# Глава 6
# Элементарные функции и задаваемые ими конформные отображения

## 6.1 Линейная функция

Определение. Линейной называется функция $w = az + b$, где $a, b$ – комплексные постоянные и $a \neq 0$.

Область определения $D = \mathbf{C}$, функция однолистна, $w' = a$, следовательно функция аналитична на $C$.

Эта функция устанавливает...? отображение...? рода.

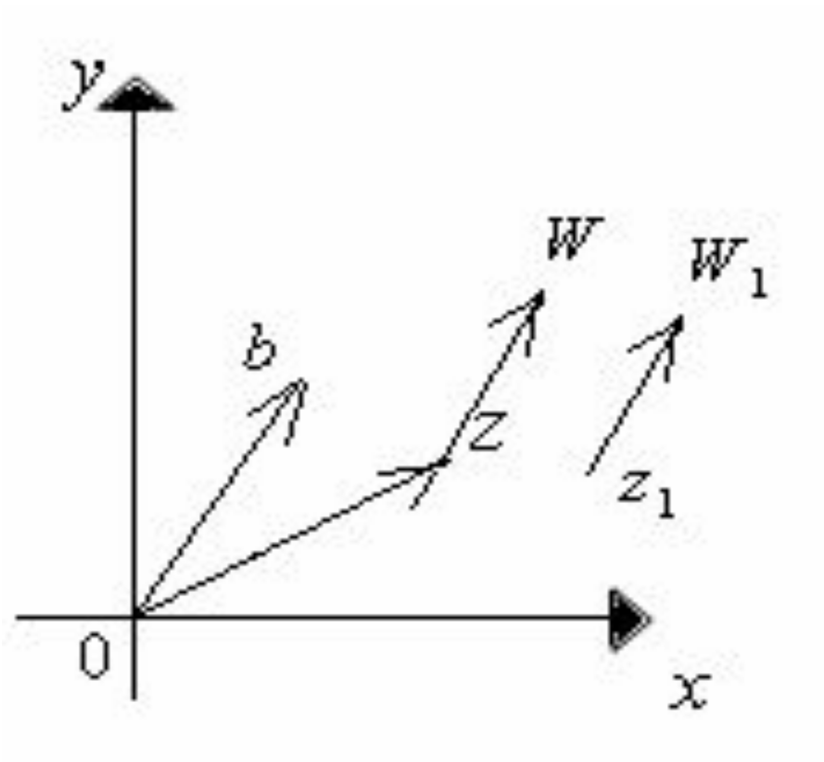
Итак, линейная функция устанавливает конформное отображение 1 рода с постоянным коэффициентом растяжения $k = |a|$ и одинаковым углом поворота равным $Arg a$.

Изучим подробнее отображение, осуществляемое данной функцией. При этом совместим плоскости $(z)$ и $(w)$ так, чтобы совпали их оси координат.

Рассмотрим сначала частные случаи.

1. Пусть $a = 1$. Функция примет вид $(2)\, w = z + b$. Эта функция каждой точке $z$ ставит в соответствие т. $w = z + b$.

Так как сложение комплексных чисел геометрически сводится к сложению векторов, то при отображении $w = z + b$ каждая т. $z$ смещается в соответствующую т. $w$ на вектор $b$, изображающий число $b$.




В виду того, что $b$ постоянно, вектор сдвига одинаков для всех точек плоскости, и мы имеем преобразование параллельного переноса.

Если положим $z = x + iy$, $b = b_1 + ib_2$, $W = U + iV$, то равенство $(2)$ $w = z + b$ запишется в равносильном ему виде $(3)$ $\begin{cases} U = x + b_1, \\ V = y = b_2, \end{cases}$ формулы параллельного переноса в декартовых координатах.

