Динамика вязкой несжимаемой жидкости

Предисловие

- Рассматривается движение вязкой жидкости, плотность которой остается неизменной.
- В качестве исходных используем уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

Задание

- Вывести уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости – уравнение Стокса.
- Рассмотреть ламинарное изотермическое течение несжимаемой жидкости по горизонтальной трубе постоянного поперечного сечения.

Словарь терминов

- Несжимаемой называют жидкость, плотность которой не меняется.
- Изотермическим называют поток, температура которого остается постоянной.

Для случая трёхмерного пространства градиентом скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$ координат x, y, z называется векторная функция с компонентами

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Или, использовав для единичных векторов по осям прямоугольных декартовых координат $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(здесь **F** - обозначено некое векторное поле с декартовыми компонентами F_x, F_y, F_z):

Это же выражение можно записать с использованием оператора набла $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам. Обозначается символом ∇ (набла)

Для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольной декартовой системе координат оператор набла определяется следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы по осям x, y, z соответственно.

Физический смысл градиента.

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции φ равен $\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Проекция градиента на направление оси x — это коэффициент при единичном векторе $\vec{i}$ вдоль оси x, то есть $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ось x можно направить произвольно, следовательно, проекция градиента $\vec{\nabla}\varphi$ на произвольное направление l равна $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$.

Зададимся вопросом, в каком направлении проекция вектора максимальна? Ответ — в направлении самого вектора.

Тогда направление градиента — это направление, в котором максимальна производная по направлению.

Градиент имеет направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина градиента равна производной от функции по этому направлению.

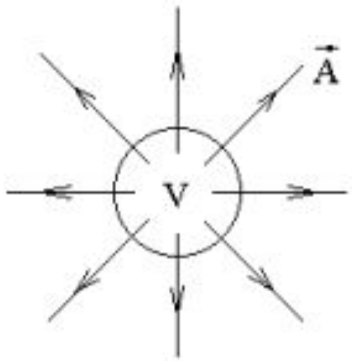
Физический смысл дивергенции.

Рассмотрим малый объем V:

$$\int\limits_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV \approx div\left(\vec{A}\right)\cdot\int\limits_V dV = V\cdot div\left(\vec{A}\right) \quad =>$$

$$div\left(\vec{A}\right)\approx\frac{\int\limits_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV}{V}=\frac{\oint\limits_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)}{V}=\frac{\Phi_A}{V} \quad =>$$

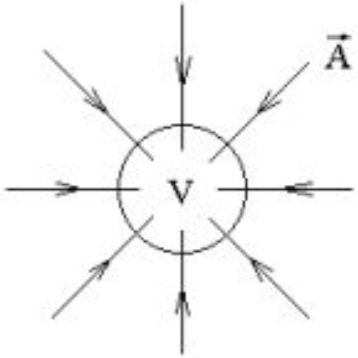
Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



то поток положительный $\Phi_A > 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) > 0$.

,

Если же



то поток отрицательный $\Phi_A < 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) < 0$.

Дивергенция — производная во все стороны.

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

Для вывода уравнения используем:

- уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$div\mathbf{V} = 0$$

- и постоянство вязкости жидкости при изотермическом ее движении

$$\mu = \rho\nu = const$$

Уравнение Навье-Стокса при этих условиях

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{dV}{dt}=\rho F-grad\left(p+\frac{2}{3}\mu divV\right)+Div(2\mu V)\\&\rho=const;\qquad divV=0;\qquad \mu=const\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

упрощается

$$\frac{dV}{dt}=F-\frac{1}{\rho}grad(p)+\nu Div(2V)$$

где $\nu=\mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

$$Div(2V)=\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)i+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)j+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)k=$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]i+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]j+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]k=$$

$$=\nabla^2 ui+\nabla^2 vj+\nabla^2 wk=\nabla^2 V$$

и подставив ее в предыдущее выражение, получим ***уравнение Стокса*** – уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\left(p\right) + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$

Непосредственными наблюдениями и многочисленными опытами установлено существование двух основных режимов движения жидкостей – ***ламинарного*** и ***турбулентного***.

