*.

Алфавит входного языка

совокупность символов и слов, которые используются при задании команд и функций, необходимых для решения пользовательских задач.

- **Алфавит** содержит:
- строчные и прописные латинские буквы;
- цифры от 0 до 9;
- греческие буквы;
- Системные переменные;
- Математические операторы;
- Имена встроенных функций;
- Спецзнаки.

Укрупненные элементы языка

- Типы данных;
- Операторы;
- Встроенные функции;
- Функции пользователя;
- Процедуры и управляющие структуры (например, циклы).

Типы данных

- Константы;
- Переменные;
- Массивы;
- Файловые данные.

Константы

- **Константы** — поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены.
- Например, $\pi = 3.14$.
- **Используемые типы констант**
 1. **Целочисленные** (2, -54, +43).
 2. **Вещественные** (1.3, -2.23).
 3. **Восьмеричные числа** (идентифицируются латинской буквой O – от слова octal- восьмеричное).
 4. **Шестнадцатеричные числа** 0,1,2,..A,B,C,D,E,F (имеющие в конце отличительный признак в виде буквы h или H; если число начинается с буквы, то перед ней вводится 0).
 5. **Комплексные** (2.5+7i).
 6. **Строковые**. Обычно это комментарии вида: “Вычисление суммы”.
 7. **Системные**. Системная константа – это предварительно определённая переменная, значение которой задаётся в начале загрузки системы. Примерами таких констант являются числа e или pi.
 8. **Единицы измерения физических величин**.

Переменные

объекты с именами, хранящие данные определенного типа. Тип переменной определяется ее значением - переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т.д.

- **Идентификаторы** в *Mathcad* могут состоять из букв латинского или греческого алфавита и цифр, но в начальной позиции может стоять только буква. Идентификатор не должен совпадать со служебными словами, предусмотренными в системе. Следует иметь в виду, что *Mathcad* различает малые и заглавные буквы.

Присваивание значений переменным

- В системе есть три знака равенства, выполняющие разные действия.
- Знак “:=” - присвоить значение переменной (**локальное присваивание**). До этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать.
- знак “=“ - вывести результаты вычислений,
- знак “==“ - логическое равенство (жирный знак равенства).
- Знак “≡” **глобальное присваивание**, т.е. оно может производиться в любом месте документа.

Системные переменные

- В *Mathcad* содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать *системными переменными*.
- Это, например, **TOL** [0.001]- погрешность числовых расчетов, **ORIGIN** [0] — нижняя граница значения индекса индексации векторов, матриц и др. Значения этим переменным при необходимости можно задать другие.

Ранжированные переменные

- Эти переменные имеют ряд фиксированных значений, либо целочисленных, либо изменяющихся с определенным шагом от начального значения до конечного.
- **Создание ранжированной переменной :**
- **Name = Nbegin, (Nbegin+Step)..Nend,**
- где **Name** — имя переменной;
- **Nbegin** — начальное значение;
- **Step** — заданный шаг изменения переменной;
- **Nend** — конечное значение.
- Если **Nbegin > Nend**, то шаг изменения переменной будет равен +1, в противном случае -1.
- Ранжированные переменные широко применяются для представления численных значений функций в виде таблицы, а также для построения их графиков.

Размерные константы

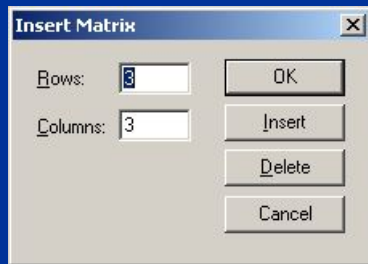
- это общепринятые единицы измерения. Например, метры, секунды и т.д.
- Чтобы записать размерную константу, необходимо после числа ввести знак * (умножить), выбрать пункт меню *Insert* подпункт *Units*. В измерениях наиболее известные вам категории: *Length* — длина (м, км, см); *Mass* — вес (гр, кг, т); *Time* — время (мин, сек, час).

Массивы

- **Массив** — имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса.
- В пакете *Mathcad* используются массивы двух наиболее распространенных типов:
 - **одномерные** (векторы);
 - **двухмерные** (матрицы).