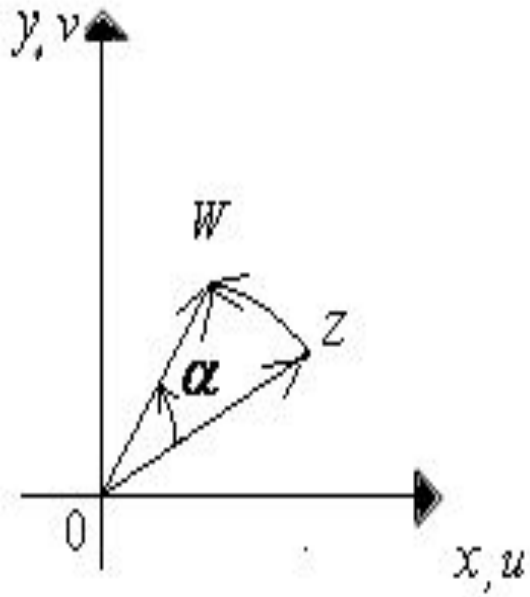
2. $|a|=1,\ b=0$.

Запишем $a$ в тригонометрической форме $(4)$ $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Функция примет вид $w=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot z$.

Очевидно $|w|=|z|$ и $Argw=Argz+\alpha$.

**Поясните**?




Следовательно, точки $z$ и $w$ находятся на одинаковом расстоянии от нулевой точки и аргументы их отличаются на один угол $\alpha$.

Таким образом, отображение осуществляемое функцией есть вращение на угол $\alpha$ вокруг начала координат. Если $z = x + iy$, $w = U + iV$, то отображение $w = az$, $|a| = 1$ запишется в виде:

$$\begin{matrix} U = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ V = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{matrix} \quad (5)$$ – формулы вращения в декартовых координатах.

3. В этом случае коэффициент при $z$, т.е. $a$ является действительным положительным числом $a = k$. Функция $w = kz$ ставит в соответствие каждому комплексному числу $z$ комплексное число $w$ такое, что $|w| = k|z|$, $Argw = Argz$. Это значит, что точки $z$ и $w$ лежат на одном луче, исходящем из нулевой точки и отношение $\dfrac{|w|}{|z|} = k$.

Следовательно отображение является ... ?

гомотетией с центром в нулевой точке и коэффициентом $k$. При $k > 1$ имеем растяжение, при $k < 1$ - сжатие, при $k = 1$ - тождественное преобразование плоскости.

Вернемся к рассмотрению общего случая.

Положим $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, тогда $(1)$ примет вид $w = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)z + b$. Это преобразование может быть получено путем последовательного выполнения преобразований:

$\xi = (\cos\alpha + i\sin\alpha) * z$ – вращение на угол $\alpha$,

$\tau = k * \xi$ – гомотетия,

$w = \tau + b$ – параллельный перенос.

Укажем некоторые свойства линейной функции

1. Линейная функция $w = az + b$, где $|a| = 1$.

Сохраняет расстояние между точками.

Доказательство.

Пусть $z_1$, $z_2$ – произвольные точки комплексной плоскости $(z)$

$w_2 - w_1 = az_1 + b - (az_2 + b) = a(z_1 - z_2)$.

Так как $|a| = 1$, то $|w_2 - w_1| = |z_2 - z_1|$.

2. Линейная функция $w = az + b$ отображает треугольник на подобный ему треугольник.

Доказать самостоятельно.

2. Линейная функция $w = az + b$ отображает окружность на окружность.

Доказательство.

Данное свойство вытекает из того, что составляющие преобразования (вращение, гомотетия, параллельный перенос) обладают этим свойством.

## 6.2 Функция $w = \frac{1}{z}$

Функция $w = \frac{1}{z}$ определена на множестве $D = C - \{0\}$, однолистна на $D$, имеет на этом множестве производную $w' = \frac{-1}{z^2} \neq 0$. Следовательно отображение, осуществляемое функцией $w = \frac{1}{z}$ конформное первого рода во всех точках плоскости C за исключением $z = 0$.