Словарь терминов

- ***Ламинарным*** называют строго упорядоченное, слоистое (без перемешивания) течение жидкости. Единственной причиной потерь энергии при таком движении в горизонтальных трубах постоянного поперечного сечения является трение, обусловленное вязкостью жидкости.

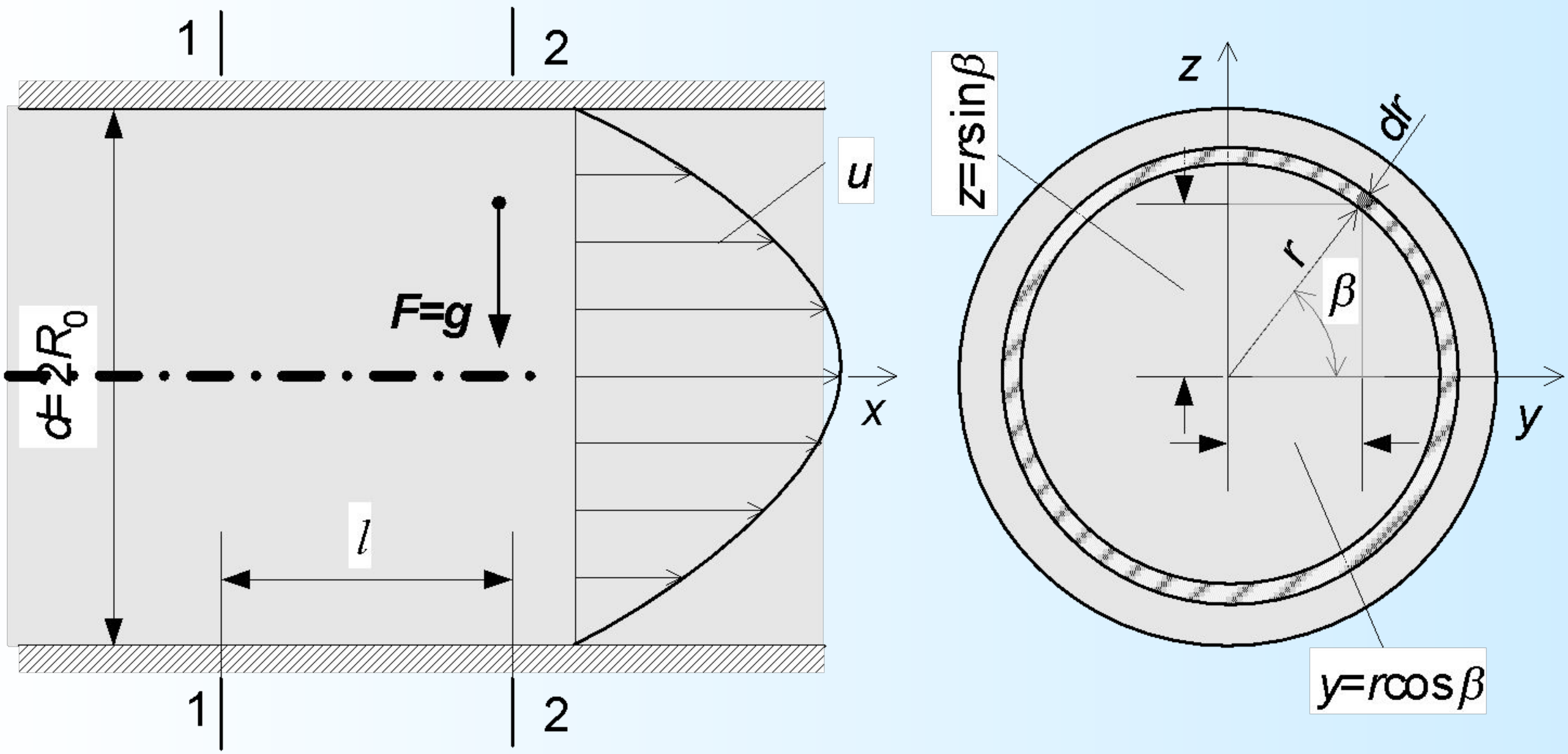
Словарь терминов

- При ***турбулентном*** режиме отдельные частицы жидкости движутся по произвольным сложным траекториям, в результате чего струйки перемешиваются и жидкость течет в виде беспорядочной массы.

