



Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня

Выбрать иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x-1} = 3$$

$$y^2 + 3y\sqrt{2} = 4$$

$$x + \sqrt{x^2 + 9} = 2$$

$$\sqrt{3}y - 4 = 5$$


$$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{6y} = 0$$

$$\sqrt[3]{x-9} = -3$$



Иррациональные уравнения содержат радикалы. Чтобы избавиться от радикалов, необходимо возвести обе части уравнения в одну и ту же степень с натуральным показателем.

если:

- Возводим в нечетную степень, то получаем равносильное уравнение;
- Возводим в четную степень, то можем получить посторонние корни. В этом случае делаем проверку.



Алгоритм решения простейшего иррационального уравнения

1. Возвести обе части уравнения в нужную степень.
2. Решить полученное рациональное уравнение.
3. При необходимости проверить полученные корни подстановкой в исходное уравнение.
4. Выписать ответ.

уравнение

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$$

$$(\sqrt{x^2 - x - 2})^2 = (2)^2$$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -2$$

Проверка

$$\sqrt{3^2 - 3 - 2} = 2$$

$$\sqrt{(-2)^2 + 2 - 2} = 2$$

Ответ: 3; -2



Самостоятельная работа

I

$$\sqrt{x+1} = x-5$$

8

$$\sqrt[3]{x^2-28} = 2$$

±6

II

$$\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$$

решений нет

$$\sqrt[3]{x^2-8} = 2$$

±4

III

$$\sqrt{x-2} = x-8$$

11

$$\sqrt[3]{x+12} = 4$$

52

IV

$$\sqrt{x^4+19} = 10$$

±3

$$\sqrt[3]{x-1} = -1$$

0

Устная работа

- Можно ли, не решая уравнений, сделать вывод о неразрешимости предложенных уравнений:

$$\sqrt{7-x} = -8+x;$$

$$\sqrt{x-3} = -\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{3-x} = 5 - \sqrt{x-9}$$

$$\sqrt{5x+7} + \sqrt{3-4x-x^2} + 2 = 0$$





Методы решения иррациональных уравнений

- **Введение новой переменной**
- **Исследование ОДЗ**
- **Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель.**
- **Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной.**
- **Выделение полного квадрата**





Методы решения иррациональных уравнений

- **Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение**
- **Использование свойств монотонности функций**
- **Функционально - графический метод**
- **Метод равносильных преобразований**
- **Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень**



Пример. Решите уравнение:

1 способ.

$$\sqrt{x} = 3 - 2x$$

$$(\sqrt{x})^2 = (3 - 2x)^2$$

$$x = 9 - 12x + 4x^2$$

$$4x^2 - 13x + 9 = 0$$

$$x_1 = 2\frac{1}{4}; \quad x_2 = 1.$$

$$\text{Проверка: } x_1 = 2\frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{9}{4} + \sqrt{\frac{9}{4}} - 3 = 0$$

$$3 = 0 \text{ (неверно)}$$

$$x_2 = 1$$

$$2 \cdot 1 + \sqrt{1} - 3 = 0$$

$$0 = 0 \text{ (верно)}$$

Ответ: $x = 1$.

$$2x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

2 способ.

$$2x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\text{Замена: } \sqrt{x} = a$$

$$2a^2 + a - 3 = 0$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\sqrt{x} = 1 \quad \text{или}$$

$$\sqrt{x} = -\frac{3}{2}$$

$$x = 1$$

к.нет



Этот метод называется методом введения новой переменной.

Примеры:

После замены

$$1) x + \sqrt{x} = 30;$$

$$1) a^2 + a = 30;$$

$$2) \sqrt{x} - \frac{20}{\sqrt{x}} = 1;$$

$$2) a - \frac{20}{a} = 1;$$

$$3) (5x - 1) + \sqrt{5x - 1} = 12. \quad 3) a^2 + a = 12.$$



Введение новой переменной

Решение.

