ТЕМА 5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

1. Основные понятия алгебры логики
2. Элементарные булевы функции
3. Полнота системы булевых функций
4. Законы и тождества алгебры логики
5. Представление булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами
6. Синтез комбинационных схем

1 Основные понятия алгебры логики

Математический аппарат, базирующийся на алгебре логики, широко используется для описания функционирования, анализа и синтеза цифровых схем.

Основным понятием алгебры логики является высказывание.

Высказыванием называется всякое суждение (утверждение), которое либо истинно, либо ложно. Одновременно истинным и ложным высказывание быть не может.

Истинность высказывания обозначается единицей, а ложность – нулем.

Простое высказывание не зависит от значений других высказываний.

Значение истинности ***сложного высказывания*** зависит от истинности других высказываний, составляющих его.

Любое сложное высказывание можно считать *логической функцией* от простых высказываний (аргументов).

Логическая функция, как и ее аргументы, принимает только два значения: *единица или нуль*.

Множество символов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, каждый из которых принимает значения единица или нуль, называется **множеством переменных или аргументов**.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве всевозможных наборов аргументов из X и принимающая значения единица или нуль, называется **функцией алгебры логики или булевой функцией**.

Областью определения булевой функции служит совокупность всевозможных n-мерных наборов из единиц и нулей.

Три способа задания булевых функций:

1. *Формула,* указывающая в явном виде последовательность операций, производимых над переменными:

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. *Таблица истинности,* в левой части которой перечисляются все возможные комбинации значений аргументов x_1, x_2,..., x_n, а в правой – значения функции. При n переменных число строк таблицы равно 2^n.
3. *Логическая схема* или условное графическое изображение логической функции.

Число различных функций алгебры логики, зависящих от n аргументов, конечно и равно 2^{2^n}.

Количество входных переменных	1	2	3	…	n
Число входных наборов	2^1	2^2	2^3	…	2^n
Число логических функций	2^2	2^4	2^8	…	2^{2^n}

Значения функции могут быть заданы не на всех возможных наборах аргументов. Функции, значения которых на некоторых наборах не определены, называются ***не полностью определенными***.

Функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ ***существенно зависит*** от аргумента x_i, если имеет место соотношение

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,\ x_{i+1},\ldots,x_n)\neq f(x_1,\ldots,x_{i-1},\ 1,\ x_{i+1},\ldots,x_n).$$

В противном случае функция зависит от x_i несущественно и x_i является ее ***фиктивным аргументом***.

Функция не изменится, если к ее аргументам дописать любое число фиктивных аргументов или зачеркнуть те аргументы, которые для данной функции являются фиктивными.

2 Элементарные булевы функции

Элементарные булевы функции образуются путем использования однородных связей между двоичными переменными.

Элементарных функций, которые часто употребляются в алгебре логике и ее приложениях:

- Две функции, которые не зависят ни от одного аргумента (n=0). Это $\boldsymbol{f_1}$ = 0 – ***константа нуль*** и $\boldsymbol{f_2}$ = 1 – ***константа единица***.

- При n = 1 имеем две функции, существенно зависящие от одного аргумента x.

$\boldsymbol{f_3} = x$ - ***функцией прямой передачи сигнала***,

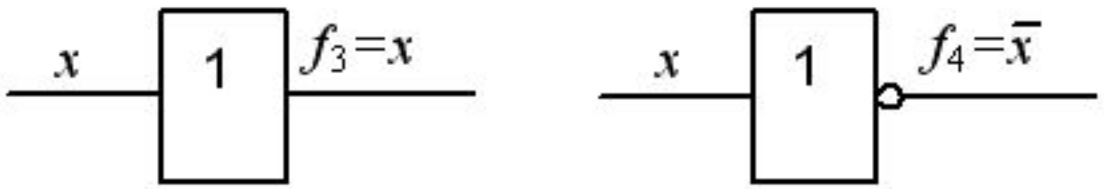
$f_4 = \bar{x}$ - ***функцией отрицания или инверсии***

x	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1
1	1	0

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются **логическими элементами.**

Их входы соответствуют булевым переменным, а выход – реализуемой функции. Для обозначения логических элементов используют упрощенные изображения в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующей функции.

Элемент НЕ (инвертор)



а

б

Существует 16 функций, существенно зависящих от двух аргументов x_1 и x_2.

Переменные	x_1	1	1	0	0
	x_2	1	0	1	0
Функции					
f_0		0	0	0	0
f_1		1	0	0	0
f_2		0	1	0	0
f_3		1	1	0	0
f_4		0	0	1	0
f_5		1	0	1	0
f_6		0	1	1	0
f_7		1	1	1	0
f_8		0	0	0	1
f_9		1	0	0	1
f_{10}		0	1	0	1
f_{11}		1	1	0	1
f_{12}		0	0	1	1
f_{13}		1	0	1	1
f_{14}		0	1	1	1
f_{15}		1	1	1	1

