Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональные уравнения

<u>Определение</u>. Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются ***иррациональными***.

$$\sqrt[3]{x^3 - x} = x + 1; \qquad 2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 3$$

$$\sqrt{5 - x} + \sqrt{25 - x^2} = 0$$

Подходы к решению иррациональных уравнений

! Иррациональные уравнения решаются с помощью перехода к рациональным уравнениям или системам.

1. **Возведение обеих частей уравнения в степень.**

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x),\ n \in N$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^{2n}(x) = g^{2n}(x),\ n \in N$$

При возведении ***в четную степень*** возможно появление ***посторонних корней***. Поэтому обязательно нужно выполнить проверку, подставляя полученные корни в исходное уравнение.

Подходы к решению иррациональных уравнений

Пример 1.

$\sqrt[3]{x^3 - x} = x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x = (x + 1)^3 \Leftrightarrow$

$3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1.$

Ответ: $\{-\frac{1}{3}; -1\}$.

Подходы к решению иррациональных уравнений

Пример 2.

$\sqrt{x} = x - 2$ $\Rightarrow$ $x = (x - 2)^2$. $\Leftrightarrow$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 4, x_2 = 1.$

– **Проверка**: $x_1 = 4,$ $\sqrt{1} = 1 - 2$ *- верно;*

$x_2 = 1,$ $\sqrt{4} = 4 - 2$ *- ложно;*

значит $x = 1$ – посторонний корень.

или

– **ОДЗ**: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ $x \geq 2$, т.е. $x \in [2; +\infty)$.

значит $x = 1$ – посторонний корень, так как $1 \notin [2; +\infty)$.

Ответ: 4.

Подходы к решению иррациональных уравнений

2. Введение одной или нескольких новых переменных.

Пример 3. $2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 3$

Пусть $y = \sqrt[3]{x}$.

Тогда $2y^2 + y - 3 = 0\; y_1 \Leftrightarrow 1,\ y_2 = -1{,}5.$

Значит $\sqrt[3]{x} = 1$ или $\sqrt[3]{x} = -1{,}5 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = -\frac{27}{8}$.

Ответ: $\{1; -\frac{27}{8}\}$.

Подходы к решению иррациональных уравнений

Пример 4. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Пусть $u = \sqrt[3]{x+34}$, $v = \sqrt[3]{x-3}$

Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 = x + 34 \\ v^3 = x - 3 \end{cases}$$

Вычтем из второго третье уравнение:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = v + 1 \\ (v + 1)^3 - v^3 = 37 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = v + 1 \\ v^2 + v - 12 = 0 \end{cases}$$

Тогда $v_1 = 3$, $v_2 = -4$.

Значит, $x - 3 = 3^3$ или $x - 3 = (-4)^3$ $\quad x = 30$ или $x = -61$.

Ответ: $\{-61; 30\}$.

Подходы к решению иррациональных уравнений

3. **Предварительный анализ ОДЗ и вида уравнения.**

Пример 5.

$$\sqrt{x-1} = \sqrt[8]{3-5x}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3 - 5x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0{,}6 \end{cases} \iff x \in \varnothing$

Ответ: *нет корней*.

Подходы к решению иррациональных уравнений

Пример 6. $\sqrt{5-x}+\sqrt{25-x^2}=0$

$$\sqrt{5-x}\ge 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{25-x^2}\ge 0$$

(как арифметические корни).

Значит их сумма равна нулю, только если

$$\begin{cases}\sqrt{5-x}\ge 0 \\ \sqrt{25-x^2}\ge 0\end{cases} \qquad \begin{cases} x=5 \\ x=\pm 5\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=5$$

Ответ: 5.

Иррациональные неравенства

Определение. ***Иррациональные неравенства*** – это неравенства, содержащие переменную под знаком корня.

$$\sqrt{x^3+26} > x+2; \qquad \sqrt{5-y} \le 3;$$

$$\sqrt{x^2+4x-5} - 2x + 3 > 0.$$

Подходы к решению иррациональных неравенств

Иррациональные неравенства решаются с помощью перехода к равносильным рациональным неравенствам или их системам.

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$f(x) > g(x)$	$f^{2n+1}(x) > g^{2n+1}(x),\ n \in N$
2	$f(x) > g(x) \geq 0$	$\begin{cases} f^{2n}(x) > g^{2n}(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Подходы к решению иррациональных неравенств

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
3	$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
4	$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$
5	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Подходы к решению иррациональных неравенств

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a \geq 0$	$f(x) \geq a^2$
2	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a < 0$	$f(x) \geq 0$
3	$\sqrt{f(x)} \leq a, \quad a \geq 0$	$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq a^2 \end{array}\right.$
4	$\sqrt{f(x)} < a, \quad a \leq 0$	*Нет решений* $(x \in \varnothing)$

Решение иррациональных неравенств

Пример 1. $\sqrt[3]{x^3 + 26} > x + 2$

$x^3 + 26 > (x + 2)^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow$

$(x - 1)(x + 3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 1)$.

Пример 2. $\sqrt{5 - y} \le 3$

$\begin{cases} 5 - y \ge 0 \\ 5 - y \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow y \in [-4; 5]$

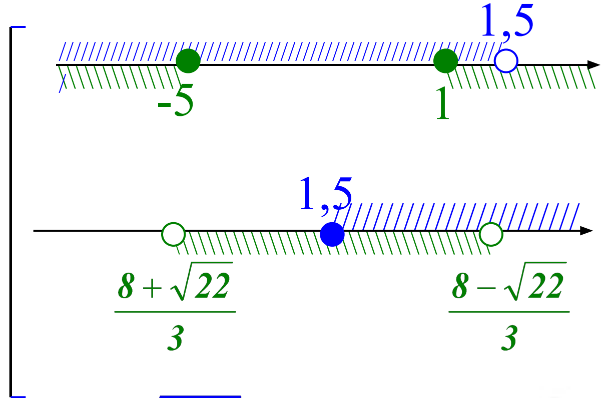
Решение иррациональных неравенств

Пример 3.

$$\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+4x-5}>2x-3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x-3<0 \\ x^2+4x-5\geq 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3\geq 0 \\ x^2+4x-5>(2x+3)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<1{,}5 \\ (x-1)(x+5)\geq 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 1{,}5 \\ 3x^2-16x+14<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<1{,}5 \\ (x-1)(x+5)\geq 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\geq 1{,}5 \\ \left(x-\dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)\left(x-\dfrac{8-\sqrt{22}}{3}\right)<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;-5]\cup[1;\frac{8+\sqrt{22}}{3})$$