Рис. Режимы течения жидкостей
а) – ламинарный режим; б) – переход к турбулентному потоку;
в) и г) – различные формы развитого турбулентного течения

Ламинарное изотермическое течение несжимаемой жидкости в горизонтальной трубе постоянного поперечного сечения

- Предположим, что установившееся ламинарное движение жидкости происходит в горизонтальной, прямолинейной, круглой цилиндрической трубе с внутренним диаметром $d = 2R_0$, что соответствует одномерному течению. На некотором расстоянии от входа в нее, где поток уже сформировался (стабилизировался), выделим отрезок длиной l между сечениями 1-1 и 2-2.


1
2
$d=2R_0$
$F=g$
u
x
l
1
2
z
$z=r\sin\beta$
dr
r
β
y
$y=r\cos\beta$

Пусть в сечении 1-1 давление равно p_1, а в сечении 2-2 – p_2 т.е. на длине l давление в потоке изменилось на величину

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

за счет трения жидкости о стенки канала.

Применим к потоку жидкости уравнение Стокса, которое в рассматриваемом случае одномерного движения в проекции на ось x примет вид

$$\frac{du}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u.$$

Выполним преобразование этого уравнения:

- исключим выражение, стоящее в левой части уравнения, поскольку в установившемся движении скорость не меняется с течением времени, следовательно
$$du/dt = 0$$
- удалим первое слагаемое в правой части уравнения, так как проекция силы тяжести на горизонтальную ось x равна нулю;

- в одномерном движении отсутствуют проекции вектора скорости на оси координат, перпендикулярные направлению движения,

$$v = 0$$ и $$w = 0$$

Поэтому и их производные равны нулю:

$$\partial v/\partial y = 0$$ и $$\partial w/\partial z = 0$$

Следствием этого для несжимаемой жидкости будет

$$div\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Проекция уравнения Стокса на ось x примет следующий вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Изменение давления вдоль трубы пропорционально длине трубы

$$\frac{dp}{dx} = const = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{\Delta p}{l}$$

поэтому получим

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение при условии, что на границе области течения (на стенке трубы) скорость частиц жидкости равна нулю

$$u\big|_{\text{гр}} = 0$$

Граница области течения описывается уравнением окружности

$$y_{\text{гр}}^2 + z_{\text{гр}}^2 = R_0^2$$

Решением дифференциального уравнения является функция

$$u = A\left(R_0^2 - y^2 - z^2\right)$$

Она удовлетворяет граничному условию, а при

$$A = \frac{\Delta p}{4\mu l}$$

превращает дифференциальное уравнение в тождество.

Это становится очевидным после подстановки данной функции в дифференциальное уравнение

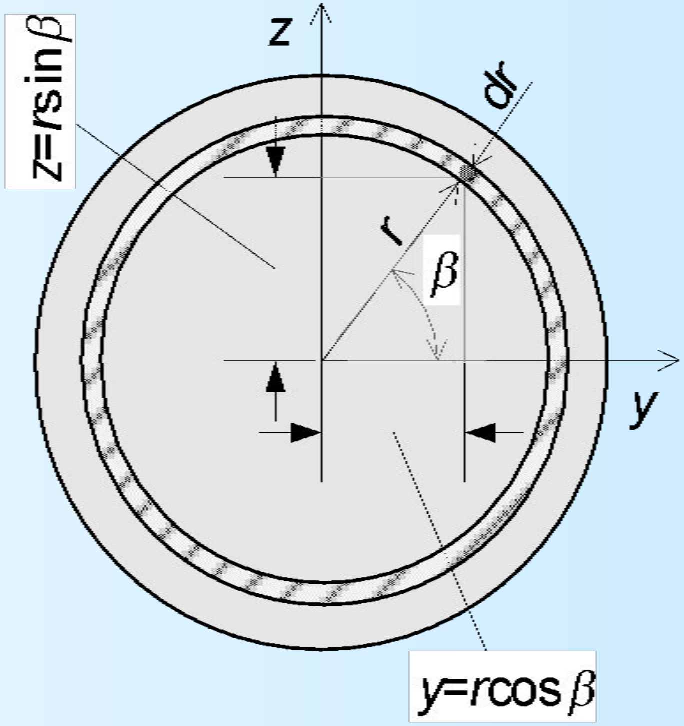
$$\left\{\frac{\partial^2\left[A\left(R_0^2-y^2-z^2\right)\right]}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left[A\left(R_0^2-y^2-z^2\right)\right]}{\partial z^2}\right\}=$$

