Исследование функции

построение графиков

Точки экстремума функции, точки перегиба

Максимумы и минимумы функции называются ее *экстремумами*.

Функция $y = f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x, принадлежащих этой окрестности, выполняется условие

$f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

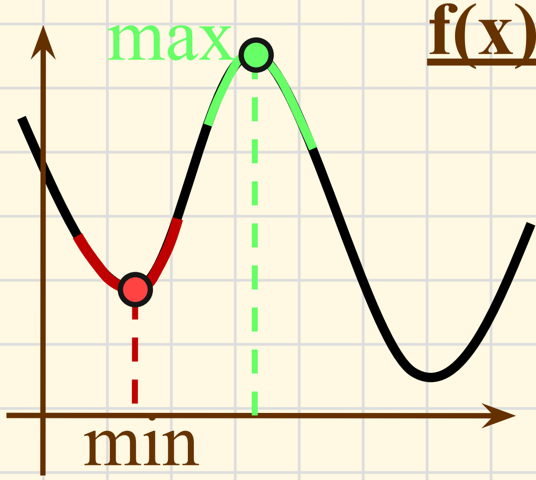


Схема исследования графика функции

1) Найти область определения функции.

2) Исследовать функцию на четность и периодичность.
Выяснить, симметрична область определения функции относительно начала координат и найти $y = f(-x)$.
Если $f(-x) = f(x)$, то функция четная,
если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная.

3) Найти нули функции. (Точки пересечения с осями координат).

4) Исследовать функцию на монотонность.
Если $f'(x) > 0$, то функция возрастает,
если $f'(x) < 0$, то функция убывает.

5) Записать точки экстремума и экстремумы функции.
(Найти значение функции в точках экстремума).

6) Дополнительные точки.

7) Построение графика.

Исследуйте функцию и постройте ее график $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2. $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3$

$-f(x) = -x^2 - 2x + 3$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$

Функция не является ни четной, ни нечетной

3. Находим нули функции.

a) $x = 0$ $y = -3$ $(0; -3)$

b) $y=0$ $x^2 + 2x - 3 = 0$

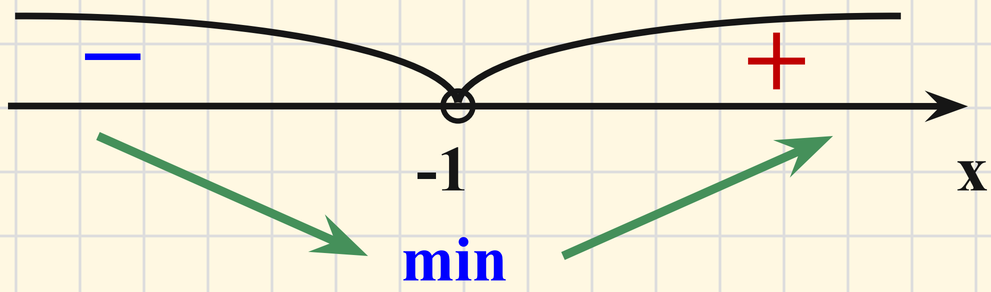
$D=16$ $x1=-3$ $x2=1$

$(-3; 0)$ $(1; 0)$

Исследуйте функцию и постройте ее график $f(x) = x^2 + 2x - 3.$

4.Находим критические точки функции.

$y' = 2x + 2$ $D(y') = (-\infty; \infty)$ $2x + 2 = 0$ $x = -1$



$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Минимум (-1;-4)

Нули функции: (0; -3) (-3; 0) (1; 0)

Минимум (-1;-4)