Запишем $z$ в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

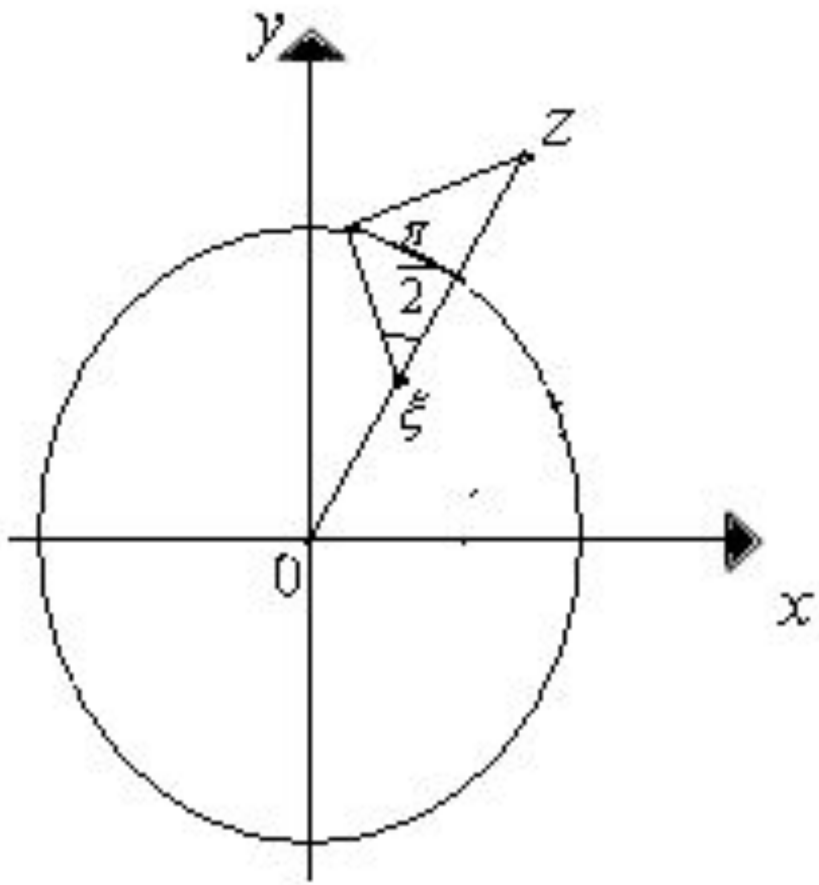
Тогда $w = \dfrac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \dfrac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Отсюда следует: $|w| = \dfrac{1}{r}$, $Arg w = -\varphi + 2\pi K$.

Введем вспомогательную функцию $\xi = w = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

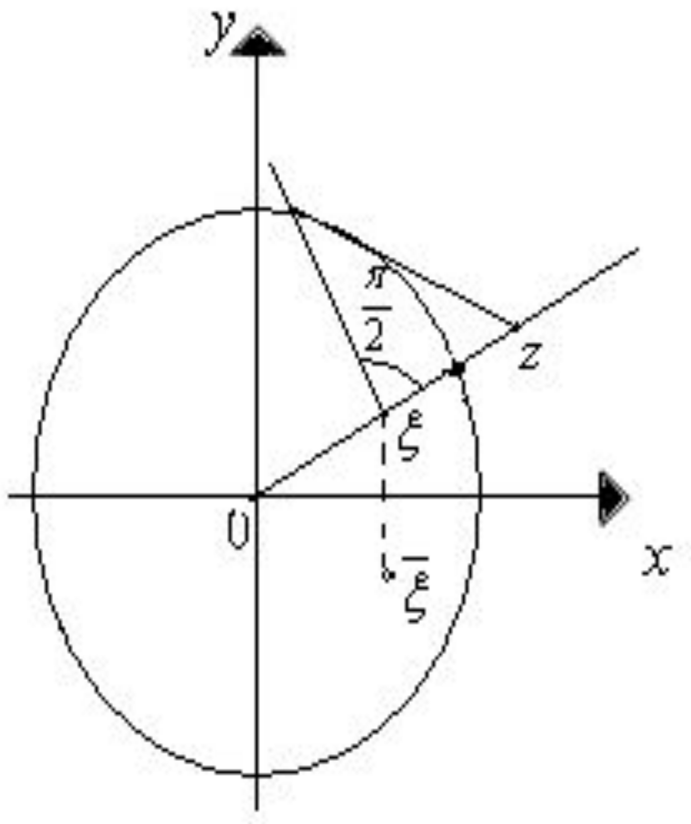
Очевидно $|\xi| = \frac{1}{r}$, $Arg\,\xi = -\varphi + 2\pi K$. Следовательно точки $\xi$ и $z$ находятся на одном луче, выходящем из нулевой точки, что и $z$, а произведение их модулей $\xi * r = 1$.