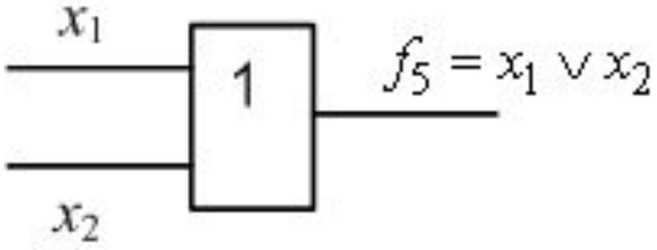
Функция в аналити-ческом выражении	Наименование	Словестное выражение	Выражение в элементарном базисе
$f_0=0$	Константа "0"	Всегда ложно	$x_1x_1 \vee x_2x_2$
$f_1=x_1x_2$ $f_1=x_1\&x_2$	Коньюнкция, И	x_1 и x_2	$x_1\&x_2$
$f_2=x_1\leftarrow x_2$	Запрет x_1	Запрет по x_2	x_1x_2
$f_3=x_1$	Повторение x_1	Повторение x_1	x_1
$f_4=x_2\leftarrow x_1$	Запрет x_2	Запрет по x_1	x_1x_2
$f_5=x_2$	Повторение x_2	Повторение x_2	x_2
$f_6=x_1\oplus x_2$	Сложение по модулю 2, неравнозначность, исключающее ИЛИ	x_1 неравнозначно x_2	$x_1x_2 \vee x_1x_2$
$f_7=x_1 \vee x_2$ $f_7=x_1+x_2$	Дизъюнкция, ИЛИ	x_1 или x_2	$x_1 \vee x_2$
$f_8=x_1\downarrow x_2$	Стрелка Пирса[1], ИЛИ-НЕ	не x_1 и не x_2	x1 v x2
$f_9=x_1\equiv x_2$	Равнозначность, эквивалентность	x_1 равнозначно x_2	$x_1x_2 \vee x_1x_2$
$f_{10}=x_2$	Инверсия, отрицание x_2	Не x_2	x_2
$f_{11}=x_2\rightarrow x_1$	Импликация x_1	Если x_2, то x_1	$x_1 \vee x_2$
$f_{12}=x_1$	Инверсия, отрицание x_1	Не x_1	x_1
$f_{13}=x_1\rightarrow x_2$	Импликация x_2	Если x_1, то x_2	$x_1 \vee x_2$
$f_{14}=x_1 \mid x_2$	Штрих Шеффера[2], И-НЕ	Не x_1 или не x_2	x1 x2
$f_{15}=1$	Константа "1"	Всегда истинно	$(x_1 \vee x_1)(x_2 \vee x_2)$

К элементарным функциям обычно относят: функцию инверсии (отрицания), конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, штрих Шеффера и стрелку Пирса.

Функция $f_5(x_1, x_2) = x_1 \cup x_2$ называется ***дизъюнкцией***, или логическим ***сложением*** . Читается «x_1 или x_2».

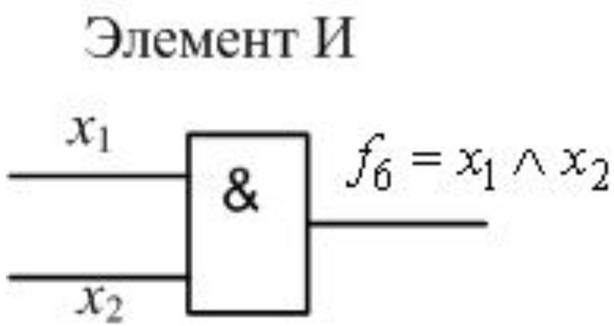
x_1	x_2	f_5
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Элемент ИЛИ



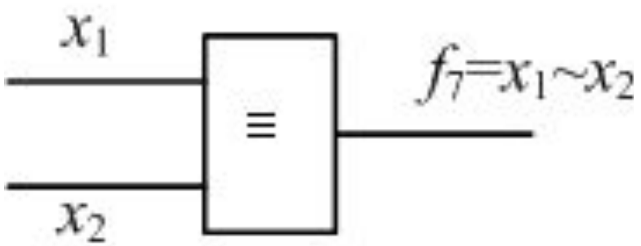
Функция $f_6(x_1, x_2) = x_1 \cap x_2$ называется ***конъюнкцией***, или ***логическим умножением*** . Читается «x_1 и x_2».

x_1	x_2	f_6
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



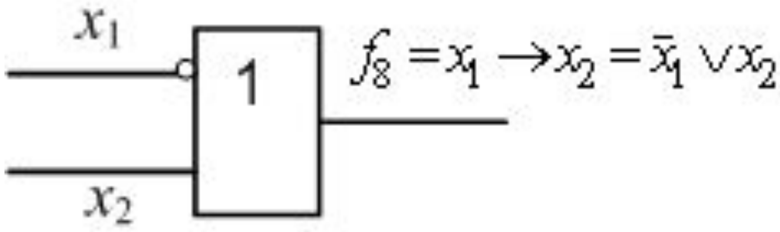
Функция $f_7(x_1, x_2) = x_1{\sim}x_2$ называется ***функцией эквивалентности***, или ***функцией равнозначности***. Читается «x_1 эквивалентно x_2».

x_1	x_2	f_7
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



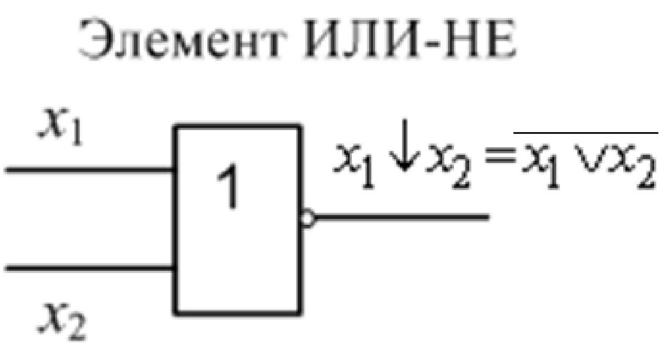
Функция $f_8(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ называется ***функцией импликации.*** Читается «если x_1, то x_2».

