ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Модуль 5

§ 1. Понятие функции двух переменных.

- Пусть x, y – две независимые друг от друга переменные. Графически пару независимых переменных (x, y) можно представить как точку $M(x, y)$ на плоскости xOy. Пусть D – некоторое множество точек $M(x, y)$.

- **Опр.** Если каждой точке $M(x, y)$ из множества D по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное действительное число z, то говорят, что z есть *функция двух переменных* x и y и пишут

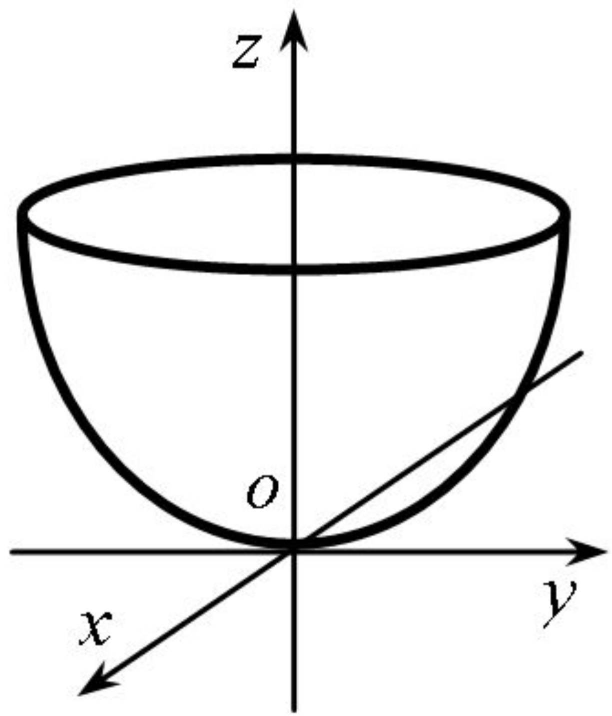
$$z = f(x, y) \text{ или } z = f(M),$$

где $M = M(x, y)$ – точка плоскости.

- Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в трехмерном пространстве.

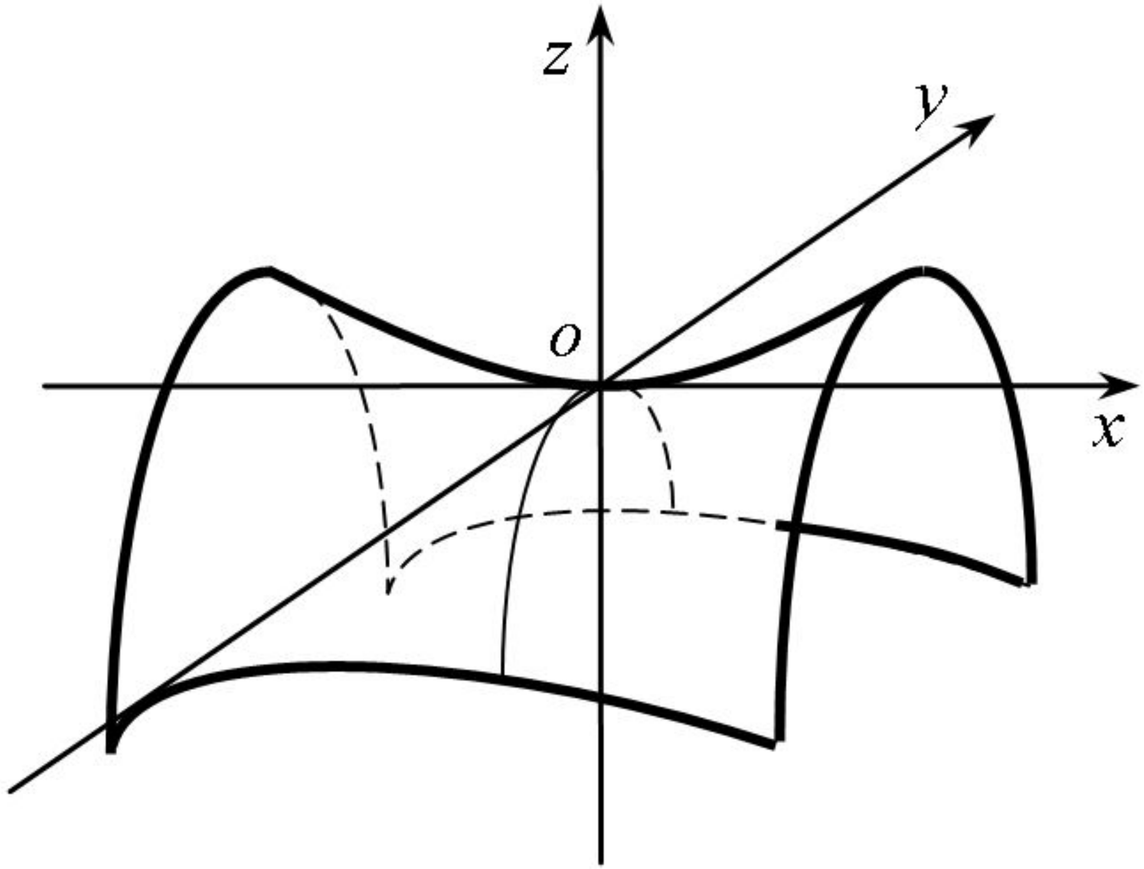
Примеры:

- График функции $z = x^2 + y^2$



- (эллиптический параболоид)