Ввод массивов

- выбрать пункт меню **Insert - Matrices**;
- нажать комбинацию клавиш **Ctrl + M**;
- нажать кнопку  на *Панели векторов и матриц*.
- В результате появится диалоговое окно, в котором задается необходимое число строк и столбцов:




Rows — число строк

Columns — число столбцов

- Если матрице (вектору) нужно присвоить имя, то вначале вводится имя матрицы (вектора), затем — оператор присвоения и после — шаблон матрицы. Шаблон матрицы

Переменная с индексом

- *Переменная с индексом* — это переменная, которой присвоен набор не связанных друг с другом чисел, каждое из которых имеет свой номер (индекс).
- **Ввод индекса** осуществляется нажатием левой квадратной скобки на клавиатуре или при помощи кнопки  на панели .
- В качестве индекса можно использовать как константу, так и выражение. Для инициализации переменной с индексом необходимо ввести элементы массива, разделяя их запятыми.

■ Пример. **Ввод индексных переменных.**

■ $i := 0..2$ — индекс изменяется от 0 до 2 (индексная переменная будет содержать 3 элемента).

■ — ввод числовых значений в таблицу производится через запятую;

■ $s_i :=$

-2
2
5.75

— вывод значения первого элемента вектора S ;

$s_0 = -2$

Файловые данные

- **Ввод/вывод во внешние файлы.**
- Для общения с внешними файлами в MathCAD встроены следующие функции:
- **READPRN** (“file”) – чтение данных в матрицу из текстового файла;
- **WRITEPRN** (“file”) – запись данных из матрицы в текстовый файл;
- **APPENDPRN** (“file”) – дозапись данных в существующий текстовый файл,
- где **file** – путь к файлу.

Операторы

- *Операторы* — это специальные знаки, указывающие на характер операций, выполняемых с теми или иными данными, именуемыми операндами. **Операторы вводятся с помощью шаблонов**, которые в свою очередь, имеют места ввода для операндов.

- Общеизвестны бинарные **арифметические операторы**
- $+$ (сложение), $-$ (вычитание), $*$ (умножение), $/$ (деление) и $^$ (возведение в степень).
- С такими операторами используются два операнда, например, $2+3=5$. Здесь 2 и 3 – операнды, или данные, с которыми выполняется операция. Часто применяются операторы вывода $=$ и \rightarrow .
- Для выражения равенства или неравенств используются **операторы отношения**
- $=$ (равно), $<$ (меньше), $>$ (больше) и др.
- Полный набор их можно найти в палитре операторов Булевой алгебры ***Boolean***. Входными данными и результатами выполнения логических операций являются утверждения ***true*** (логическая 1) и ***false*** (логический 0).

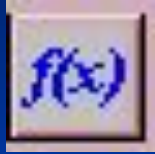
Расширенные операторы

- вычисление сумм (ввод \$);
- произведение последовательностей (#);
- дифференцирование (?);
- интегрирование выражений (&).

Функции

- **Функция** — выражение, согласно которому производятся некоторые вычисления с аргументами и определяется его числовое значение. Примеры функций: $\sin(x)$, $\tan(x)$ и др.
- Отличительной особенностью функции является возврат значения (результата вычисления функции) в ответ на обращение к ней.
- Функции в пакете *Mathcad* могут быть:
- **Встроенными;**
- **определенными пользователем.**

Вставка встроенных функций

- Выбрать пункт меню **Insert – Функция**.
- Нажать комбинацию клавиш **Ctrl + E**.
- Щелкнуть по кнопке  на панели инструментов.
- Набрать имя функции на клавиатуре.
- **Пример.** $f(z) := \sin(2z^2)$

Стандартные функции *Mathcad*

■ *Экспоненциальные и логарифмические функции*

- $\exp(X)$ - экспонента от X ;
- $\ln(X)$ - натуральный логарифм от X ;
- $\log(X)$ - десятичный логарифм от X ;
- $\log(X,b)$ - логарифм от X по основанию b .