x_1	x_2	f_8
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



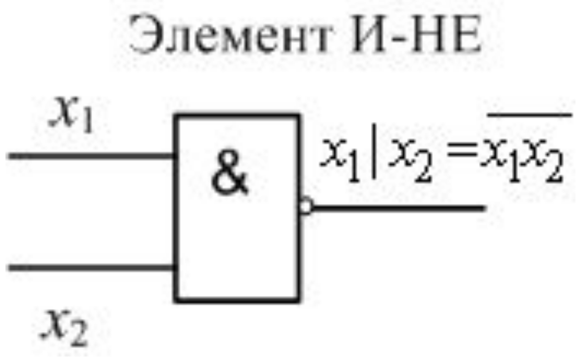
Функция $f_9(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ называется ***функцией Вебба, или стрелкой Пирса***. Читается «ни x_1 ни x_2».

x_1	x_2	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



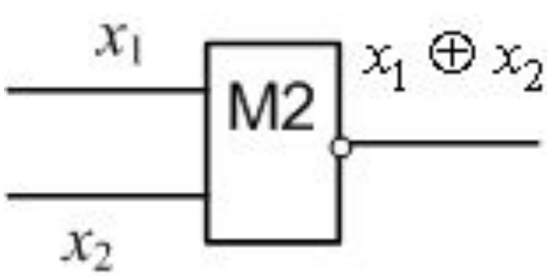
Функция $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ называется ***функцией Шеффера***. Читается «неверно, что x_1 и x_2 ».

x_1	x_2	f_{10}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Функция $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ называется ***функцией сложения по модулю 2***. Читается «x_1 неравнозначно x_2».

x_1	x_2	f_{11}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



3 Полнота системы булевых функций

Одно из основных понятий алгебры логики - понятие функциональной ***полноты системы булевых функций***.

Система булевых функций называется *функционально полной*, если она позволяет представить любую булеву функцию.

Логические элементы, соответствующие функционально полным наборам булевых функций, образуют так называемый ***базис*** и позволяют построить любую сколь угодно сложную логическую схему.

Функции от двух переменных могут быть представлены с помощью трех функций: отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

$$f_8 = x_1 \to x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) = \overline{x_1 \bar{x}_2};$$

$$f_9 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2;$$

$$f_{10} = x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1 x_2};$$

$$f_{11} = x_1 \oplus x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Наиболее распространенными являются базисы И-ИЛИ-НЕ, ИЛИ-НЕ, И-НЕ.

4 Законы и тождества алгебры логики

Законы алгебры логики устанавливают эквивалентность логических формул, образованных с помощью полного набора логических операций И, ИЛИ, НЕ.

1) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \quad , \; x_1 x_2 = x_2 x_1$$

2) Ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \quad , \; x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3$$

3) Идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$$x \vee x = x$$

$$x + x = x, , \quad xx = x$$

4) Дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3, \quad x_1 \vee (x_2x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

5) де Моргана

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2, \qquad \overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2;$$

6) Двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x;$$

7) Склеивания

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1, \qquad x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1;$$

8) Поглощения

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1, \quad x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$$

9) Действия с константами 0 и 1

$$x \vee 0 = x, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot \bar{x} = 0, \quad x \vee \bar{x} = 1$$

Правило 1. Если логическая сумма двоичных переменных содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно есть некоторая переменная, а другое – ее отрицание, то она является тождественно истинной:

$$x_1 \vee \bar{x}_5 \vee x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \equiv 1.$$

Правило 2. Если логическое произведение двоичных переменных содержит хотя бы одну пару сомножителей, из которых один есть некоторая переменная, а другой – ее отрицание, то оно является тождественно ложным

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4x_3x_2 \equiv 0.$$

Следует отметить, что законы де Моргана справедливы для любого числа переменных:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n;$$

$$\overline{x_1x_2\ldots x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n.$$

5 Представление булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами

Любая логическая функция может выражаться различными логическими формулами, являющимися эквивалентными. Наиболее удобными для практического использования являются нормальные формы представления сложных логических функций.

***Элементарной конъюнкцией* Q** называется логическое произведение любого конечного числа переменных и их отрицаний, причем каждая переменная встречается только один раз. Число переменных, составляющих элементарную конъюнкцию, называется ее **рангом.**

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций:

$$N = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k .$$

Любая булева функция может быть представлена в ДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \cup \bar{x}_1 x_3 \cup \bar{x}_2 .$$

Элементарной дизъюнкцией D называется логическая сумма конечного числа переменных и их отрицаний, причем каждая переменная встречается в сумме один раз. Число переменных, составляющих элементарную дизъюнкцию, называется ее **рангом**.

$$D = x_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3 \cup x_4$$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций:

$$K = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n. \longrightarrow \boxed{K = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_n.}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_3) \cap (\bar{x}_1 \cup x_3) \cap (x_2 \cup \bar{x}_3).$$

$$\downarrow$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Одна и та же логическая функция путем эквивалентных преобразований может быть представлена различными ДНФ или КНФ.