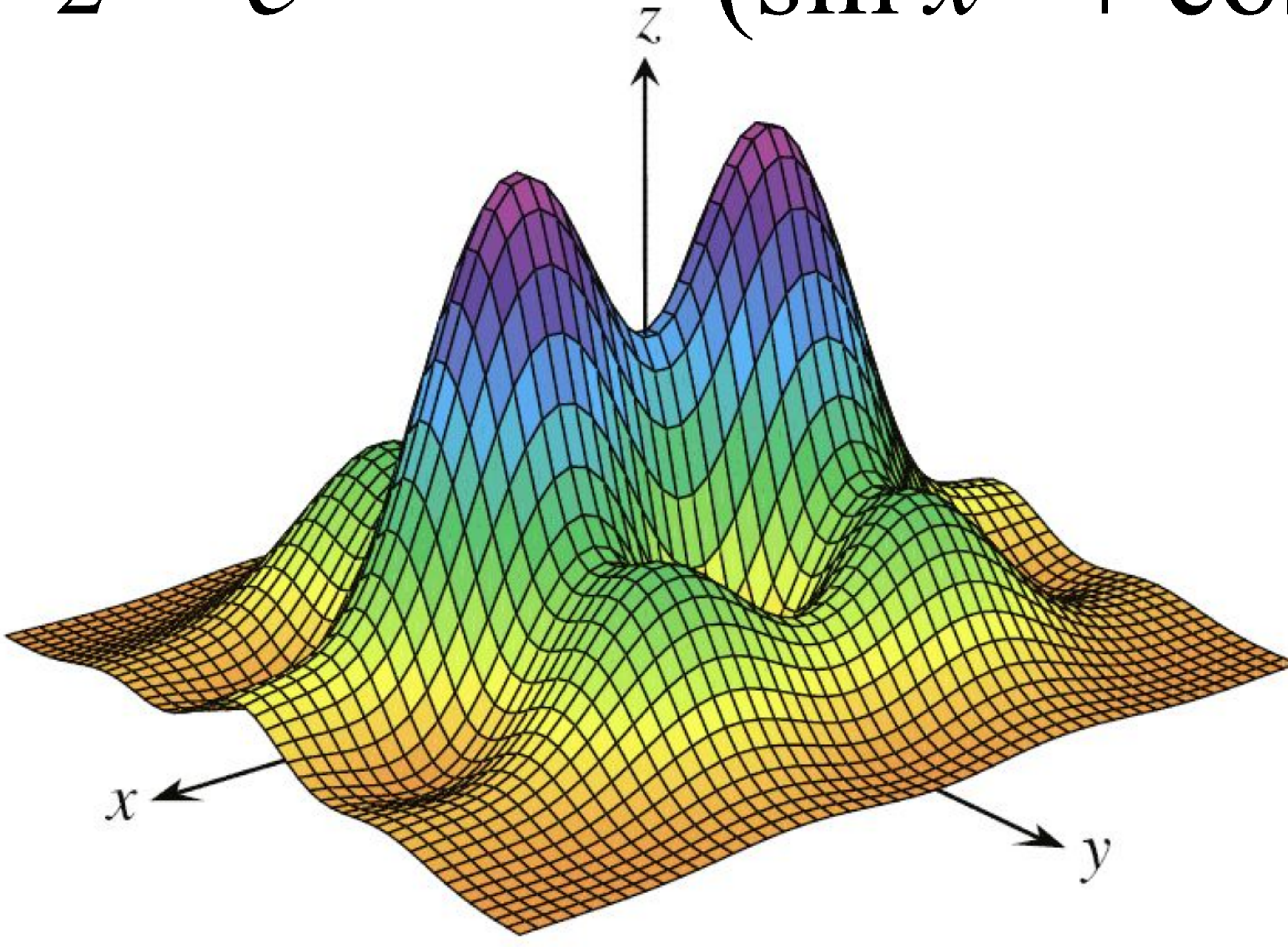
- график функции $z = x^2 - y^2$



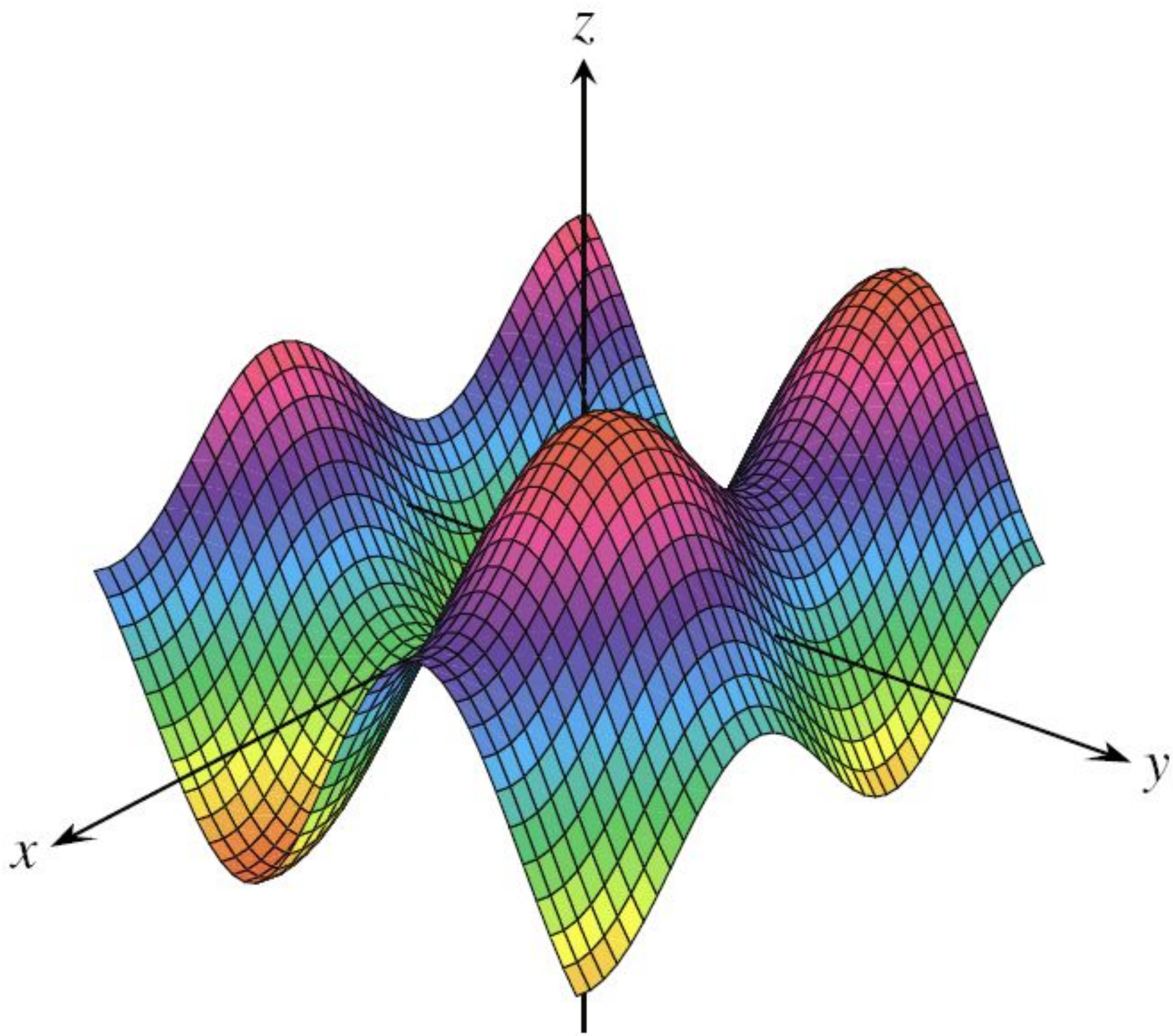
(гиперболический параболоид)

- График функции

$$z = e^{-(x^2+y^2)/8}(\sin x^2 + \cos y^2)$$



- График функции $z = \sin x + 2\sin y$



- **<u>Опр</u>.** *Областью определения функции* $z = f(x, y)$ называется множество D точек $M(x, y)$, в которых функция $z = f(x, y)$ определена и может быть вычислена. Все значения, которые принимает функция $z = f(x, y)$ (в области ее определения), образуют *множество значений функции*.

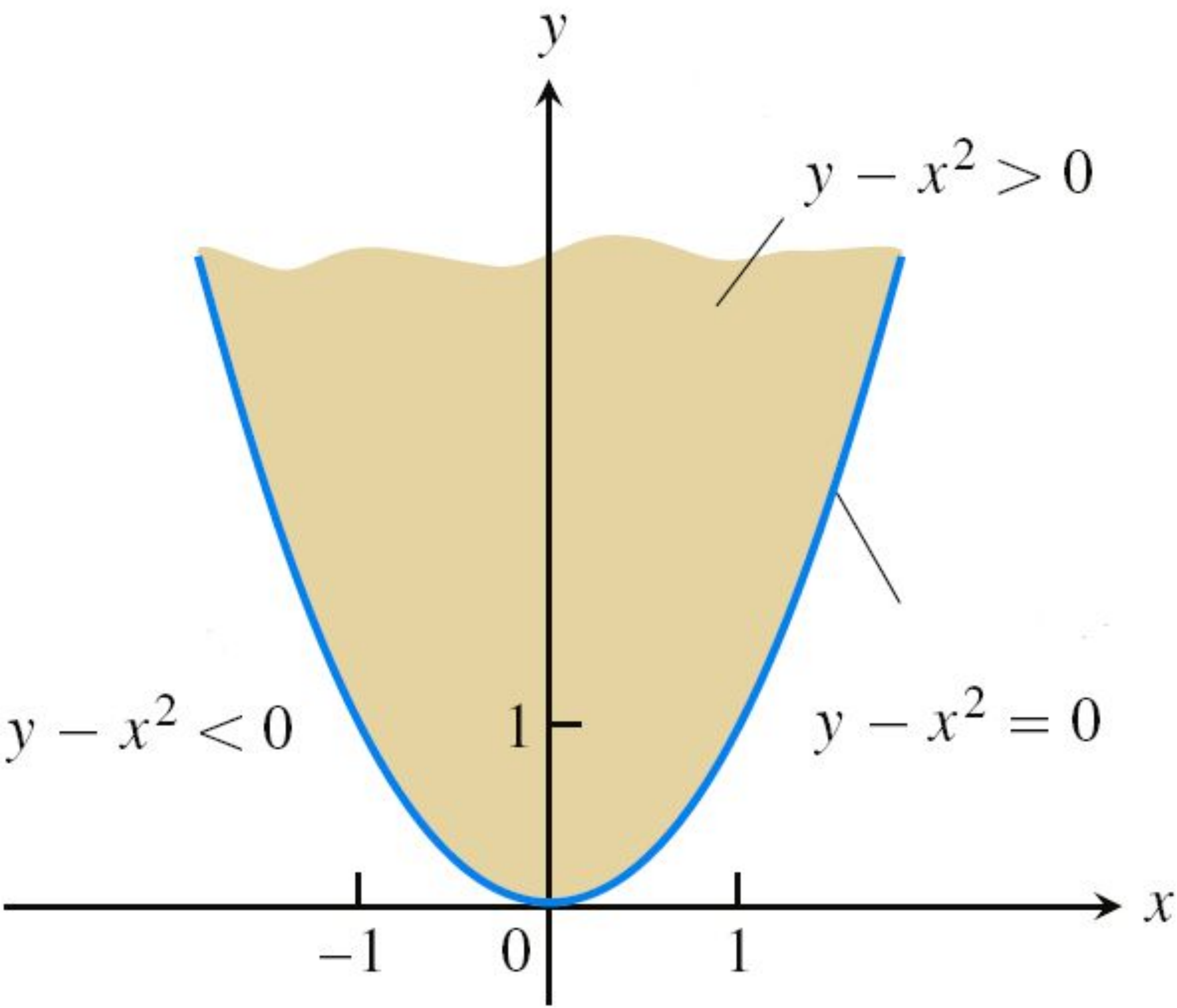
Примеры

Функция	Обл. опр-ния	Мн-во знач-й
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	Вся плоскость	$[-1, 1]$

Графическое изображение области определения функции.