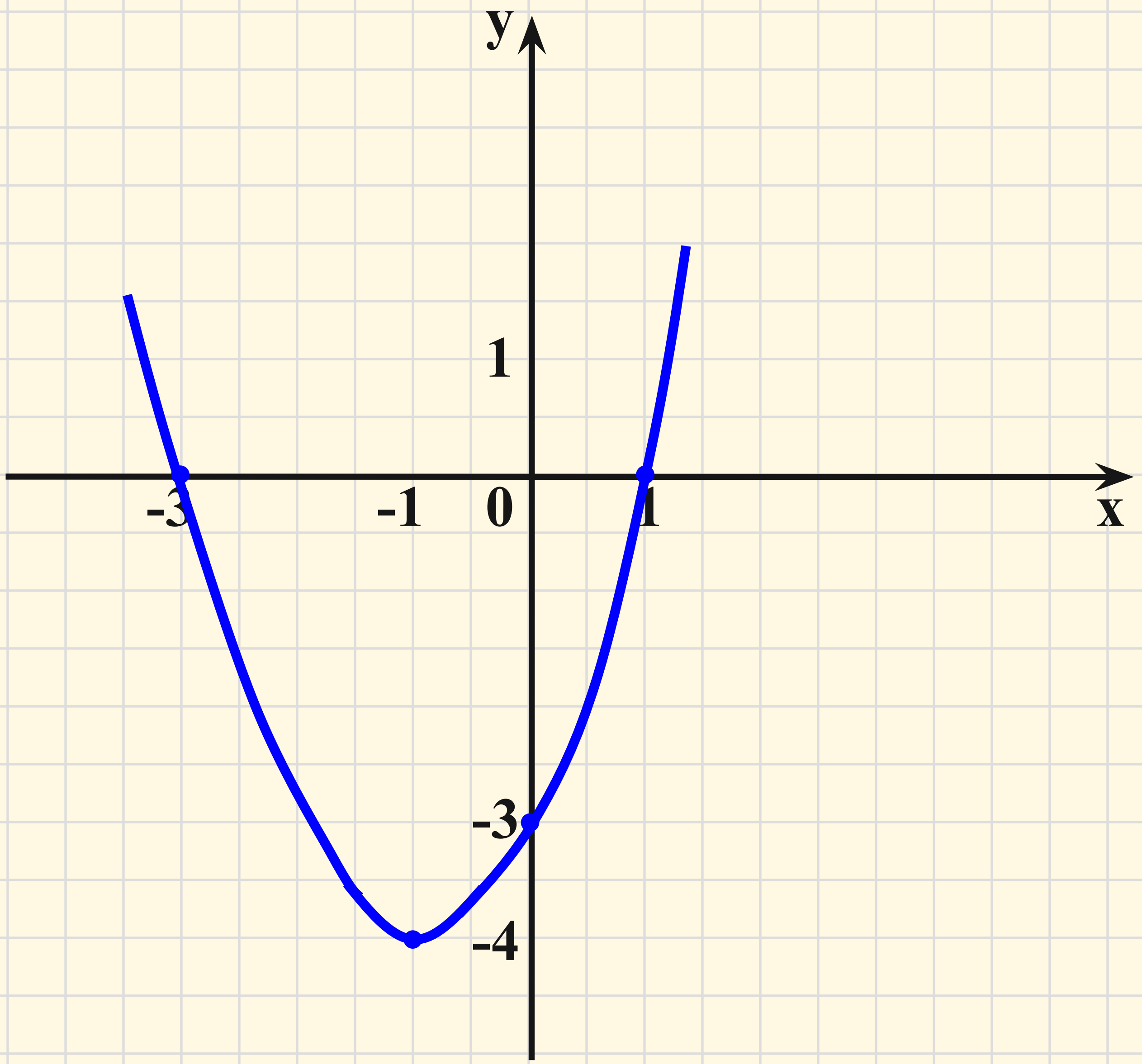
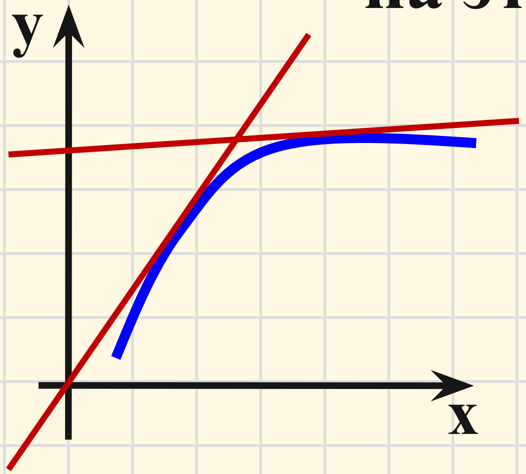


График функции y=f(x) называется **выпуклым** на интервале (a; b), если он расположен **ниже** любой своей касательной на этом интервале.