Единственность представления обеспечивают совершенные нормальные формы.

Совершенной ДНФ (СДНФ) логической функции $f(x_1, x_2, x_n)$ от n различных переменных называется ДНФ, которая содержит только конъюнкции ранга n и не содержит одинаковых конъюнкций.

Произвольная логическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приводится к СДНФ в следующей последовательности:

1) Функция f приводится к какой-либо ДНФ;

2) Конъюнкции, не содержащие всех двоичных переменных, дополняются до конъюнкций n-го ранга;

3) Из полученной ДНФ с конъюнкциями n-го ранга удаляются повторяющие друг друга конъюнкции.

Пример 1. Привести функцию к СДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

Решение: Дополним конъюнкции второго ранга до конъюнкций третьего ранга, используя закон склеивания:

$$\bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Просуммируем конъюнкции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Если логическая функция задана таблицей истинности, то построение СДНФ осуществляется по следующему алгоритму:

1) Выбираются наборы аргументов, на которых функция обращается в единицу;

2) Выписываются конъюнкции, соответствующие этим наборам, причем если аргумент x_i входит в набор как единица, то в конъюнкцию он вписывается без изменения. Если же аргумент x_i входит в данный набор как нуль, то в соответствующую конъюнкцию вписывается его отрицание;

3) Все выписанные конъюнкции соединяют знаком дизъюнкции.

Элементарные конъюнкции СДНФ называют ***конституентами единицы***.

Пример. Построить СДНФ для функции, заданной таблицей истинности (таблично).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Совершенной КНФ (СКНФ) логической функции f от n различных переменных называется КНФ, которая содержит только дизъюнкции ранга n и не содержит одинаковых дизъюнкций.

Построение СКНФ по таблично заданной функции:

1) Выбираются наборы аргументов, на которых функция обращается в нуль;

2) Выписываются дизъюнкции, соответствующие этим наборам, причем если аргумент x_i входит в набор как нуль, то в дизъюнкцию он вписывается без изменения. Если же аргумент x_i входит в данный набор как единица, то в соответствующую дизъюнкцию вписывается его отрицание;

3) Все выписанные дизъюнкции соединяют знаком конъюнкции.

Элементарные дизъюнкции СКНФ называют ***конституентами*** нуля.

Пример. Построить СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблично.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

6 Синтез комбинационных схем

Под комбинационной схемой понимается техническое устройство, предназначенное для преобразования дискретной информации, причем значения выходных сигналов однозначно определяются значениями входных сигналов в данный момент времени.

Предполагается, что в комбинационных схемах не происходит задержки сигнала, а входные и выходные сигналы могут принимать только значения единица и нуль (это могут быть высокий и низкий уровни напряжения).

Синтезировать комбинационную схему – это означает на основе заданного алгоритма работы построить структурную схему минимальной сложности из логических элементов заданного базиса.

Синтез комбинационных схем осуществляется в три этапа:

1) Запись условий функционирования устройства (эти условия могут быть заданы словесно, с помощью таблицы истинности, либо с помощью логической функции);

2) Минимизация логической функции и приведение ее к заданному базису;

3) Составление структурной схемы устройства.

Пример. Синтезировать комбинационную схему, реализующую булеву функцию в базисе И-ИЛИ-НЕ.

Рассмотреть переход к базисам И-НЕ и ИЛИ-НЕ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 / x_2) \oplus (\bar{x}_3 \to x_1)$$

Представим функцию в ДНФ. Для этого используем формулы

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2}; \qquad x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2; \qquad x_1 \oplus x_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2} \oplus (x_3 \vee x_1) =$$

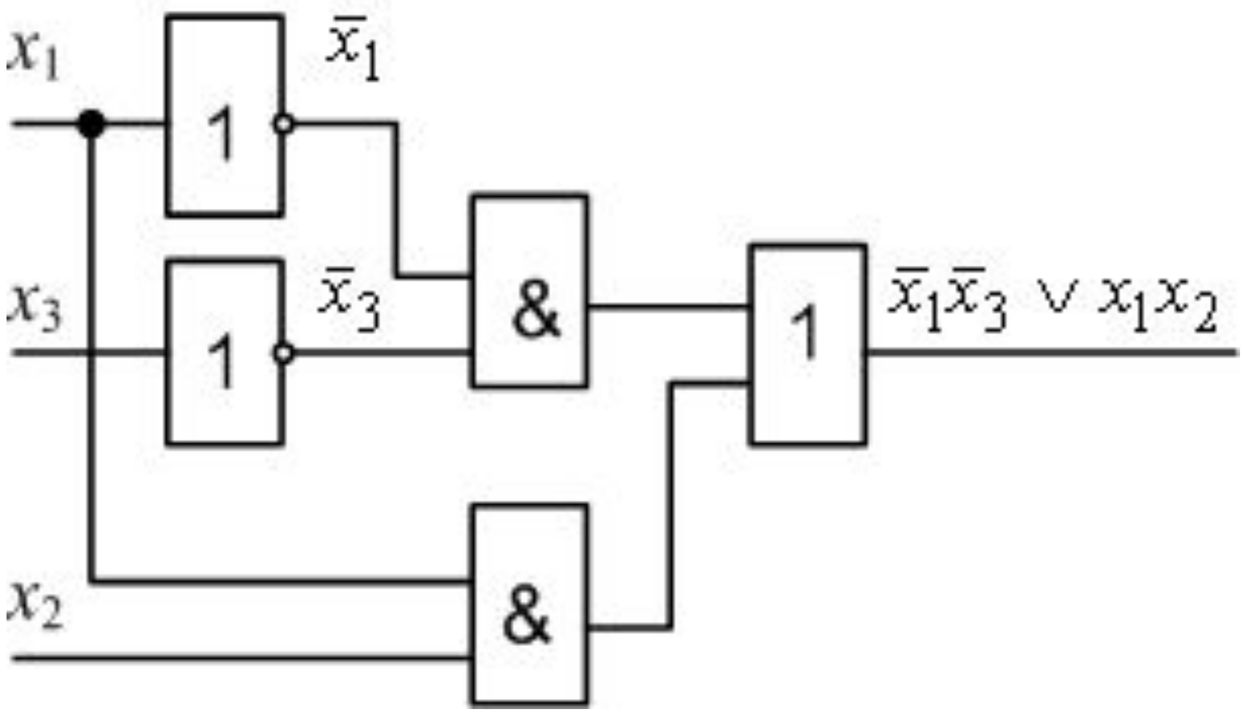
$$= \overline{x_1 x_2}\,\overline{(x_3 \vee x_1)} \vee \overline{\overline{x_1 x_2}}(x_3 \vee x_1) =$$