- **Пример.** Построим область определения функции

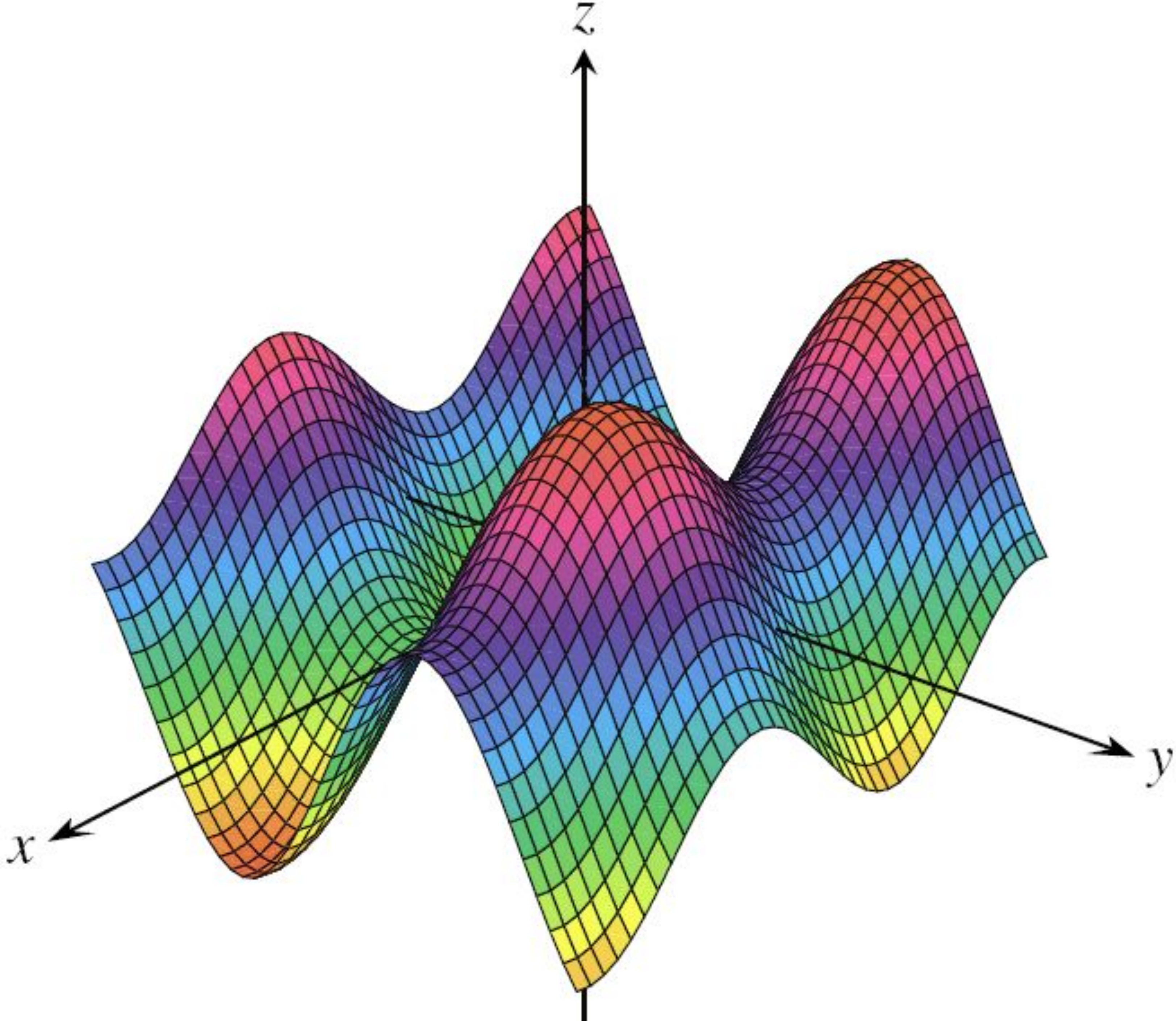
$$w = \sqrt{y - x^2}$$



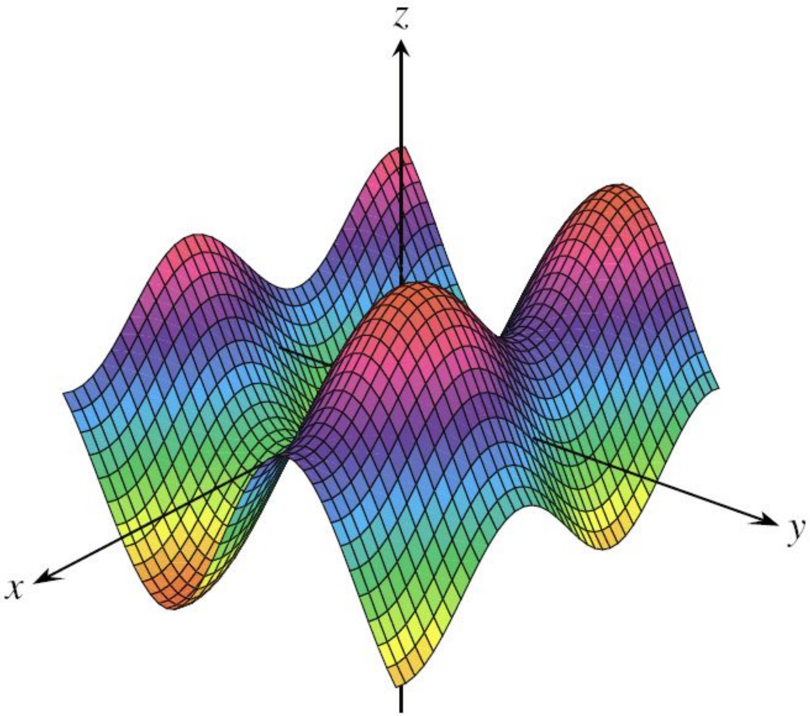
y
$y - x^2 > 0$
$y - x^2 < 0$
1
$y - x^2 = 0$
-1
0
1
x

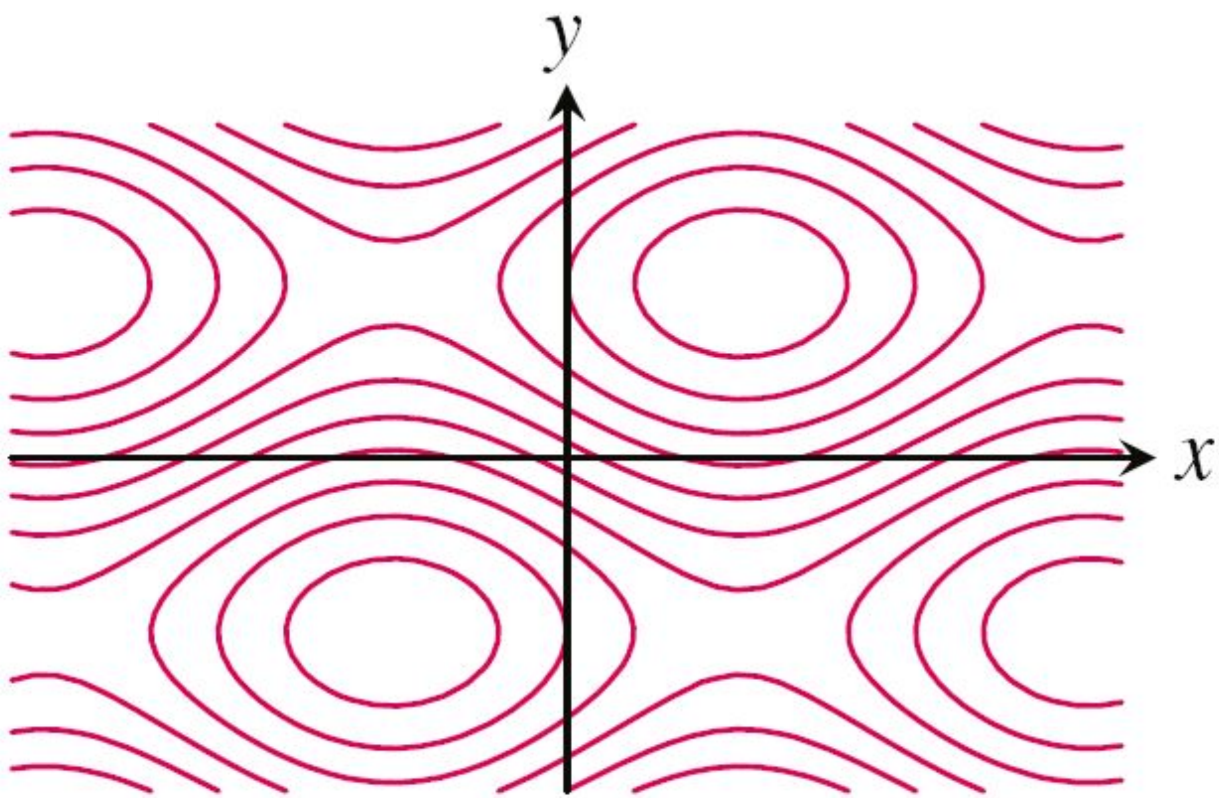
Линии уровня

- **<u>Опр</u>.** Множество точек плоскости таких, что функция $f(x, y)$ принимает в них одно и то же значение, $f(x, y) = c$, называется линией уровня.



z
x
y


z
y
x


y
x

Рижский залив
ЭСТОНИЯ
ЛАТВИЯ
ЛИТВА
РОССИЯ
РОССИЯ
ПОЛЬША
УКРАИНА
Полоцк
Новополоцк
Витебск
Западная Двина
ОРШАНСКАЯ ВОЗВЫШЕННОСТЬ
Орша
МИНСКАЯ ВОЗВЫШЕННОСТЬ
Молодечно
Борисов
Березина
МИНСК
Могилев
Лида
г. Дзержинская
(345 м)
Гродно
Кричев
Осиповичи
Быхов
Днепр
Неман
Волковыск
Барановичи
Слоним
Слуцк
Бобруйск
Солигорск
Светлогорск
Гомель
П О Л Е С Ь Е
Речица
Брест
Кобрин
Пинск
Припять
Тереховка
Мозырь
Буг
Днепр
0 50 100 200 км
©RMCN