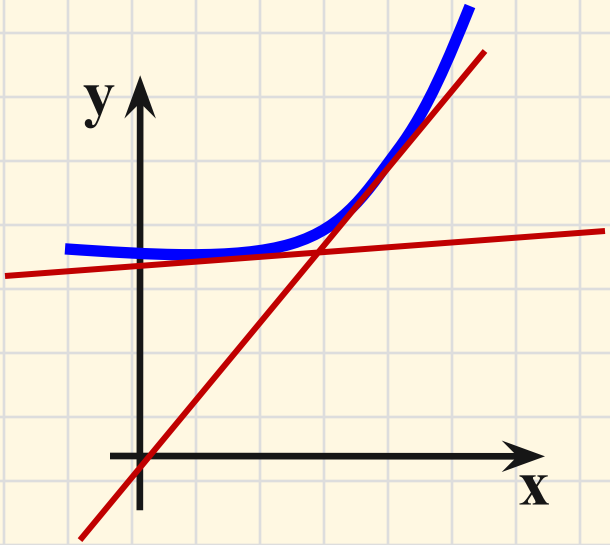
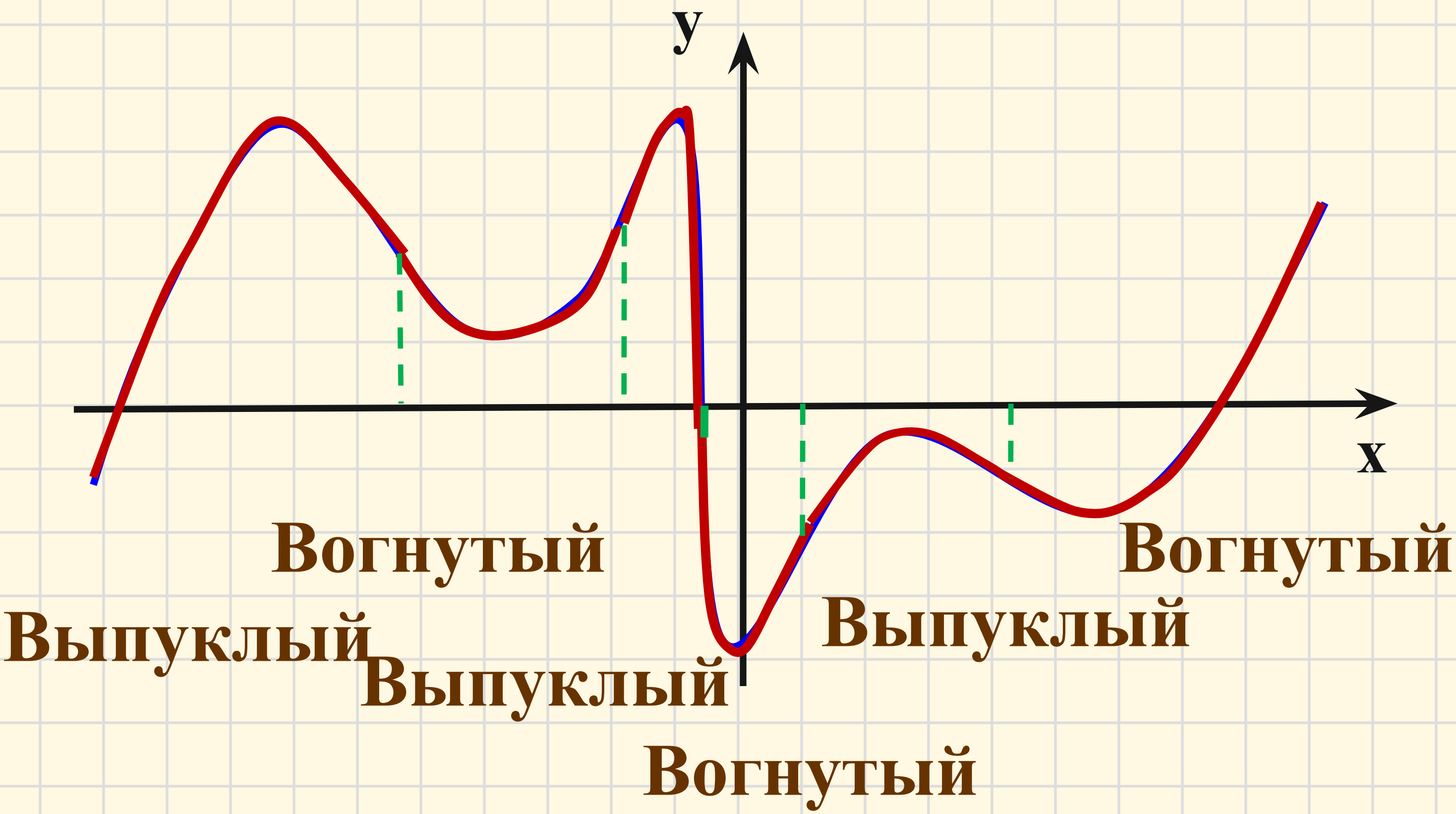


График функции y=f(x) называется **вогнутым** на интервале (a; b), если он расположен **выше** любой своей касательной на этом интервале.