$$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3\bar{x}_1 \vee x_1 x_2 (x_3 \vee x_1) =$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \overbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3}^{1} \vee x_1 x_2$$

$$= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1 x_2.$$

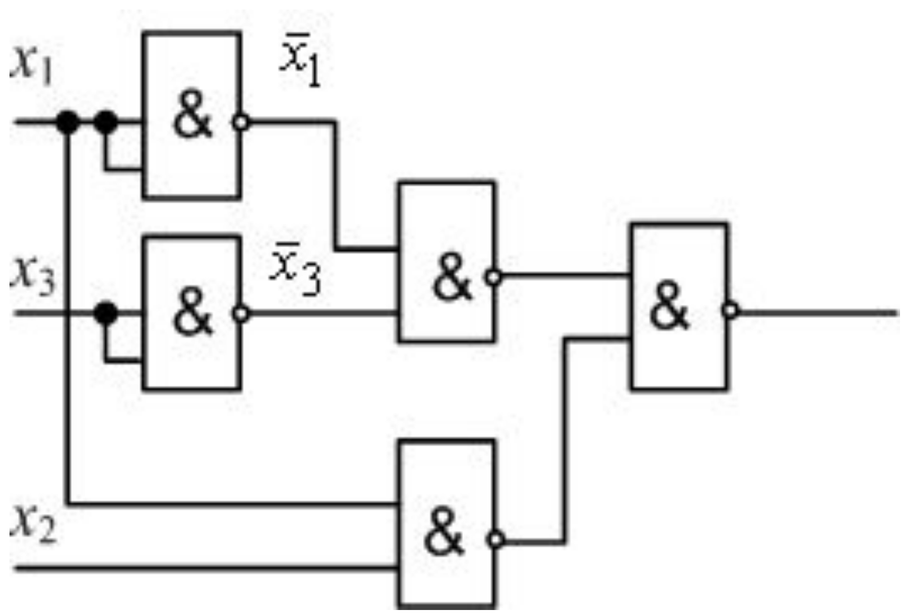
Логическая схема, реализующая эту функцию в базисе И-ИЛИ-НЕ.



Преобразуем $f(x_1, x_2, x_3)$ к базису И-НЕ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2}} = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3} \cdot \overline{x_1x_2}}.$$