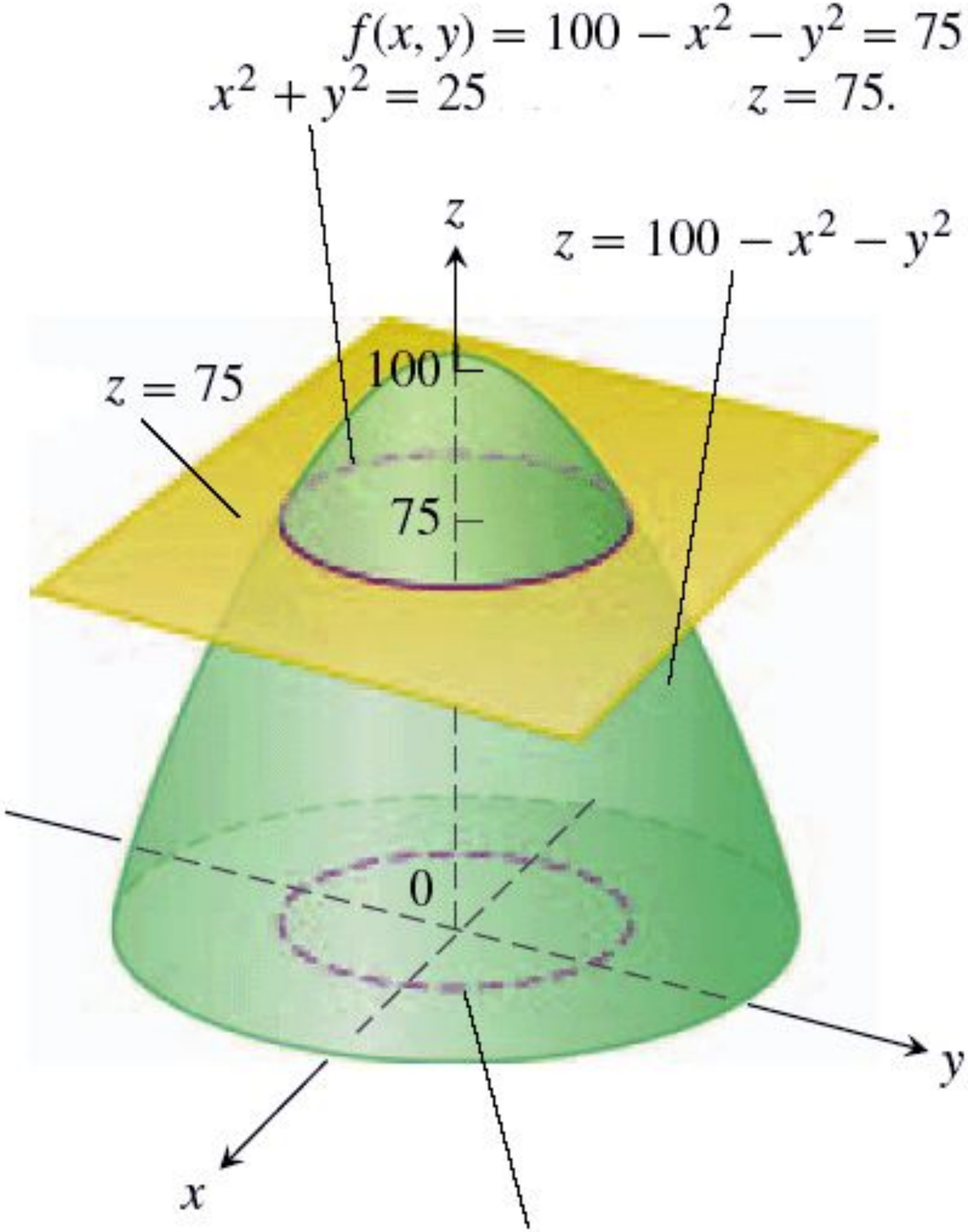

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Построение графика функции двух переменных

- Рассмотрим пример построения графика функции

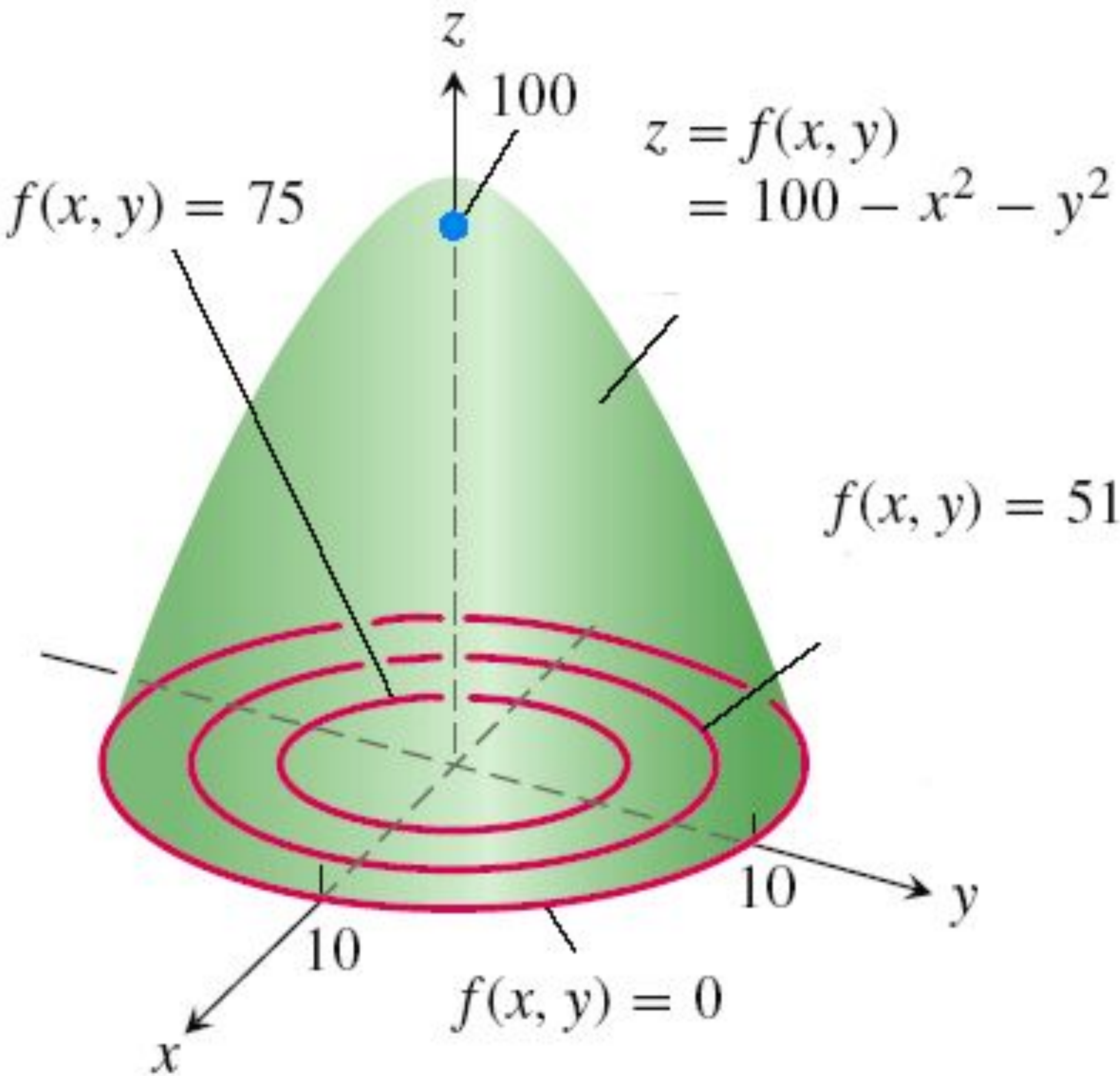
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

- Зафиксируем какое-нибудь значение этой функции, например, $z = 75$. Тем самым мы определили в пространстве плоскость $z = 75$. Находим линию уровня при $z = 75$:
- $100 – x^2 – y^2 = 75$, откуда $x^2 + y^2 = 25$ – уравнение окружности.



$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$
$x^2 + y^2 = 25$
$z = 75.$
z
$z = 100 - x^2 - y^2$
$z = 75$
100
75
0
x
y

- Находя множество линий уровня, строим весь график.



z
100
$z = f(x, y)$
$= 100 - x^2 - y^2$
$f(x, y) = 75$
$f(x, y) = 51$
10
10
y
x
$f(x, y) = 0$

§ 2. Понятие функции трех и более переменных.

- Всякая упорядоченная совокупность действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется точкой n–мерного пространства R^n. Пусть D – некоторое множество точек пространства R^n.

- **<u>Опр</u>.** Если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из области D по некоторому закону f ставится в сответствие вполне определенное число u, то говорят, что u есть *функция n переменных* и пишут

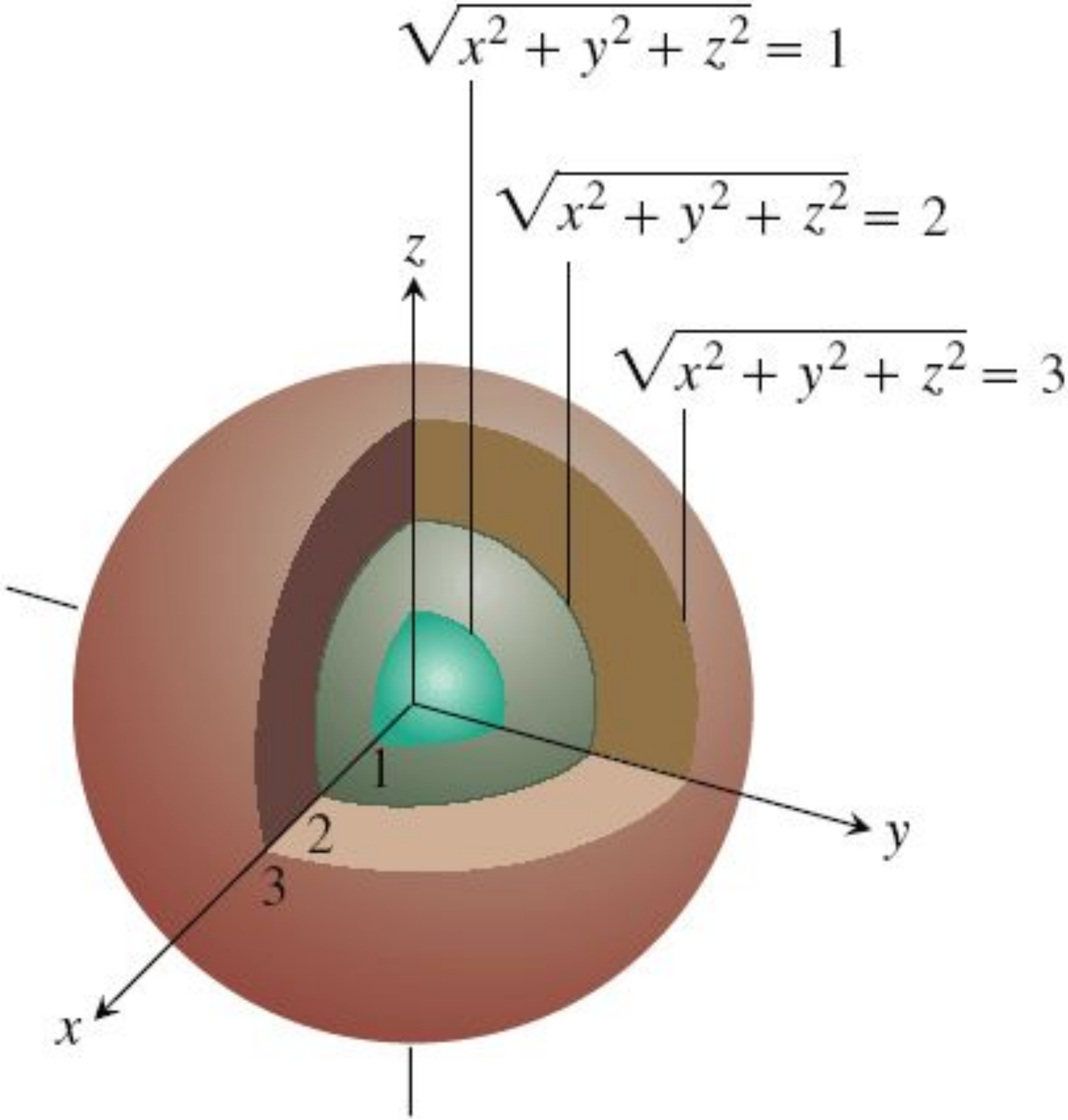
$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ или } u = f(M)$$