• Решить уравнение.

$$x^2 + 3x - 18 + 4 \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$$

Пусть $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = t$, t – неотрицательное число, тогда имеем $t^2 - 12 + 4t = 0$.

Отсюда, $t_1 = 2$,

$t_2 = -6$ – посторонний корень.

Выполняем обратную подстановку,

получим
 $x^2 + 3x - 6 = 4$

Отсюда, $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.



Исследование ОДЗ

- Решить уравнение

$$3 \cdot \sqrt{3x+1} - 4 \cdot \sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x-1} = -(2 + \sqrt{1-x})$$

Решение.

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Замечаем, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки $x=1$.

Проверкой убеждаемся, что $x=1$ – решение уравнения.





Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5.$$

- Решить уравнение

Решение. Умножим обе части уравнения на

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$$

Получим, $x+3 - x-8 = 5 \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$.

Имеем,
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = -1, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5. \end{cases}$$

Отсюда, $2 \cdot \sqrt{x+3} = 4, \quad x = 1.$

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ является корнем данного уравнения.



Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3.$$

- Решить уравнение

Решение. Положим $u = \sqrt[3]{x-2}$, $v = \sqrt{x+1}$.

Тогда $u+v=3$. Так как $u^3=x-2$, $v^2=x+1$, то $v^2 - u^3 = 3$.

Итак, в новых переменных имеем

$$\begin{cases} v + u = 3, \\ v^2 - u^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u, \\ u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2, \\ u = 1. \end{cases}$$

Значит, $x=3$.



Выделение полного квадрата

- Решение.
• Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + 2 \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2 \cdot \sqrt{x+1} = 2.$$

Заметим, что $x+2 + 2 \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2$

$$x+2 - 2 \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2.$$

Следовательно, имеем уравнение
Данное уравнение равносильно совокупности

двух систем: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + 1 + \sqrt{x+1} - 1 = 2, \\ \sqrt{x+1} - 1 \geq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 < 0, \\ 2 \cdot \sqrt{x+1} - 1 \geq x \leq 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 < 0, \\ \sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1} = 2. \end{cases}$$

Решением первой системы будет $x=0$, решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству $-1 \leq x < 0$.



ограниченности выражений, входящих в уравнение

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^4 + 1} = 2 - x^2.$$

Решение

- Решить уравнение

Так как $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ и $\sqrt[4]{x^4 + 1} \geq 1$ для любых значений x ,

то левая часть уравнения не меньше двух для $x \in \mathbb{R}$

Правая часть $2 - x^2 \leq 2$ для $x \in \mathbb{R}$.

Поэтому уравнение может иметь корнями только те значения x , при которых

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^4 + 1} = 2, \\ 2 - x^2 = 2. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем $x=0$.

Это значение удовлетворяет и первому уравнению системы. Итак, $x=0$ – корень уравнения.



Использование свойств монотонности функций

- Решить уравнение

$$\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{29-x}.$$

Если функция $u(x)$ монотонна, то уравнение $u(x) = A$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Отсюда следует, что уравнение $u(x) = v(x)$, где $u(x)$ - возрастающая, а $v(x)$ - убывающая функции, либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Подбором находим, что $x=2$ и оно единственно.



Домашнее задание

1. $\sqrt{|x^2 + 14x + 47|} - 1 = |x + 7| - 1,$

4. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1},$

2. $(x+2)\sqrt{x^2 - x - 20} = 6x + 12,$

5. $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3,$

3. $\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[6]{25-x^2}.$

6. $\sqrt[6]{x\sqrt{x^7}} - 25 \cdot \sqrt[4]{x\sqrt{x}} = 54.$

7. $\sqrt{x + \sqrt{x+6}} + \sqrt{x - \sqrt{x+6}} = 4$

8. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

12. $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{x}{2}$

9. $x^3\sqrt{x} - 4^3\sqrt{x^2} + 4 = 0$

13. $\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{17-x}$

10. $4x^2 + 5x\sqrt{x+5} = 44(x+5)$

14. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$

11. $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x-5} - \sqrt{x+1} = 4$