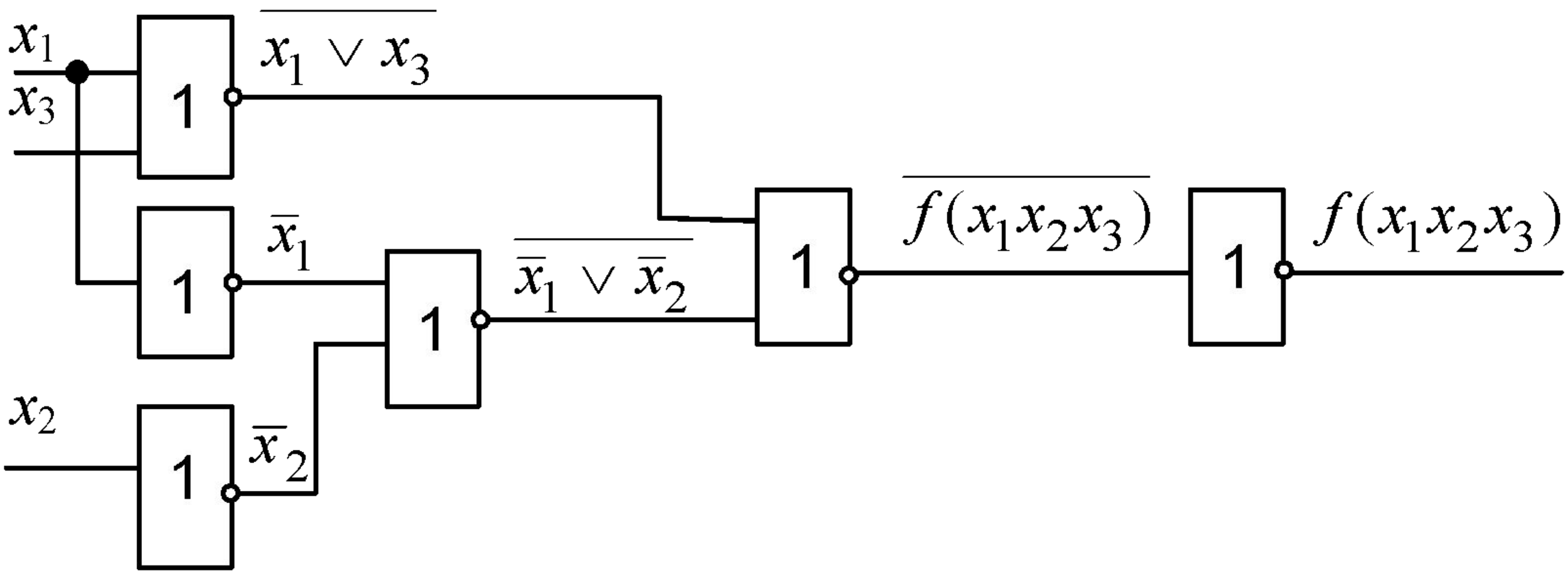
Реализация функции в базисе И-НЕ



Преобразуем $f(x_1, x_2, x_3)$ к базису ИЛИ-НЕ:

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}} \vee \overline{\overline{x_1x_2}} =$$

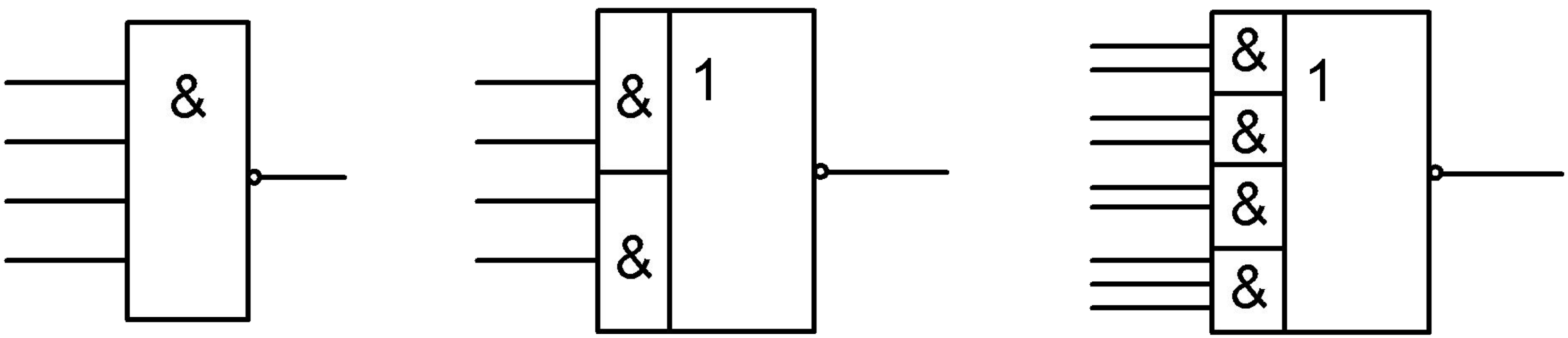
$$= \overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{\overline{\overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}}}.$$



Пример . Построить комбинационную схему для функции, заданной таблично в базисах И-НЕ и ИЛИ-НЕ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

В серийно выпускаемых интегральных микросхемах в одном корпусе могут быть объединены несколько логических схем, например, элемент 4И-НЕ, элемент 2И-ИЛИ-НЕ, элемент 2-2-2-3И-4ИЛИ-НЕ.



а б в

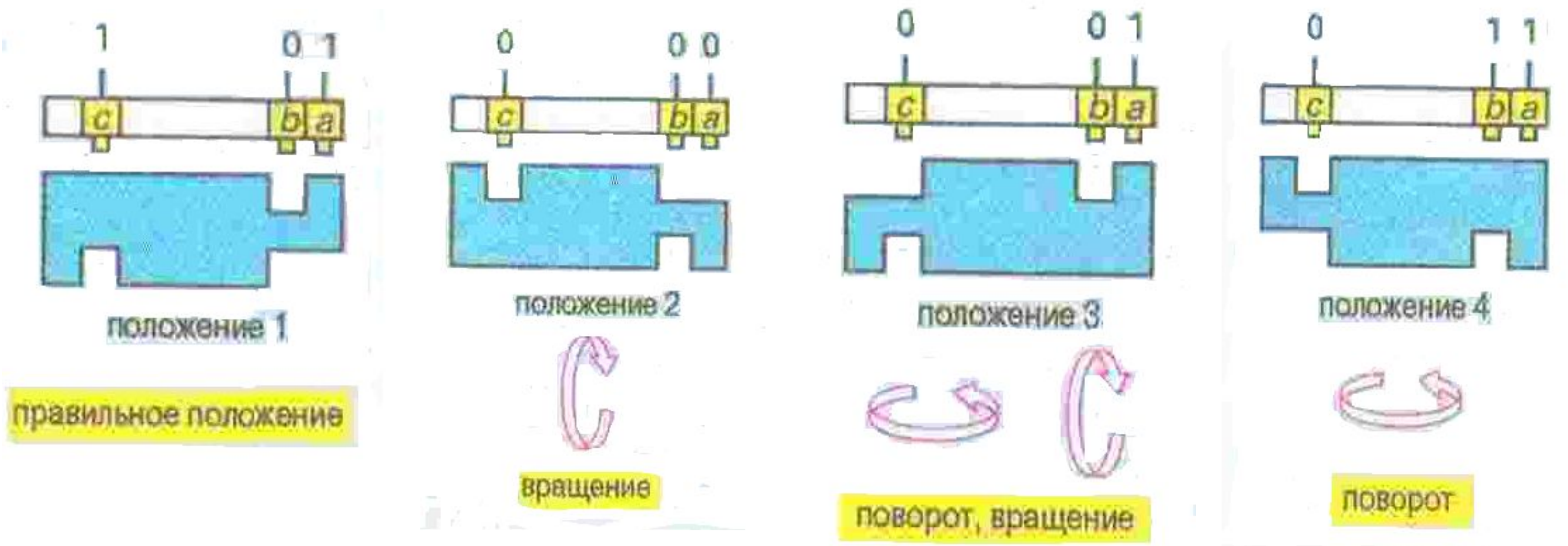
Пример. Требуется разработать схему вращательно-поворотного механизма .

