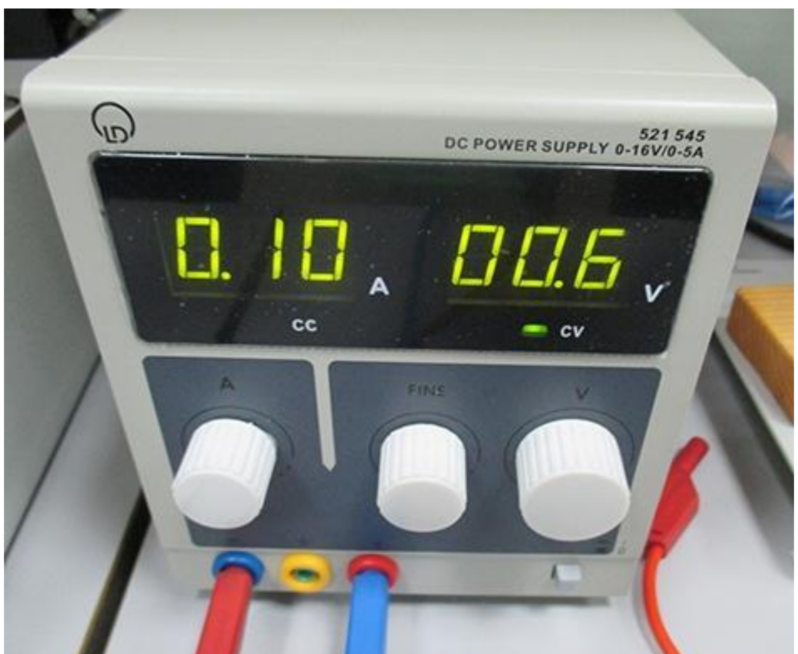
Расчёт погрешностей результатов экспериментов

Измерительные приборы

Измерительные приборы

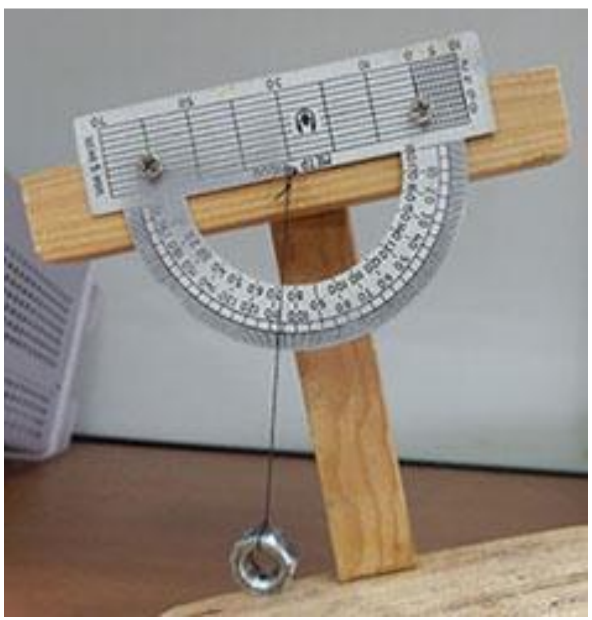


Приборная погрешность

$\Delta A_{\text{пр}}$ – цена наименьшего деления (**ЦНД**)