■ *Гиперболические и тригонометрические*

■ *(прямые и обратные) функции*

- $\sin(X)$, $\cos(X)$, $\tan(X)$, $\cot(X)$, $\sec(X)$, $\csc(X)$ - соответственно синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс от X , причем аргументы указываются в *радианах*;
- $\sinh(X)$, $\cosh(X)$, $\tanh(X)$, $\coth(X)$, $\operatorname{sech}(X)$, $\operatorname{csch}(X)$ - аналогичные гиперболические функции;
- $\operatorname{asin}(z)$, $\operatorname{acos}(z)$, $\operatorname{atan}(z)$, $\operatorname{acot}(z)$, $\operatorname{asec}(z)$, $\operatorname{acsc}(z)$ - соответственно арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс от z .

Функции для работы с комплексными числами

- $\text{Re}(Z)$, $\text{Im}(Z)$ - соответственно вещественная и мнимая части комплексного числа Z ;
- $\text{arg}(z)$ - аргумент комплексного числа z (в радианах).

Матричные функции

- **length(V)** - возвращает число элементов вектора V ;
- **cols(A)** - возвращает число столбцов матрицы A ;
- **rows(A)** - возвращает число строк матрицы A ;
- **matrix(m,n,f)** - матрица размером $m \times n$, значения элементов матрицы определяются f - функцией $f(i,j)$ от двух переменных (номера строки и номера столбца). Эта функция должна быть предварительно определена пользователем;
- **identity(n)** - единичная матрица ;
- **tr(M)** - след матрицы M (сумма элементов главной диагонали);
- **rank(A)** - ранг матрицы M ;
- **norme(M)** - эвклидова норма матрицы M , то есть корень квадратный из суммы квадратов всех элементов;

Статистический анализ данных

- **gmean(G1,G2,G3...)** - среднее геометрическое аргументов;
- **mean(G1,G2,G3...)** - среднее арифметическое аргументов;
- **var(G1,G2,G3...)** - дисперсия;
- **stdev(G1,G2,G3...)** - среднеквадратичное отклонение.

Дискретные преобразования

- **fft(V1), ifft(V2)** - прямое и обратное быстрые преобразования Фурье над вещественными данными. $V1$ - вектор из 2^m элементов, $V2$ - вектор из $1 + 2^{m-1}$ элементов, $m > 2$;
- **cfft(A), icfft(A)** - прямое и обратное преобразования Фурье над вещественными и комплексными векторами и матрицами;
- **wave(V), iwave(V)** - прямое и обратное вейвлет-преобразования, V - вектор из 2^m элементов, m - целое число.

Прочие функции

- **max(G1,G2,...)** - максимальное значение среди аргументов;
- **min(G1,G2,...)** - минимальное значение среди аргументов;
- **if(a,b,c)** - возвращает b , если a , иначе возвращает c ;
- **sign(a)** - возвращает -1 , 0 или 1 в зависимости от знака числа a .

Пользовательские функции

Чтобы воспользоваться собственной функцией, нужно:

- 1. **Описать функцию.**
- ввести имя функции с обязательным указанием в скобках аргумента, например, $f(x)$;
- ввести оператор присвоения ($:=$);
- ввести вычисляемое выражение.
- 2. **Вызвать описанную функцию для выполнения.**

Описание функции

- Для описания функции используются идентификаторы: имя функции и имена формальных параметров функции.
- **Формальный параметр** – это идентификатор, конкретное значение которого определяется путём замены его на соответствующее ему значение фактического параметра при обращении к функции. Функции однозначно ставят в соответствие значениям аргументов (формальным параметрам) значения фактических параметров функции.
- **Формат определения функции:**
- *Имя_функции (список_формальных_параметров):=выражение*
- *Список_формальных_параметров* - список переменных, через которые параметры передаются в тело функции, **Выражение** - математическое выражение (тело функции), задающее нужную функциональную зависимость.

- **Вызов пользовательской функции** производится подобно тому, как в случае вызова любой стандартной функции.
- Можно поместить результат в отдельную переменную:
- *Имя_переменной_результата:=Имя_функции (список_формальных_параметров)*
Или напечатать:
- *Имя_функции(список формальных параметров)=*