Питатель для отштампованных из металлического листа деталей снабжен поворотным механизмом, включаемым по сигналу w=1, и механизмом вращения, включаемым по сигналу d=1. Возможно и одновременное включение обоих устройств.

Из магазина питателя штампованные детали должны поступать на пресс всегда в положении 1.

Если заготовки подаются в положениях 2, 3, или 4, они будут автоматически поворачиваться до достижения правильного положения 1.

Для этого штампованные детали опрашиваются тремя бесконтактными сигнальными датчиками *a*,*b*, *c*, которые подают сигнал со значениями 0, если они находятся точно напротив места врезания, в противном случае выводится сигнал со значениями 1.



Требуется разработать схему вращательно-поворотного механизма с выходными сигналами w и d и входными сигналами a,b, c.

Дополнительно надо составить схему, способную остановить устройство по сигналу s, когда сигнальными датчиками a,b, c фиксируется заготовка, не относящуюся к указанным четырем положениям.

Составим таблицу функционирования устройства

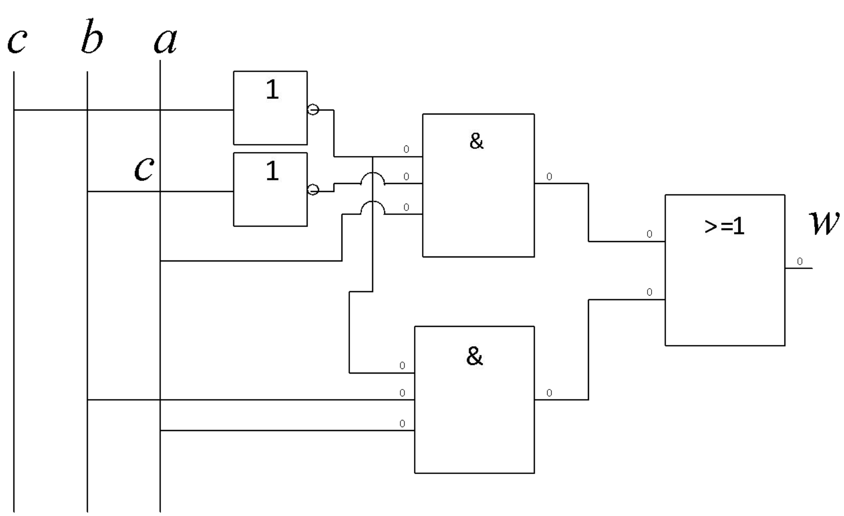
c	*b*	*a*	*w*	*d*	*s*	***Примечание***
0	0	0	0	1	0	Положение 2
0	0	1	1	1	0	Положение 3
0	1	0	0	0	1	Останов
0	1	1	1	0	0	Положение4
1	0	0	0	0	1	Останов
1	0	1	0	0	0	Положение1
1	1	0	0	0	1	Останов
1	1	1	0	0	1	Останов

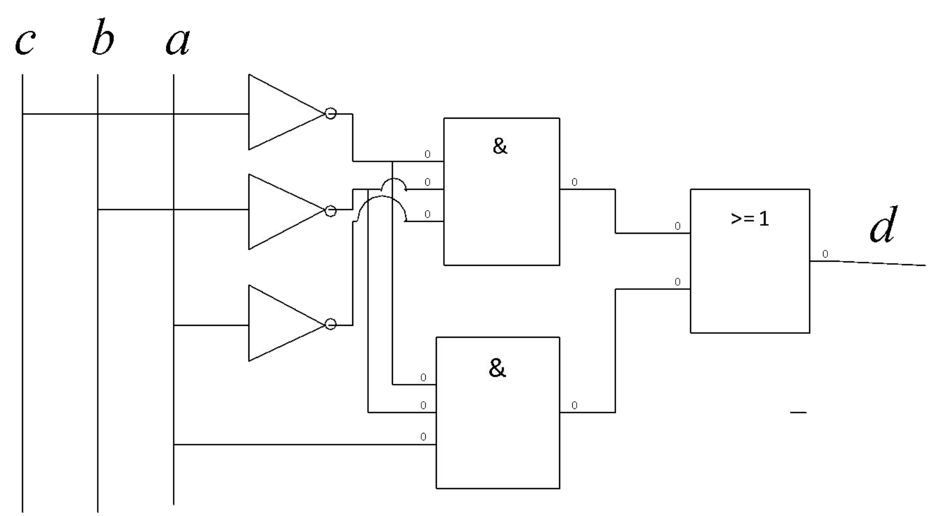
Запишем логические выходные функции для w , d , s в виде СДНФ.