где $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка n–мерного пространства.

Примеры

Функция	Обл. опр-ния	Мн-во знач-й
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Все пространство	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	Полупр-тво $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

- **Опр**. Множество точек пространства, в которых функция трех переменных $f(x, y, z)$ принимает одно и то же значение, $f(x, y, z) = c$, называется поверхностью уровня.


$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$
z
y
x
1
2
3

§ 3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

- **<u>Опр</u>.** Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ и $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. При этом пишут

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{M \to M_0} f(M)$$

- **<u>Опр</u>.** Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в *точке* $M_0(x_0, y_0)$, если функция $z = f(x, y)$ определена в этой точке и существует

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

- Аналогичные определения имеют место и для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в случае произвольного числа n переменных.

- Если в какой – либо точке условие непрерывности не выполняется, то эта точка называется *точкой разрыва* функции $f(x, y)$. Это может быть в следующих случаях:

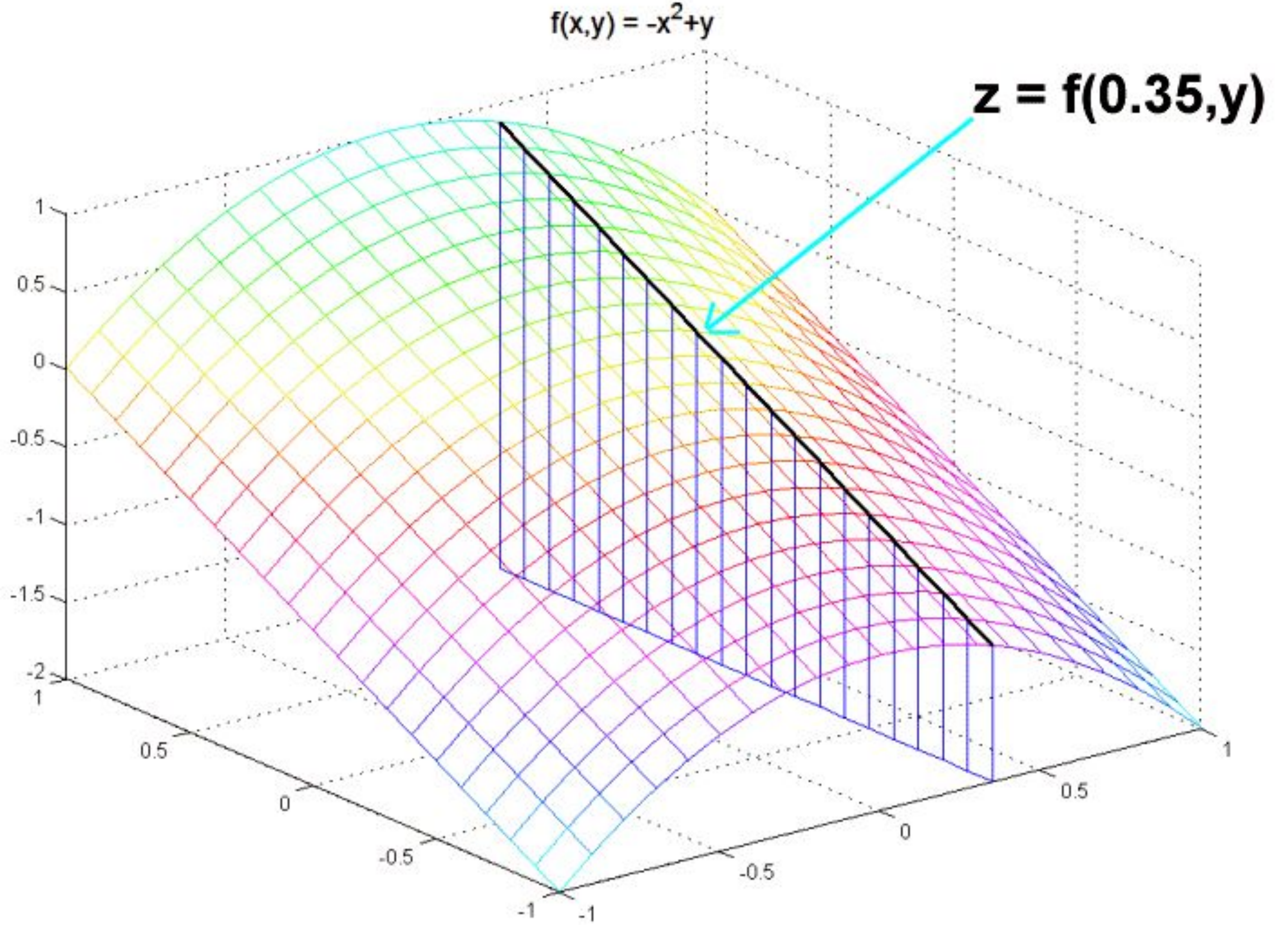
- 1. Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.

- 2. Не существует предел

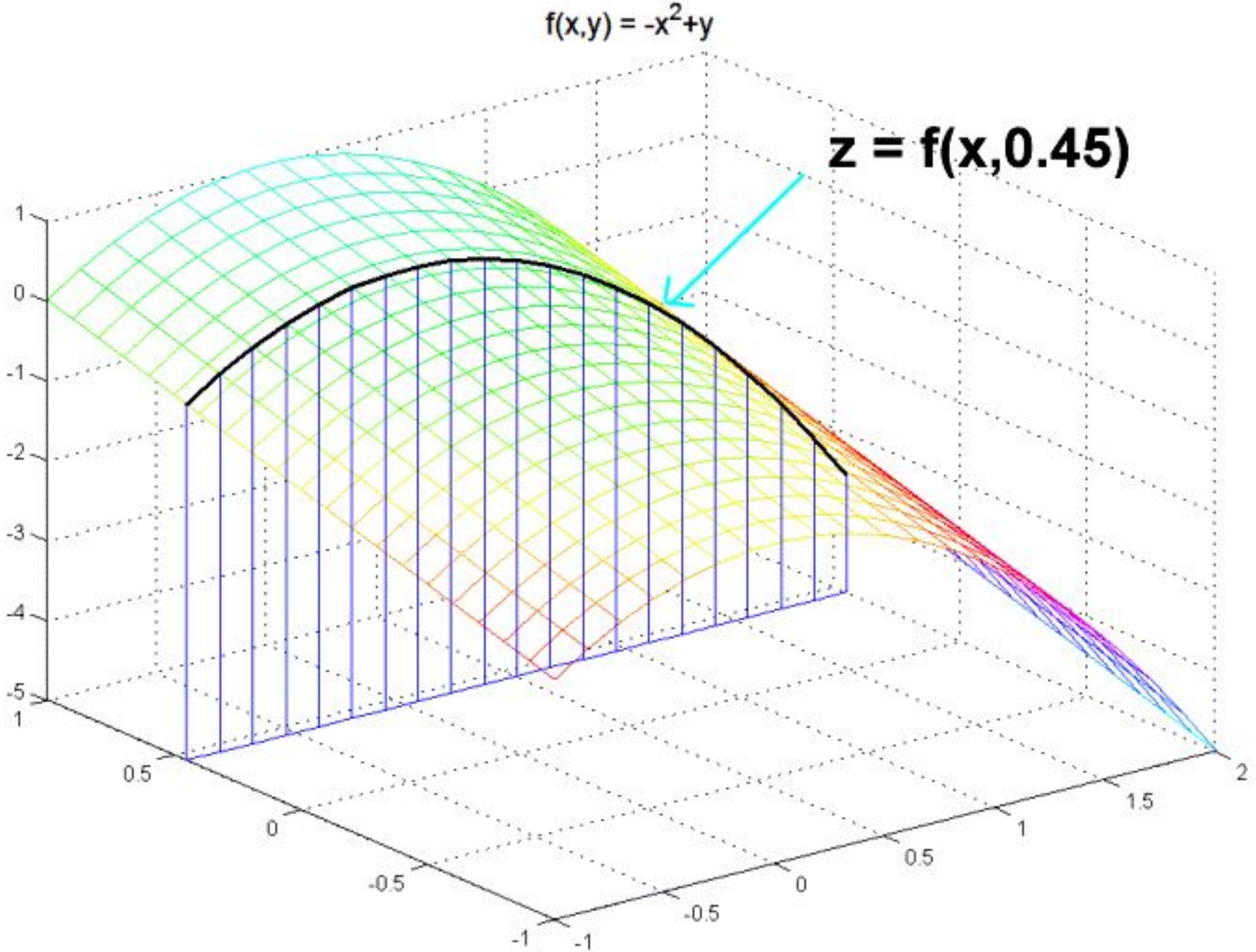
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