$\Delta A_{\text{пр}} = 1$ см

$\Delta A_{\text{пр}} = 0{,}05$ мм

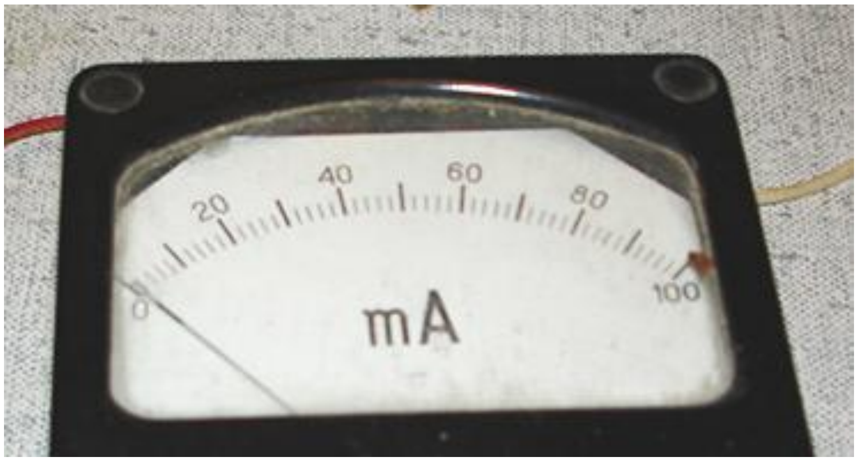


$\Delta A_{\text{пр}} = 1°$

$\Delta A_{\text{пр}} = 1$ мм

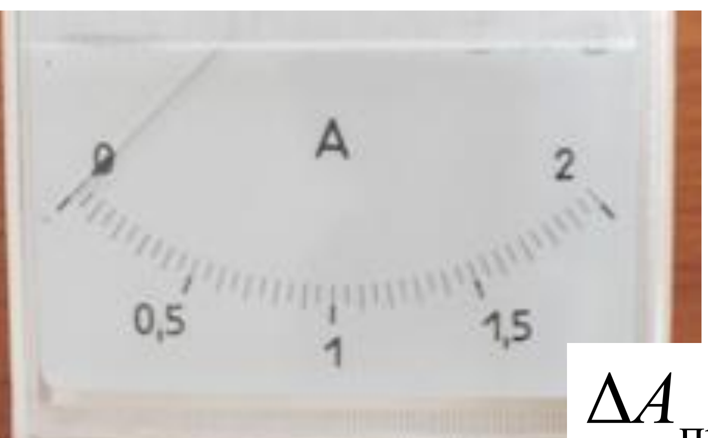
Приборная погрешность

$\Delta A_{\text{пр}}$ – цена наименьшего деления (**ЦНД**) или единица младшего разряда.



$\Delta A_{\text{пр}} = 0{,}1$ г

$\Delta A_{\text{пр}} = 2$ мА



$\Delta A_{\text{пр}} = 0{,}05$ А

$\Delta A_{\text{пр}} = 100$ В

Повторные измерения

Результаты измерений величины $\boldsymbol{A}$ в одинаковых условиях:

$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n$; где n — число измерений

Среднее статистическое:

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

Наилучшее приближение измеряемой величины:

$$A \approx \overline{a} \tag{2}$$

Погрешность результата ?

Среднеквадратичное отклонение (стандартный разброс) среднего значения

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \overline{a})^2}{n(n-1)}} \qquad (3)$$

$$A = \overline{a} \pm S_0 \quad ??? \qquad (4)$$

Коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$

Доверительная вероятность **α**.

Число степеней свободы **ν** = n **– 1**.

	Доверительная вероятность		
ν	**0,9**	**0,95**	**0,99**
2	**2,92**	**4,30**	**9,93**
3	**2,35**	**3,18**	**5,84**
4	**2,13**	**2,78**	**4,60**
5	**2,02**	**2,57**	**4,03**
6	**1,94**	**2,45**	**3,71**
7	**1,90**	**2,37**	**3,50**
8	**1,86**	**2,31**	**3,36**
9	**1,83**	**2,26**	**3,25**

Случайная погрешность

$$\Delta A_{сл} = t_{\alpha,n-1} S_0 \qquad (5)$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta A = \sqrt{\left(\Delta A_{сл}\right)^2 + \left(\Delta A_{пр}\right)^2} \qquad (6)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{\overline{a}} \qquad (7)$$

Косвенные измерения

$$Z = f(A, B, C, ...) \qquad (8)$$

$A, B, C, ...$ - непосредственно измеряемые величины.

Пример 1: Измерение жесткости пружины

Непосредственно измеряется:

1) удлинение пружины ΔL

2) масса подвешенного груза m

Жесткость: $k = mg / \Delta L$

Погрешностями величин ΔL и m являются приборные погрешности.