Значит точки $\xi$ и $z$ взаимно инверсны относительно единичной окружности $|z| = 1$.




Построение инверсных точек в случае $|z|>1$ осуществляется следующим образом: из т. $z$ проводим касательную к единичной окружности и из точки касания опускаем перпендикуляр на луч $0z$. Основание перпендикуляра является точкой инверсной $z$.

Если $z$ находится внутри круга $|z| = 1$, т.е. $|z| < 1$, то построение инверсной т. $\xi$ производится в обратном порядке. Точки единичной окружности при инверсии остаются неподвижными.




После построения т. $\xi$ инверсной т. $z$ относительно единичной окружности $|z| = 1$, построение $w = \bar{\xi}$ состоит в нахождении точки, симметричной точке $\xi$ относительно действительной оси.

Итак, преобразование $w = \dfrac{1}{z}$ есть наложение двух преобразований относительно единичной окружности и отражения относительно действительной оси $\xi = \dfrac{1}{z}$, $w = \bar{\xi}$.

Функция $w = \frac{1}{z}$ не определена в т. $z = 0$ и $z = \infty$. Доопределим эту функцию положив в т. $z = 0$ $w = \infty$, а в т. $z = \infty$ $w = 0$. Теперь эта функция определена на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathrm{C}}$.

Это отображение конформно на $\overline{\mathrm{C}}$, если условиться считать, что угол между кривыми в бесконечно удаленной точке равен углу между образами кривых в начале координат.

Круговое свойство отображения $w = \frac{1}{z}$.

Докажем, что функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует прямую в окружность или в прямую и преобразует окружность в окружность или в прямую. Если считать прямую окружностью бесконечно большого радиуса, то можно сказать, что функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует окружность в окружность. Это свойство называется круговым.

Для доказательства запишем уравнение произвольной окружности в декартовых координатах:

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0 \quad (*)$$

Заметим, что при $A=0$ уравнение изображает прямую, а при $D=0$ - линию, проходящую через т. $z=0$. Из соотношения $w=\frac{1}{z}$ находим $z=\frac{1}{w}$ или $x=iy=\frac{1}{U+Vi}=\frac{U-Vi}{U^2+V^2}$ откуда $x=\frac{U}{U^2+V^2}$ и $y=\frac{-V}{U^2+V^2}$.

Подставляя в уравнение $(*)$ эти значения $x$ и $y$, находим $A+BU-CV+D(U^2+V^2)=0$. Мы получили уравнение окружности в обобщенном виде.

При $D=0$ это уравнение изображает прямую.

Итак, функция $w=\frac{1}{z}$ отображает прямую или окружность, проходящие через т. $z=0$ в прямую, а не проходящие – в окружность.

# 6.3 Дробно-линейная функция

Определение 1. Дробно-линейной называется функция

$$(1)\ w = \frac{az+b}{cz+d},\ \text{где } c \neq 0,\ ad - bc \neq 0.$$

Смысл ограничений состоит в том, что:

1. при $c = 0$, $d \neq 0$ $w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$ - функция линейна,

2. при $ad - bc = 0$ функция сводится к постоянной $w = \frac{a}{c}$ и преобразует всю плоскость в одну точку.