- 3. Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

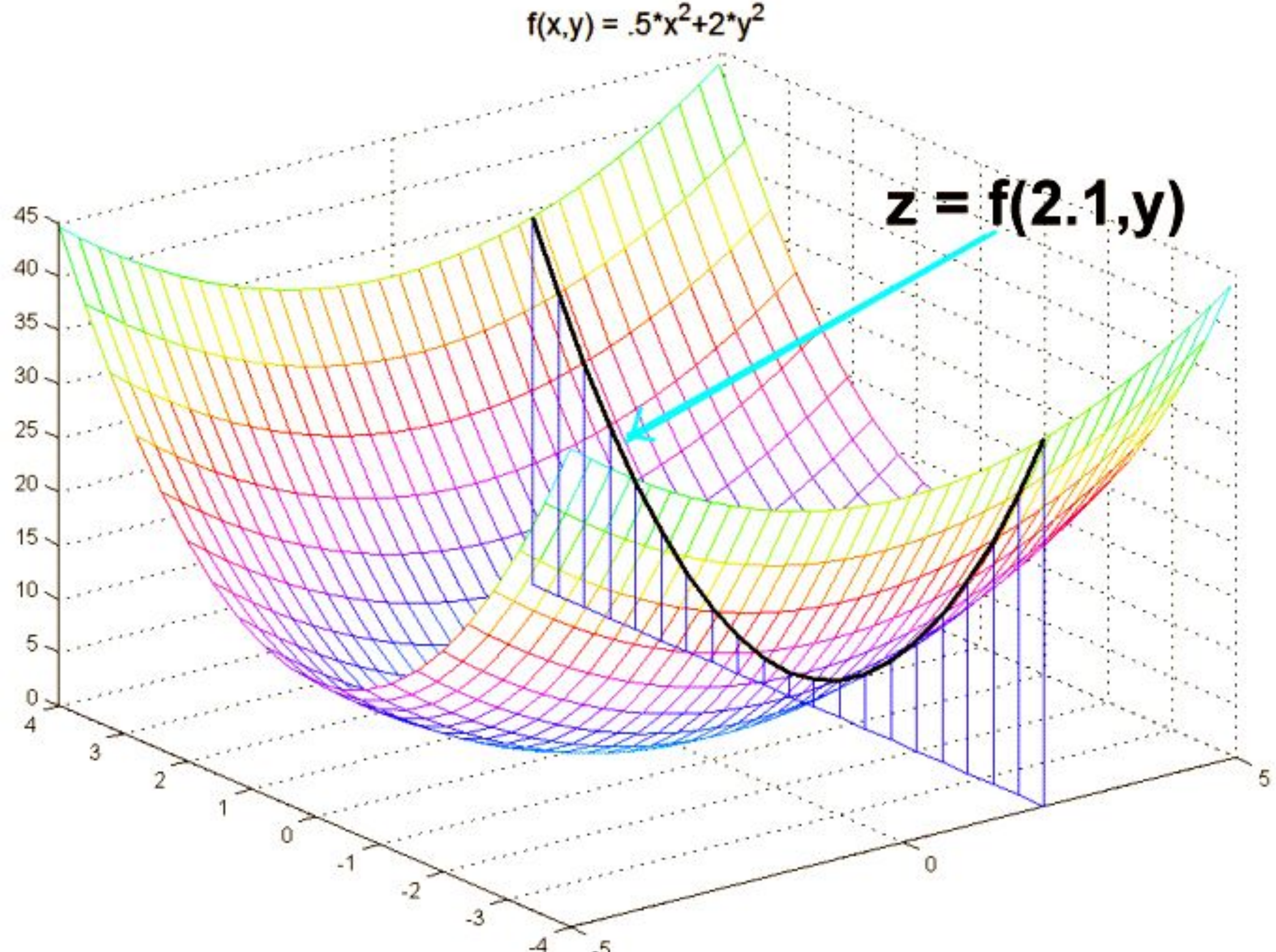
§ 4. Частные производные функции нескольких переменных



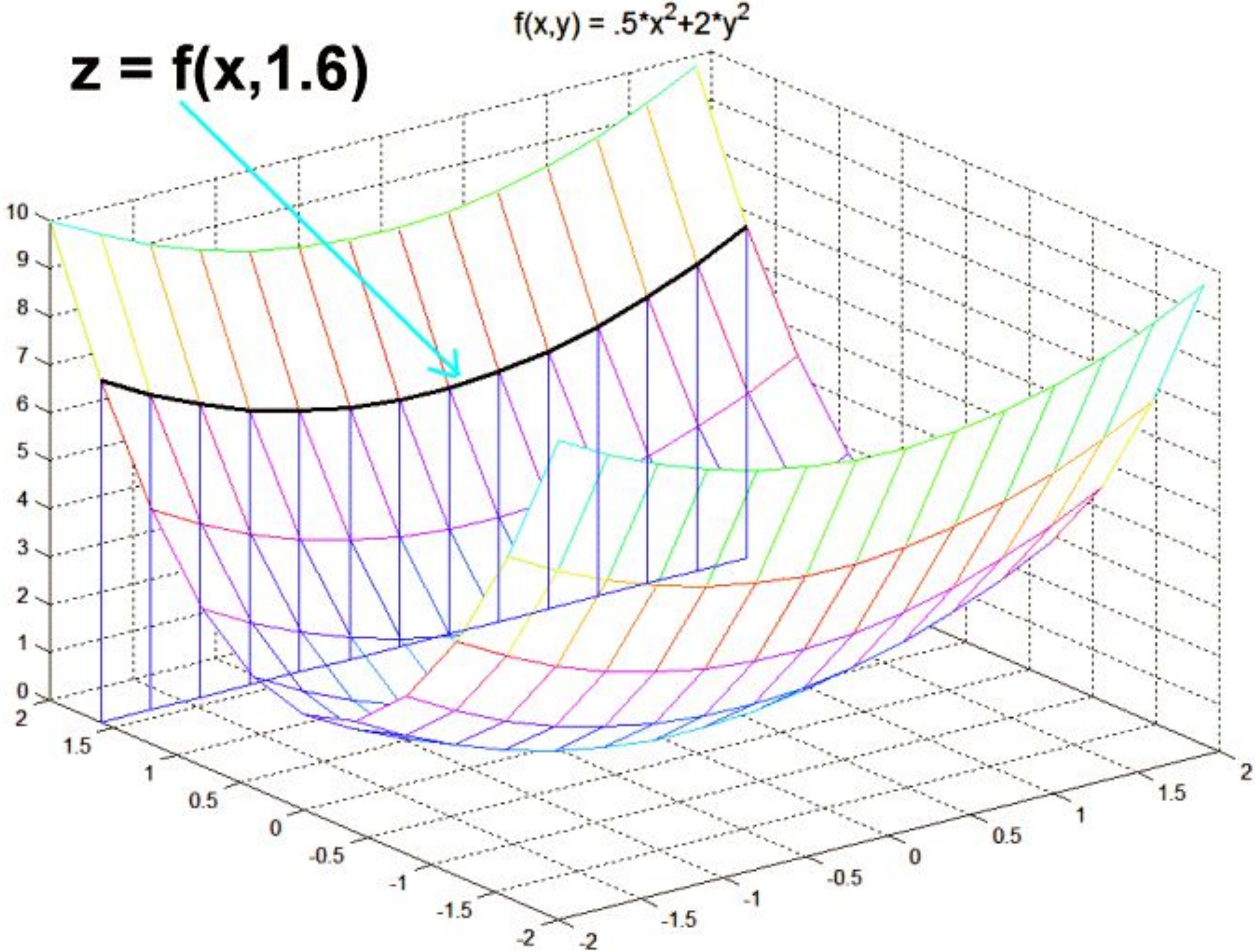
f(x,y) = -x^2+y
z = f(0.35,y)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1



