КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# Вища та прикладна математика

*канд.фіз.-мат.наук, доц.Мащенко Людмила Зіновіївна*

Література:

1. Білоусова С.В. Математика для економістів. Збірник задач: навчальний посібник К.: КНТЕУ, 2015

2. Ковальчук Т.В., Мартиненко В.С., Денисенко В.І. Вища математика для економістів. – К.: КНТЕУ.–Ч.1.Ч.2.– 2007

3.Барковський В.В. Вища математика для економістів .– К.:ЦУЛ, 2002

4.Абчук В.А. Математика для менеджеров и экономистов: учебник СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 2002.

**Тема1. Елементи лінійної алгебри**

**Лекція №1. Матриці, дії з матрицями. Визначники, їх властивості.**

**План**

1. Матричні представлення даних в економіці. Балансові співвідношення.
2. Основні поняття. Види матриць.
3. Дії з матрицями.
4. Практичні способи обчислення визначників.
5. Застосування матриць при розрахунках прямих і загальних витрат.

В економічних задачах алгебра матриць використовується як засіб збереження і обробки інформації у компактній формі.

**Приклад 1**

Туристична фірма здійснює продаж путівок в трьох напрямах (α, β, γ) Обсяги реалізації (в грош. од.) по сезонам представлено у вигляді матриці

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \alpha & \quad\beta & \quad\gamma \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 300 & 50 & 150 \\ 250 & 100 & 340 \\ 20 & 220 & 100 \\ 420 & 20 & 250 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{зима} \\ \text{весна} \\ \text{літо} \\ \text{осінь} \end{matrix} \end{array}$$

## **Приклад 2**

Розподіл ресурсів по окремим галузям економики

| Ресурси | Галузі економіки ум. од. | |
|---|---|---|
| | промисловість | сільське господарство |
| Електроенергія | 5,3 | 3,1 |
| Трудові ресурси | 4,1 | 2,6 |
| Водні ресурси | 5,8 | 10 |

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 5{,}3 & 3{,}1 \\ 4{,}1 & 2{,}6 \\ 5{,}8 & 10 \end{pmatrix}$$

За допомогою  матриць  зручно  записувати де-які економічні залежності. Це полегшує дослідження між  різними економічними показниками і дозволяє розробляти різні варіанти планів у виробництві.

**Приклад 3**

Підприємство випускає продукцію ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$), при цьому використовує ресурси трьох видів. Необхідні характеристики  виробництва задано таблицею

## Приклад 3 (продовження)

| **Вид ресурсів** | Норми витрат на одиницю продукції, ум. од. | | | Запас ресурсів |
|---|---|---|---|---|
| | α | β | γ | |
| Сировина | 5 | 3 | 4 | 2700 |
| Матеріали | 2 | 1 | 1 | 900 |
| Обладнання | 3 | 2 | 2 | 1600 |

$$\mathbf{A}_{3\times3}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{3\times1}=\begin{pmatrix}2700\\ 900\\ 1600\end{pmatrix}$$

**Матрицею А** розміру $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел, розташованих у $m$ рядках і $n$ стовпцях.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або $\boldsymbol{A_{m\times n}}$,

де $\boldsymbol{a_{ij}}$ - елементи матриці ($i$=1,…,$m$; $j$=1,…,$n$ ; $i$-номер рядка, $j$- номер стовпця).

Якщо $m = n$, то матрицю називають **квадратною.**

Кількість її рядків (або стовпців) -порядком матриці.

Якщо $m$=1 матрицю $A_{1\times n} = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$ називають **рядком**

Якщо n=1 матрицю $A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$

називають **стовпцем**

Елементи $a_{ij}$ матриці в яких $i=j$: $\boldsymbol{a_{11}}$, $\boldsymbol{a_{22}}$, **…**, $\boldsymbol{a_{nn}}$ утворюють головну діагональ, елементи $\boldsymbol{a_{1n}}$, $\boldsymbol{a_{2(n-1)}}$, **…**, $\boldsymbol{a_{n1}}$ – допоміжну.

Матрицю $A_{n\times n}$ вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають **діагональною** матрицею

Діагональну матрицю вигляду $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ називають **одиничною**.

Квадратну матрицю називають верхньою (нижньою) **трикутною**, якщо дорівнюють нулю всі елементи під (над) головною діагоналлю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Перетворення матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями (або стовпців рядками) називають **транспонуванням**.

Матрицю отриману транспонуванням матриці A називають **транспонованою** до A і позначають $\mathbf{A^T}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Над матрицями, як і над числами, можна проводити ряд операцій, причому, деякі з них подібні до операцій над числами, а деякі мають особливості.

## 1.Множення матриці на число

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на число **k** називають матрицю $B=(b_{ij})$, елементи якої дорівнюють добутку числа **k** на відповідні елементи матриці A:

$$b_{ij}=k\times a_{ij},\ (i=1,\ \dots\ ,m;\ j=1,\ \dots\ ,n)$$

$$B=\ k\times A\ =\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

## Приклад 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad k = 6 \; ; \qquad B = 6A = \begin{pmatrix} -6 & 18 & 30 \\ 12 & 48 & 24 \end{pmatrix}.$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

## 2. Додавання матриць

Сумою матриць **A + B** однакового розміру $m \times n$ називають матрицю **C** розміру $m \times n$, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B.

# Додавання матриць

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A+B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 3.Множення матриць.

Добуток матриць $A\times B$ можливий лише у випадку, коли число стовпців матриці А дорівнює числу рядків матриці В.