$$=-2A-2A=-\frac{\Delta p}{\mu l}$$

Перейдем от декартовой системы координат к цилиндрической, в которой

$$y = r\cos(\beta),$$

$$z = r\sin(\beta)$$



Уравнение одномерного движения несжимаемой жидкости в этой системе координат

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R_0^2 - y^2 - z^2\right) =$$

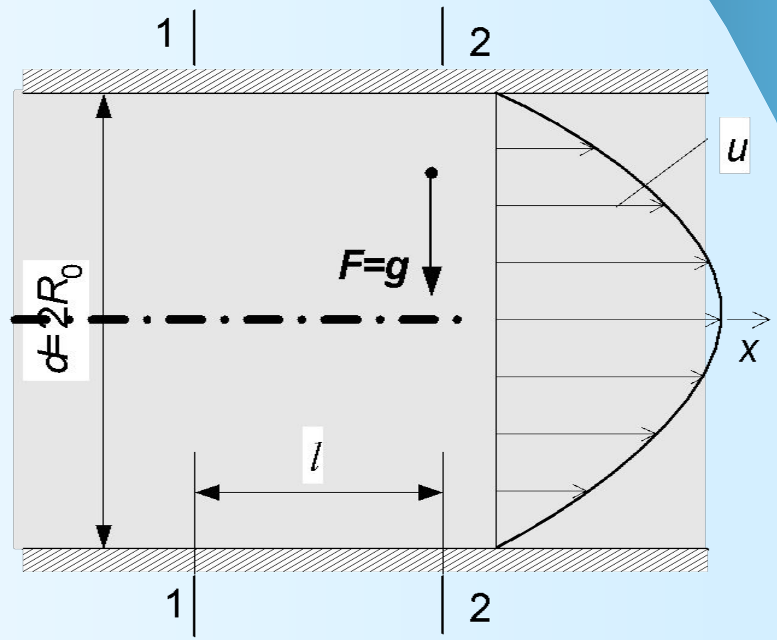
$$= \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R_0^2 - r^2 \cos^2(\beta) - r^2 \sin^2(\beta)\right) =$$

$$= \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R_0^2 - r^2\right) = \frac{\Delta p R_0^2}{4\mu l}\left[1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right]$$

описывается квадратичной зависимостью скорости частицы жидкости от радиуса.

Словарь терминов

- Профилем скорости называют распределение векторов скорости по нормальному сечению потока.
- Ламинарному течению соответствует параболический профиль скорости.



Максимальная скорость имеет место в центре сечения трубопровода (при r=0)