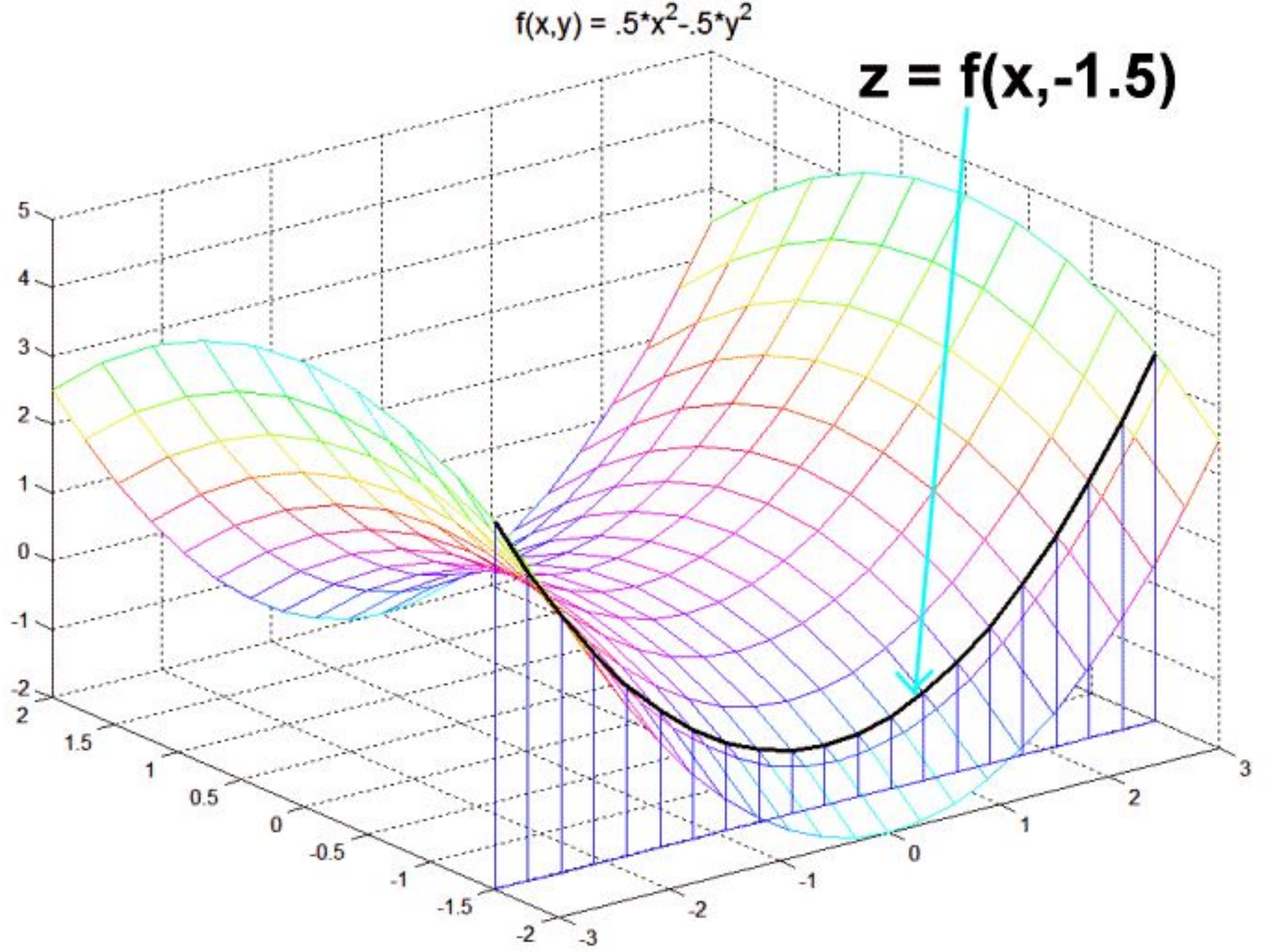
f(x,y) = -x²+y
z = f(x,0.45)
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

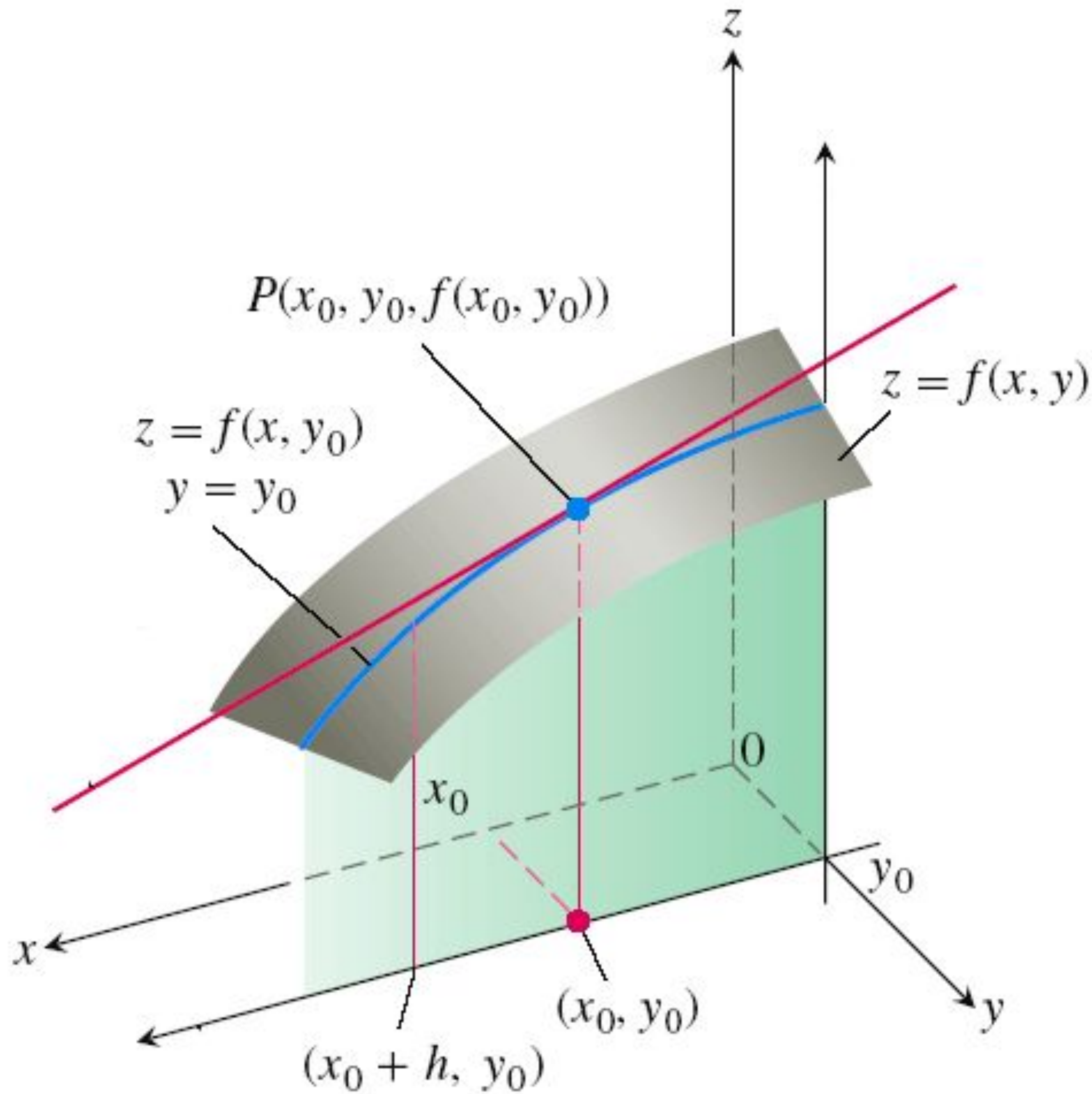


f(x,y) = .5*x^2+2*y^2
z = f(2.1,y)
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
5

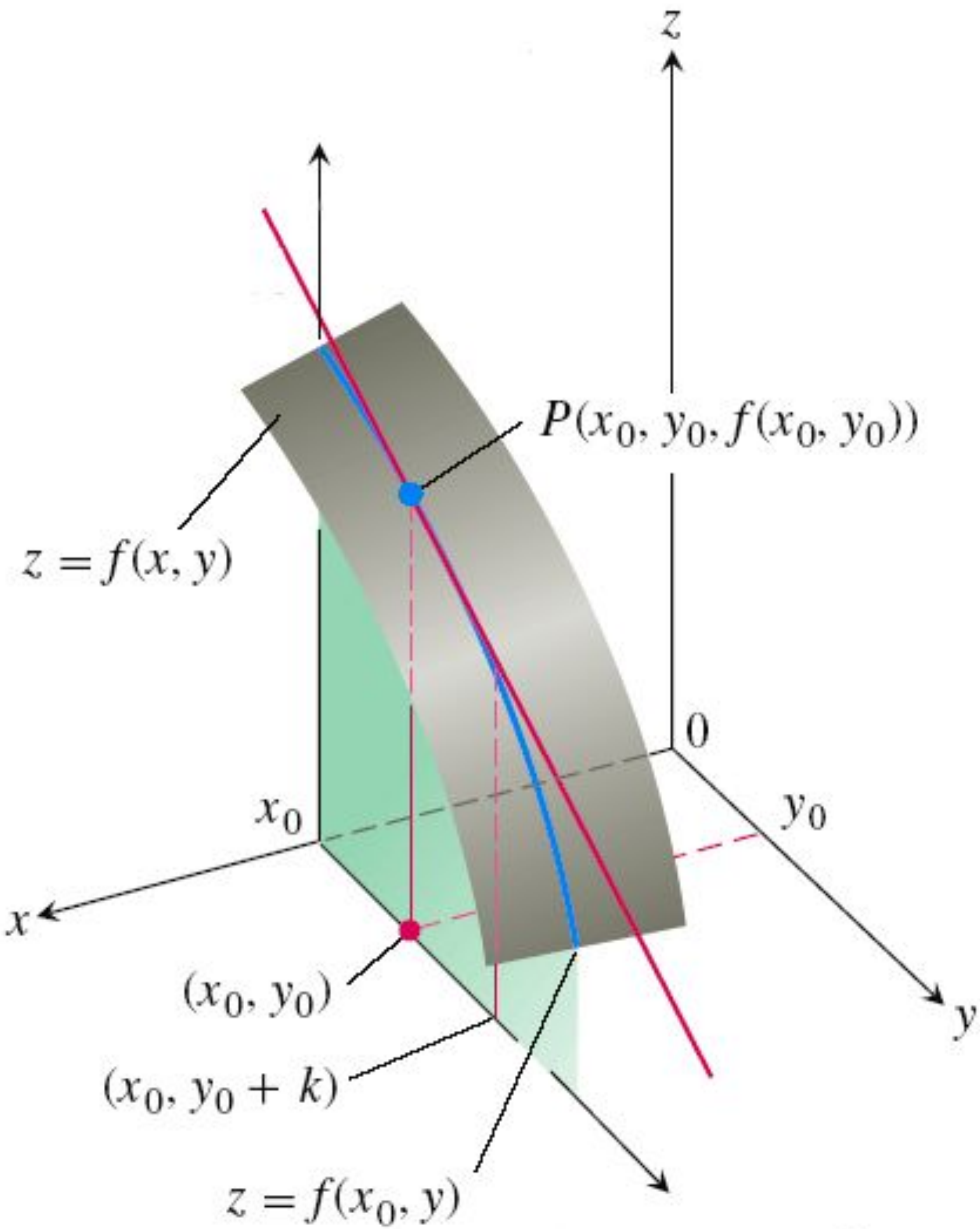


f(x,y) = .5*x^2+2*y^2
z = f(x,1.6)
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