Косвенные измерения

Пример 2: Измерение ускорения свободного падения

Непосредственно измеряется:

1) высота, с которой падает тело h

2) время падения тела t

Ускорение свободного падения: $g = 2h / t^2$

Время падения t измеряется несколько раз, вычисляется среднее и среднеквадратичное отклонение, абсолютная случайная погрешность Δt.

Косвенные измерения

$$Z = f(A, B, C, ...) \tag{8}$$

Наилучшее приближенное значение

$$\overline{Z} = f\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, ...\right) \tag{9}$$

где средние значения вычисляются по формуле (1):

$$\overline{A} = \frac{1}{n_A}\sum_{i}^{n_A} a_i \qquad \overline{B} = \frac{1}{n_B}\sum_{i}^{n_B} b_i \qquad \overline{C} = \frac{1}{n_C}\sum_{i}^{n_C} c_i$$

Погрешности косвенных измерений

Абсолютная погрешность

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2_{\substack{A=\overline{A},\\ B=\overline{B},\\ C=\overline{C},...}} (\Delta A)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2_{\substack{A=\overline{A},\\ B=\overline{B},\\ C=\overline{C},...}} (\Delta B)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2_{\substack{A=\overline{A},\\ B=\overline{B},\\ C=\overline{C},...}} (\Delta C)^2 + ...} \qquad (10)$$

$\Delta A, \Delta B, \Delta C, \ldots$ - абсолютные погрешности величин
$A, B, C, \ldots$ соответственно,
$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, ...$ средние значения этих величин

Относительная погрешность $$\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{\overline{Z}} \qquad (11)$$

Частный случай 1.

Величина Z является суммой или разностью непосредственно измеряемых величин A и B

$$Z = A + B \quad \text{или} \quad Z = A - B$$

Абсолютная погрешность:

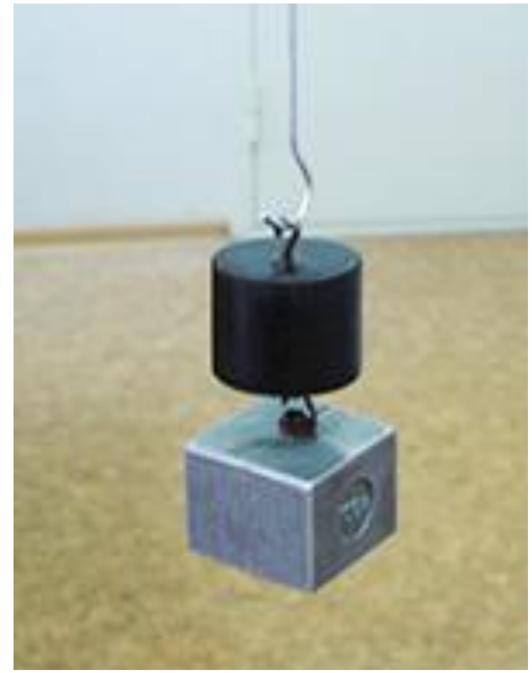
$$\Delta Z = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} \tag{12}$$

Относительные погрешности

$$\varepsilon_Z = \frac{\sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}}{\overline{A} + \overline{B}} \qquad \varepsilon_Z = \frac{\sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}}{\overline{A} - \overline{B}}$$

Пример 3: Измерение суммарной массы двух грузов

$m = m_1 + m_2$



Непосредственно измеряются массы:

m_1 и m_2

Абсолютная погрешность суммарной массы :

$$\Delta m = \sqrt{(\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2}$$

Δm_1 и Δm_2 - абсолютные погрешности масс m_1 и m_2

Частный случай 2.

Величина Z является произведением или отношением непосредственно измеряемых величин A и B

$$Z = A \cdot B \quad \text{или} \quad Z = A/B$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_Z = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2} \tag{13}$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta Z = \varepsilon_Z \overline{Z} \tag{14}$$

$$\overline{Z} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad\qquad \overline{Z} = \overline{A} \,/\, \overline{B}$$

Пример 1: Измерение жесткости пружины

Жесткость: $k = mg / \Delta L$

Относительная погрешность жесткости

$$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_\Delta^2}$$

ε_m, ε_g, ε_Δ - относительные погрешности массы m, ускорения свободного падения g, удлинения пружины ΔL. За погрешность Δg берём погрешность округления.