Доопределим функцию $(1)$ в точках $z=-\frac{d}{c}$ и $z=\infty$, положив

$$w\left(-\frac{d}{c}\right)=\lim_{z\to-\frac{d}{c}}\frac{az+b}{cz+d}=\infty \text{ и } w(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}.$$

При этих дополнениях функция определена на всей расширенной плоскости $(z)$.

Функция осуществляет взаимно-однозначное отображение плоскости $(z)$ на плоскость $(w)$.

Каждому $w\left(w \neq \frac{a}{c},\ w \neq \infty\right)$ соответствует значение $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$,

а при $w = \frac{a}{c}$ и $w = \infty$ имеем $z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty,\ z(\infty) = -\frac{d}{c}$.

Функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ имеет производную $w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ во всех точках плоскости $(z)$ кроме $z = -\frac{d}{c}$, следовательно она аналитична на всей плоскости $(z)$ кроме $z = -\frac{d}{c}$.

Так как $w'(z) \neq 0$, то отображение, осуществляемое этой функцией комфорно во всей плоскости $(z)$ исключая т. $z = -\frac{d}{c}$.

Покажем, что функция конформна в т. $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$. Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ две кривые образующие угол с вершиной в т. $z = -\frac{d}{c}$. Их образы — кривые $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ проходят через т. $w = \infty$. Как было показано ранее угол между кривыми $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в т. $w = \infty$ принимается равным между их образами $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в нулевой точке при отображении $\xi = \frac{1}{w}$. Очевидно, что $\Gamma_1^{/}$ и $\Gamma_2^{/}$ являются образами кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$ при отображении $\xi = \frac{1}{w} = \frac{cz+d}{az+b}$, а это отображение конформно в т. $z = -\frac{d}{c}$.

Поэтому угол между $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в т. $z=-\frac{d}{c}$ равен углу между $\Gamma_1'$ и $\Gamma_2'$ в нулевой точке и следовательно углу между $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в т. $w=\infty$.

Итак, отображение конформно в т. $z=-\frac{d}{c}$. Конформность дробно линейного отображения в т. $z=\infty$ следует из конформности обратного отображения в т. $w=\frac{a}{c}$.

Записав дробно-линейную функцию в виде $w = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$,

замечаем, что она может быть рассмотрена как наложение преобразований $(3)\ \xi = z + \frac{d}{c}$, $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\xi}$, $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\boldsymbol{\tau}$, т.е.

параллельного переноса в т. $-\frac{d}{c}$, инверсии с полюсом в т. $-\frac{d}{c}$,

отражением относительно прямой, проходящей через т. $-\frac{d}{c}$,

параллельно действительной оси, и, наконец, линейного преобразования.

Укажем два важных свойства дробно-линейного преобразования:

1. Круговое свойство. Каждое из трех преобразований $(3)$ обладает круговым свойством, поэтому дробно-линейное преобразование обладает этим свойством.

Дробно-линейная функция преобразует окружность или прямую, проходящие через точку $z = -\frac{d}{c}$ в прямую, а не проходящие через эту точку – в окружность.

Почему?

Это становится ясным, если заметить, что т. $z = -\frac{d}{c}$ переходит в $w = \infty$ и образ линии, проходящей через т. $z = -\frac{d}{c}$ не может быть ограниченным.

2. Симметрия и ее сохранение.

Определение 2. Точки $z$ и $\xi$, расположенные на радиусе некоторой окружности С и его продолжении так, что $|0z|*|0\xi|=R$, где 0 и $R$ обозначают центр и радиус окружности С, называются сопряженными или симметричными относительно С. Центр окружности С считается сопряженным с бесконечно удаленной точкой.

Теорема. Произвольное дробно-линейное преобразование переводит точки $z$ и $\xi$, симметричные относительно окружности **C**, в т. $w$ и $\omega$, симметричные относительно образа **C** этой окружности.