СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Предположения для модели А

А.1 Модель линейна по параметрам и правильно задана.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u$$

А.2 Не существует точной (строго соответствующей) линейной зависимости между независимыми переменными регрессии в выборке(между регрессорами в выборке).

А.3 Математическое ожидание остаточного члена равно нулю.

А.4 Случайный член гомоскедастичен.

А.5 Значения случайного члена имеют независимые распределения.

А.6 Случайный член имеет нормальное распределение .

Переходя от простой к множественной регрессионной модели, мы начнем с повторения условий (допущений), относящихся к модели регрессии.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Допущения для модели А

А.1 Модель линейна по параметрам и правильно задана.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u$$

А.2 Не существует точной (строго соответствующей) линейной. зависимости между независимыми переменными регрессии в выборке (между регрессорами в выборке).

А.3 Математическое ожидание остаточного члена равно нулю.

А.4 Случайный член гомоскедастичен.

А.5 Значения случайного члена имеют независимые распределения.

А.6 Случайный член имеет нормальное распределение

.

Мы видим, что только пункт П.2 имеет отличие.

Ранее утверждалось, что в переменной X должно быть какое-то изменение.

Мы объясним разницу в одном из последующих слайдов

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Допущения для модели А

A.1 Модель линейна по параметрам и правильно задана.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u$$

A.2 Не существует точной (строго соответствующей) линейной зависимости между независимыми переменными регрессии в выборке(между регрессорами в выборке).

A.3 Математическое ожидание остаточного члена равно нулю.

A.4 Случайный член гомоскедастичен.

A.5 Значения случайного члена имеют независимые распределения.

A.6 Случайный член имеет нормальное распределение .

При условии, что допущения модели регрессии действительны, методы оценки OLS в модели множественной регрессии являются беспристрастными и эффективными, как и в простой модели регрессии.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель **Соответствующая модель**

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u \qquad \hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

Мы не будем пытаться доказать эффективность.

Однако, мы опишем доказательство несмещенности (отсутствия смещенности).

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель **Соответствующая модель**

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u \qquad \hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y}) \sum (X_{3i} - \overline{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \overline{X}_3)(Y_i - \overline{Y}) \sum (X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{3i} - \overline{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \overline{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{3i} - \overline{X}_3)\right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \overline{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \beta_3 \overline{X}_3 + \overline{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \overline{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \overline{X}_3) + u_i - \overline{u} \end{aligned}$$

Первым шагом, как всегда, является замена *Y* из действительной взаимосвязи. Составляющие *Y* из $\hat{\beta}_2$ фактически находятся в виде Y_i минус его среднее значение, поэтому для этого удобно получить выражение.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)\right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i$$

После подстановки и упрощения мы можем сделать вывод о том, что $\hat{\beta}_2$ можно разложить на : истинное значение $\hat{\beta}_2$ плюс взвешенная линейная комбинация значений случайного члена в примере, приведенном выше.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)\right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^{*} u_i$$

На слайде представлено то, что мы нашли в простой модели регрессии. Разница в том, что выражение для определения значимости, которое зависит от всех значений X_2 и X_3 в образце, значительно усложняется.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)\sum\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right)^2 - \sum\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)\sum\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right)}{\sum\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)^2\sum\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right)^2 - \left(\sum\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right)\right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= \left(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i\right) - \left(\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}\right) \\ &= \beta_2\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right) + \beta_3\left(X_{3i} - \bar{X}_3\right) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^{*} u_i$$

$$E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2 + E\left(\sum a_{i2}^{*} u_i\right) = \beta_2 + \sum E\left(a_{i2}^{*} u_i\right)$$

Достигнув этого момента, доказать несмещенность легко.

Принимая ожидания, β_2 не изменяется, будучи постоянным.

Ожидание суммы равно сумме ожиданий.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)(Y_i - \bar{Y}) \sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \bar{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) + u_i - \bar{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i$$

$$E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2 + E\left(\sum a_{i2}^* u_i\right) = \beta_2 + \sum E\left(a_{i2}^* u_i\right) = \beta_2 + \sum a_{i2}^* E\left(u_i\right) = \beta_2$$

A * члены нестационарны, так как они зависят только от значений X_2 и X_3. Следовательно, члены a * могут быть выведены из ожиданий как факторы.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y}) \sum (X_{3i} - \overline{X}_3)^2 - \sum (X_{3i} - \overline{X}_3)(Y_i - \overline{Y}) \sum (X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{3i} - \overline{X}_3)}{\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)^2 \sum (X_{3i} - \overline{X}_3)^2 - \left(\sum (X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{3i} - \overline{X}_3)\right)^2}$$

$$\begin{aligned} Y_i - \overline{Y} &= (\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i) - (\beta_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \beta_3 \overline{X}_3 + \overline{u}) \\ &= \beta_2 (X_{2i} - \overline{X}_2) + \beta_3 (X_{3i} - \overline{X}_3) + u_i - \overline{u} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \sum a_{i2}^* u_i$$

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left(\sum a_{i2}^* u_i\right) = \beta_2 + \sum E(a_{i2}^* u_i) = \beta_2 + \sum a_{i2}^* E(u_i) = \beta_2$$

По предположению А.3, $E(u_i) = 0$ для всех i. Следовательно, Е ($\hat{\beta}_2$) равно ($\hat{\beta}_2$) и, следовательно, является несмещенной оценкой. Точно так же является несмещенной оценкой $\hat{\beta}_3$

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель **Соответствующая модель**

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u \qquad \hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

Наконец, мы покажем, что это несмещенная оценка $\hat{\beta}_1$. Это довольно просто, поэтому вы должны попытаться сделать это самостоятельно, прежде чем смотреть на остальную часть этой последовательности.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель	Соответствующая модель
$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$	$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= \left(\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}\right) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

Сначала замените среднее значение выборки Y.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= \left(\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}\right) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + E\left(\bar{u}\right) - \bar{X}_2 E\left(\hat{\beta}_2\right) - \bar{X}_3 E\left(\hat{\beta}_3\right)$$

Теперь первый момент. Первые три условия являются нестационарными, поэтому они не зависят от ожиданий.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= \left(\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}\right) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + E\left(\bar{u}\right) - \bar{X}_2 E\left(\hat{\beta}_2\right) - \bar{X}_3 E\left(\hat{\beta}_3\right)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 - \bar{X}_2 \beta_2 - \bar{X}_3 \beta_3$$

Ожидаемое значение среднего члена возмущения равно нулю, так как E(u) равно нулю в каждом наблюдении. Мы только что показали, что E ($\hat{\beta}_2$) равно b_2 и что E ($\hat{\beta}_3$) равно b_3.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$= \left(\beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{u}\right) - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + E\left(\bar{u}\right) - \bar{X}_2 E\left(\hat{\beta}_2\right) - \bar{X}_3 E\left(\hat{\beta}_3\right)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 - \bar{X}_2 \beta_2 - \bar{X}_3 \beta_3$$

$$= \beta_1$$

Следовательно $\hat{\beta}_1$ **- это несмещенная оценка** b_1**.**