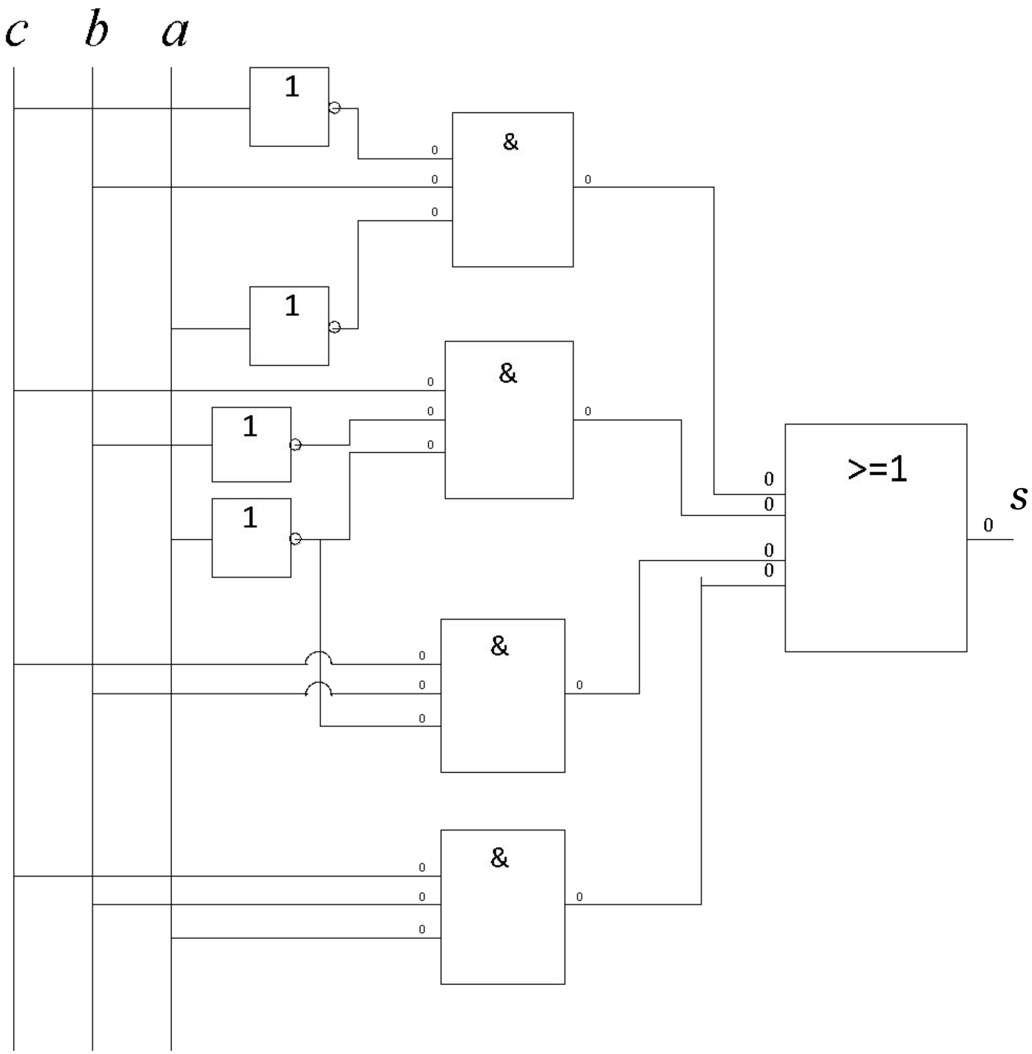
$$w(a,b,c) = \bar{c}\bar{b}a \vee \bar{c}ba$$

$$d(a,b,c) = \bar{c}\bar{b}\bar{a} \vee \bar{c}\bar{b}a$$

$$s(a,b,c) = \bar{c}b\bar{a} \vee c\bar{b}\bar{a} \vee cb\bar{a} \vee cba$$






c
b
a
1
&
1
&
1
1
>=1
s
&
&
0

Пример синтеза преобразователя кода Грея в арифметический двоичный код.

Такой преобразователь может понадобиться для согласования сигналов кодового датчика положения с микропроцессорной системой управления, ведущей обработку числовой информации в двоичном арифметическом коде.

Приведена таблица истинности.

Комбинации соответствуют сигналам, которые должны формироваться на выходе преобразователя кода при подаче на его вход сигналов кода Грея, формируемых датчиком положения.

Позиция	Входные сигналы				Выходные сигналы			
	X1	*X2*	*X3*	*X4*	*Y1*	*Y2*	*Y3*	*Y4*
0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0
3	1	1	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	1	0	1
6	1	0	0	0	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0	1	1	1
8	1	0	1	1	1	0	0	0
9	1	1	1	1	1	0	0	1
10	1	1	1	0	1	0	1	0
11	0	1	1	0	1	0	1	1
12	0	1	1	1	1	1	0	0
13	0	0	1	1	1	1	0	1
14	0	0	1	0	1	1	1	0
15	0	0	0	0	1	1	1	1