Тоді добутком матриць $A_{m\times k}\times B_{k\times n}$ називають матрицю $C_{m\times n}$, елементи якої обчислюють за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\ldots+a_{in}\times b_{nj},\quad i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots n.$$

В загальному випадку $A\times B\neq B\times A$

Якщо $A\times B=B\times A$ то матриці називають комутативними (переставними).

**Приклад 5.**

Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 0+(-1)\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+3\cdot 0 \\ 4\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1 & 4\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 2 & 4\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 0 \\ 0\cdot 1+2\cdot 0+(-3)\cdot 1 & 0\cdot 0+2\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 0\cdot 2+2\cdot 1+(-3)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Властивості дій над матриями.

1. $A+B=B+A$
2. $к(A+B)=кA+кB$
3. $к(pA)=(кp)A$
4. $A(BC)=(AB)C$
5. $к(AB)=(кA)B=A(кB)$
6. $C(A+B)=CA+CB$
7. $EA=AE=A$
8. $(AB)^T=B^TA^T$
9. $(A^T)^T=A$

# Визначники матриць

Кожну квадратну матрицю можна охарактеризувати деяким числом. Це число називають **визначником матриці** і позначають $|A|,\ \Delta,\ d,\ \delta$

**Визначник матриці першого порядку:**

$A = (a_{11})$ - елемент $a_{11}$

**Визначник матриці другого порядку** :

$A = (a_{ij}),\quad (i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,2})$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

# Визначник третього порядку:

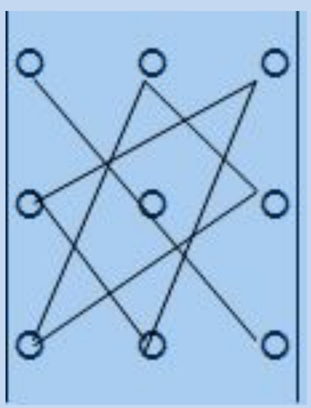
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

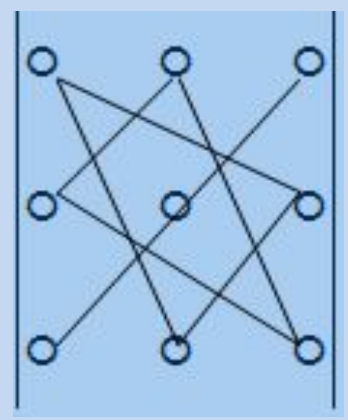
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

-　　-　　-　　+　　+　　+

+



-



# Приклад 6

нехай $A = (3)$, тоді $\Delta_1 = |A| = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 1 = 14$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{matrix} =$$

$$= (-3) \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-6) - (-3) \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 2 = 35.$$

# Приклад 7

Петро Клименко володіє мережою з трьох туристичних агенств А, В, С, які здійснюють продаж путівок у Тайланд, Єгипет, Балі. Обсяги реалізації путівок (в тис. грн.) кожною фірмою представлено таблицями.

$$A=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc}\text{Т} & \text{Є} & \text{Б}\end{array} & \\ \begin{pmatrix} 300 & 50 & 150 \\ 250 & 100 & 340 \\ 20 & 220 & 100 \\ 420 & 20 & 250 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{зима}\\ \text{весна}\\ \text{літо}\\ \text{осінь}\end{array}\end{array} \quad B=\begin{pmatrix} 200 & 10 & 250 \\ 60 & 30 & 420 \\ 10 & 50 & 160 \\ 200 & 10 & 300 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 425 & 40 & 160 \\ 250 & 64 & 240 \\ 90 & 260 & 40 \\ 360 & 40 & 240 \end{pmatrix}$$

Визначити обсяг реалізації мережею з трьох агенств. Проаналізувати для кожної фірми, путівки в якому напрямку дають найбільший прибуток і в якому сезоні.

**Розв’язок**

Сукупний обсяг реалізації путівок знайдемо як суму матриць

$$A+B+C=\begin{pmatrix} 300 & 50 & 150 \\ 250 & 100 & 340 \\ 20 & 220 & 100 \\ 420 & 20 & 250 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 200 & 10 & 250 \\ 60 & 30 & 420 \\ 10 & 50 & 160 \\ 200 & 10 & 300 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 425 & 40 & 160 \\ 250 & 64 & 240 \\ 90 & 260 & 40 \\ 360 & 40 & 240 \end{pmatrix}=\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \text{Т} & \text{Є} & \text{Б} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 925 & 100 & 560 \\ 560 & 194 & 1000 \\ 120 & 530 & 300 \\ 980 & 70 & 790 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{зима} \\ \text{весна} \\ \text{літо} \\ \text{осінь.} \end{array} \end{array}$$

## Приклад 8

Підприємство виготовляє продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів.

Норми витрат сировини кожного типу задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Вартість одиниці сировини кожного типу задано матрицею $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$

Які загальні витрати на виробництво 100 одиниць продукції першого типу, 200 одиниць продукції другого типу і 150 одиниць продукції третього типу?

**Розв’язок**

1). Обчислимо вартість сировини, що йде на виготовлення одиниці продукціїї кожного з трьох типів

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 55 & 90 \end{pmatrix}$$

2). Знайдемо загальні витрати на виробництво заданої кількості продукції

$$\begin{pmatrix} 35 & 55 & 90 \end{pmatrix} \times \begin{vmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{vmatrix} = 28000$$