Абсолютная погрешность: $\Delta k = k \cdot \varepsilon_k$

Частный случай 3.

Величина Z является степенью измеряемой величины A

$$Z = A^P$$

Относительная погрешность

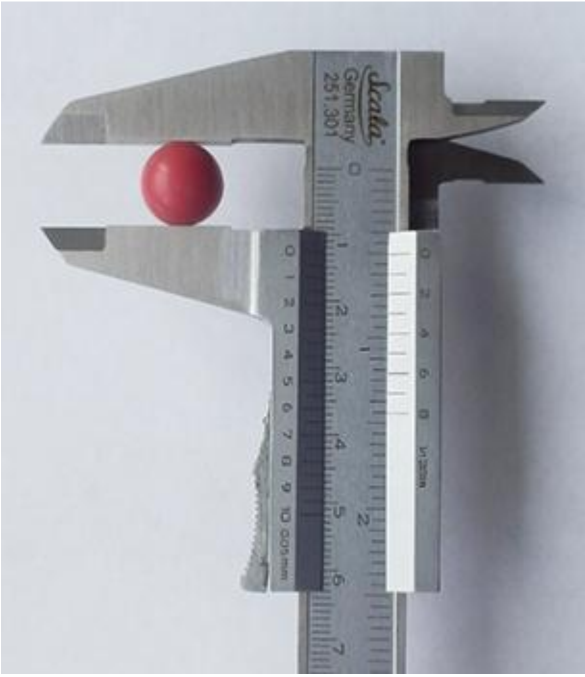
$$\varepsilon_Z = P\varepsilon_A \qquad (15)$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta Z = \varepsilon_Z \overline{Z}$$

$$\overline{Z} = \overline{A}^P$$

Пример 4: Измерение объёма шара



Непосредственно измеряется диаметр шара d

Объём шара: $$V = \frac{\pi}{6} d^3$$

Число π можно задать с требуемой точностью

Относительная погрешность объёма: $\varepsilon_V = 3\varepsilon_d$

ε_d - относительная погрешность диаметра $\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{\overline{d}}$

где Δd - абсолютная погрешность диаметра

Абсолютная погрешность объёма: $\Delta V = \overline{V} \cdot \varepsilon_V$

Значащие цифры числа

Все **верные** цифры, начиная с первой ненулевой слева.

25 ; 0,0187 ; 41,300 ; 0,000460

Погрешность числа ***не превышает*** единицы последнего (младшего) разряда среди **значащих** цифр.

1 ; 0,0001 ; 0,01 ; 0,000001

Значащие цифры размерных величин

Количество значащих цифр ***не зависит*** от единицы измерения.

25 мм = 0,025 м = 25000 мкм = 0,25 см

Значащие цифры отмечены красным цветом.

Значащие цифры при действиях с числами

Сложение

$$1{,}36 + 0{,}354 = 1{,}714 \approx 1{,}71$$

Умножение

$$2{,}8 \times 12{,}3 = 34{,}44 \approx 34$$

Количество верных значащих цифр в результате не может быть больше, чем **максимальное** количество значащих цифр в исходных данных.

Количество верных значащих цифр в результате может стать равным **минимальному** числу значащих цифр в исходных данных.

После вычисления на калькуляторе или на компьютере результат требуется ***округлить*** до допустимого количество значащих цифр.

Линейная аппроксимация

Функция вида $y = k\,x$, где k – постоянный коэффициент.

Пример: Закон Ома для участка цепи.

$$I = U/R$$

Необходимо найти коэффициент k.

В эксперименте измеряется N пар числовых значений:

$$x_k, y_k; \; k = 1, \dots N.$$

x_1	x_2	...	...	x_N
y_1	y_2	...	...	y_N

Наилучшее приближение коэффициента:

$$k \approx \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}$$

Абсолютная погрешность коэффициента:

$$\Delta k = t_{\alpha, N-1} \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} (y_k - kx_k)^2}{(N-1)\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2}}$$