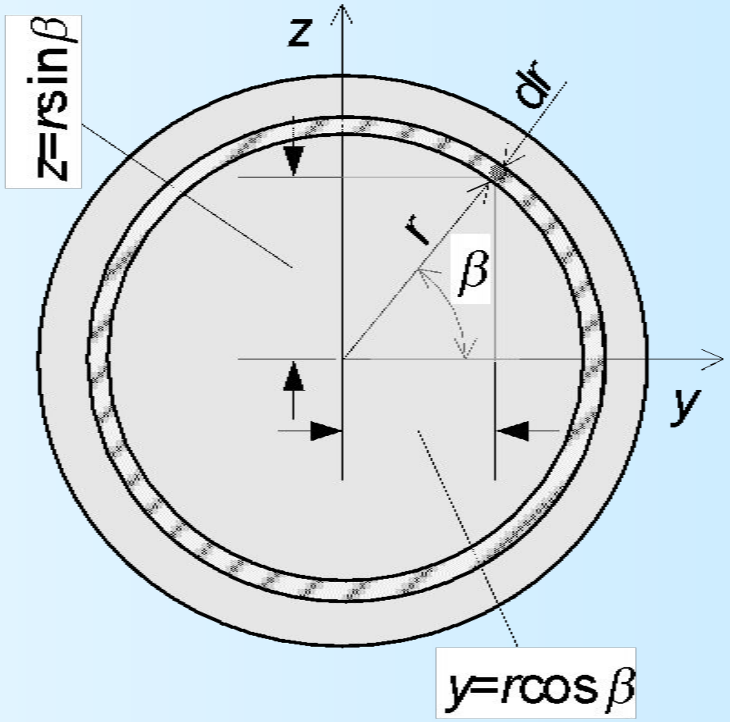
$$u_{\max} = \frac{\Delta p R_0^2}{4\mu l}$$

Применим полученный закон распределения скоростей для расчета объемного расхода жидкости. Элементарный расход через бесконечно малую площадку dS равен

$$dQ = udS$$

Бесконечно малую площадку представим в виде кольца радиусом *r* и толщиной *dr*, т.е.

$$dS = 2\pi r dr$$



Тогда после интегрирования по всей площади поперечного сечения, т.е. от r=0 до $r=R_0$, получим

$$Q = \int_S u dS = \int_0^{R_0} u 2\pi r dr =$$

$$= \frac{2\pi \Delta p}{4\mu l} \int_0^{R_0} \left(R_0^2 - r^2\right) r dr =$$

$$= \frac{\Delta p R_0^4}{8\mu l}$$

Среднюю по сечению скорость находим делением расхода на площадь поперечного сечения канала

$$u_{\text{ср}} = \frac{Q}{\pi R_0^2} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R_0^2$$

Ее значение в два раза меньше найденной ранее максимальной скорости на оси трубы.

Преобразовав полученное выражение, найдем закон сопротивления, т.е. зависимость потери давления на трение от расхода, либо средней скорости жидкости, ее вязкости и геометрических размеров канала

$$\Delta p = \frac{8\mu l Q}{\pi R_0^4} = \frac{8\mu l u_{\text{ср}}}{R_0^2}$$

- Из уравнения следует, что потери давления при ламинарном течении жидкости по прямолинейному каналу цилиндрической формы прямо пропорциональны его длине, расходу и вязкости среды в первой степени и обратно пропорциональны радиусу (диаметру) в четвертой степени. В литературе этот ***закон*** носит имя ***Пуазейля***.

Выразив радиус трубы через диаметр, и выполнив ряд эквивалентных преобразований, данный закон можно представить в виде

$$\Delta p = \frac{8(\nu\rho)lu_{\text{ср}}u_{\text{ср}}}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 u_{\text{ср}}} = \frac{64}{\frac{du_{\text{ср}}}{\nu}}\frac{l}{d}\frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2} =$$

$$= \frac{64}{\text{Re}}\frac{l}{d}\frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}$$

где $\text{Re} = u_{\text{ср}} d / \nu$ – критерий Рейнольдса.

Словарь терминов

- В технических расчетах принято потери давления на трение рассчитывать по ***формуле Дарси-Вейсбаха***

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}$$

где l – коэффициент потерь на трение.

Из сравнения двух последних выражений следует, что при ламинарном режиме течения коэффициент потерь равен

$$\lambda_{л} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Изложенные результаты хорошо подтверждаются опытом

Исключения:

- течение на начальном участке трубы, где еще происходит формирование потока;
- течение с теплообменом;
- течение в капиллярах и зазорах, где имеет место облитерация;
- течение с большими перепадами давлений.