Определите характер выпуклости графика функции.



Точки перегиба

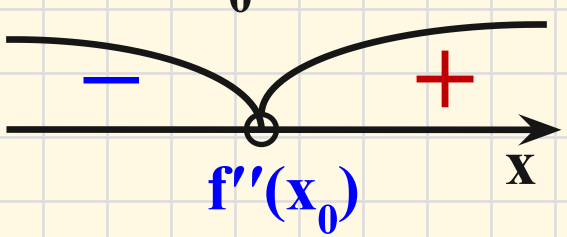
Точка, в которой меняется характер выпуклости графика функции, называется точкой перегиба.

Точка X_0 является *точкой перегиба* функции y=f(x), если:

а) функция y=f(x) непрерывна в некоторой окрестности точки x_0

б) $f''(x_0)=0$ (вторая производная)

в) вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак.



минус – график выпуклый,

плюс - вогнутый

Исследуйте функцию и постройте ее график $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

2. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$

$-f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$

Функция не является ни четной, ни нечетной

3. Находим нули функции.

а) $x = 0$ $y = 4$ $(0; 4)$

b) $y=0$ $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

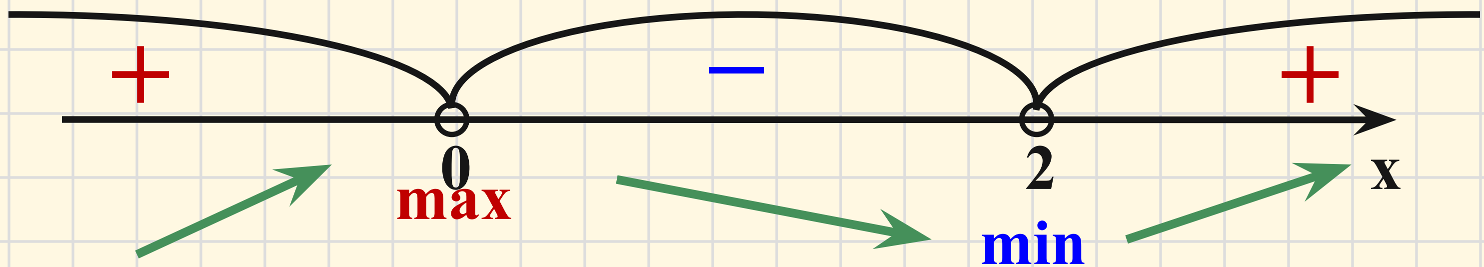
Подбором $x = -1$ $(-1; 0)$

Исследуйте функцию и постройте ее график $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$

4.Находим критические точки функции.

$y' = 3x^2 - 6x \qquad D(y') = (-\infty; \infty)$

$3x^2 - 6x = 0 \qquad 3x(x - 2) = 0 \qquad x_1 = 0; \ x_2 = 2$

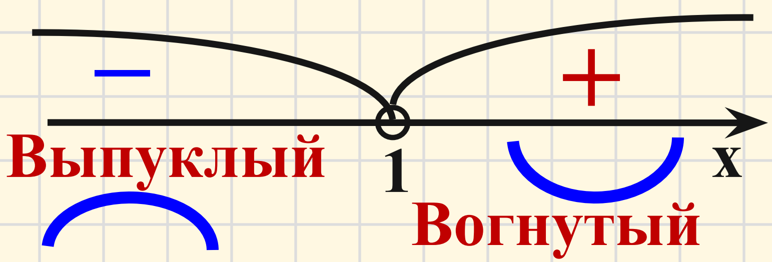


$f(0) = 4 \qquad f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$

Максимум (0; 4) **Минимум (2; 0)**

5.Находим точки перегиба функции.

$y'' = 6x - 6 \qquad D(y'') = (-\infty; \infty) \qquad 6x - 6 = 0 \qquad x = 1$



$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$

Точка перегиба (1; 2)

Нули функции: (0; 4) (-1; 0) **Минимум** (2; 0)

Максимум (0; 4) **Точка перегиба** (1; 2)