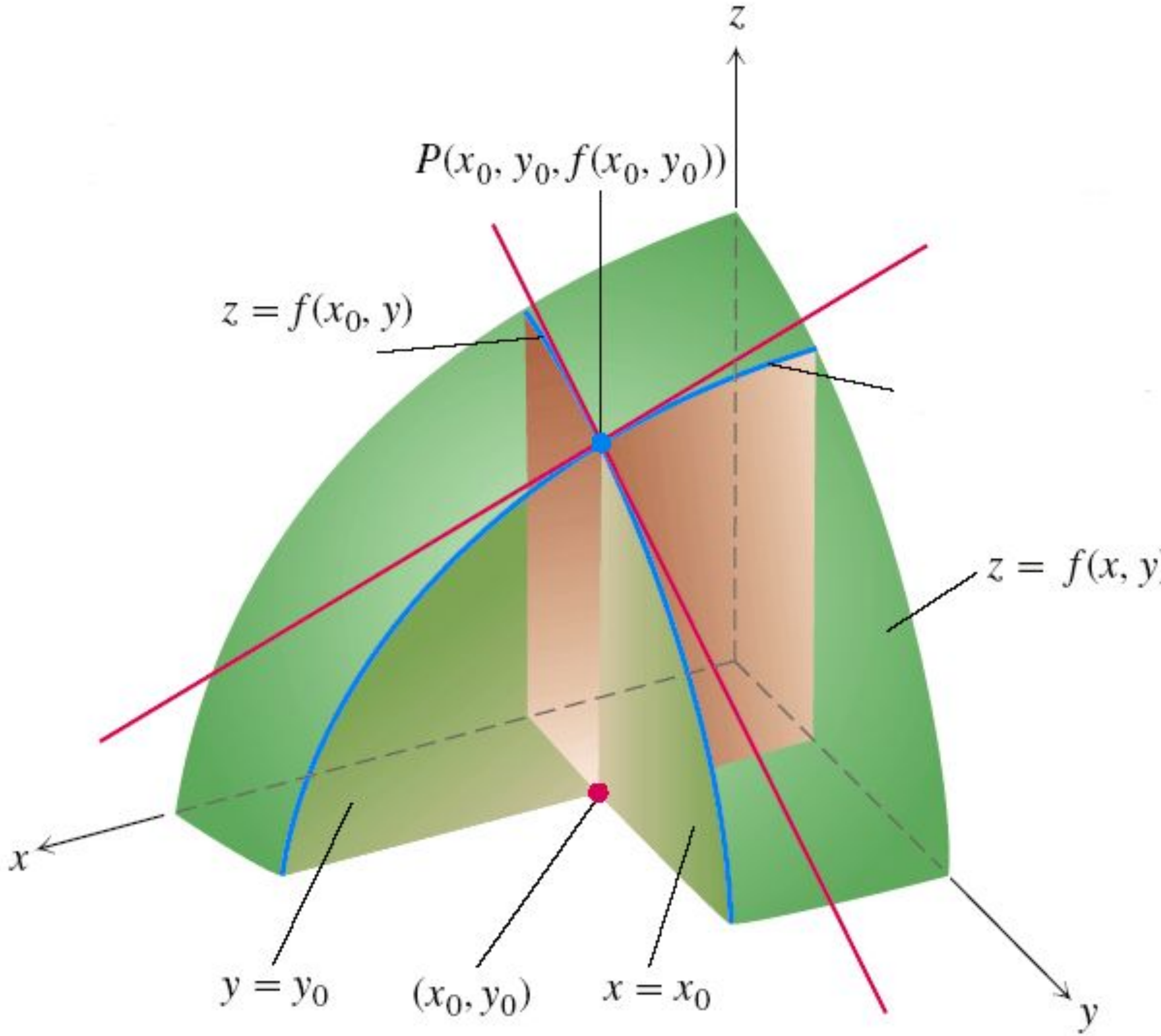

f(x,y) = .5*x^2-.5*y^2
z = f(x,-1.5)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3



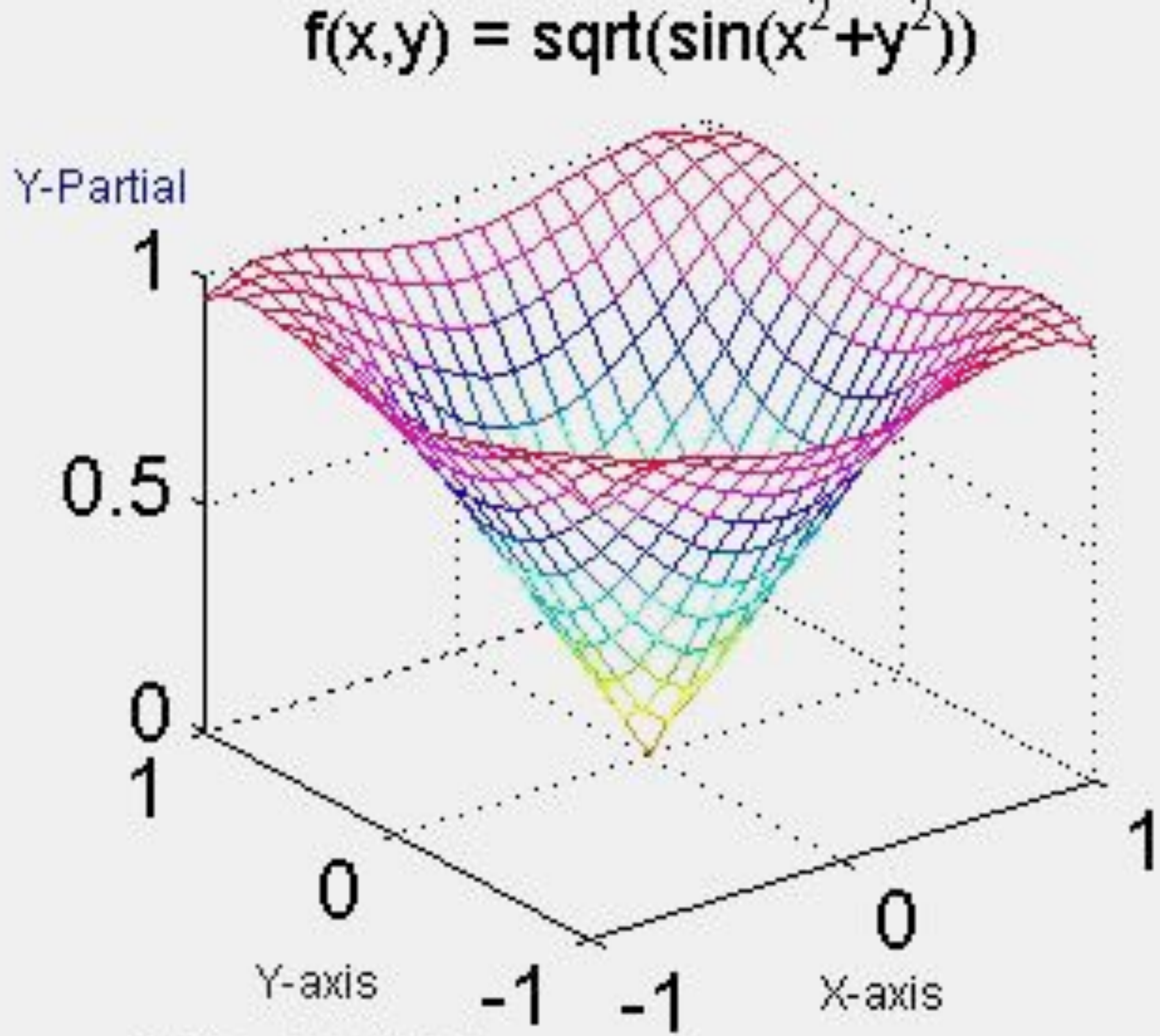
z
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x, y)$
$z = f(x, y_0)$
$y = y_0$
0
x_0
y_0
x
y
(x_0, y_0)
$(x_0 + h,\ y_0)$



z
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x, y)$
0
x_0
y_0
x
y
(x_0, y_0)
$(x_0, y_0 + k)$
$z = f(x_0, y)$



z
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x_0, y)$
$z = f(x, y)$
x
y
$y = y_0$
(x_0, y_0)
$x = x_0$



The surface.

- Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных. Дадим независимой переменной x приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной. Тогда функция z получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

которое называется *частным приращением z по x.*

- Аналогично, если независимой переменной *y* дадим приращение Δ*y*, оставляя при этом неизменной переменную *x*, то функция z получит приращение

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

называемое *частным приращением z по y.*

- **<u>Опр</u>.** *Частной производной по x от функции* z называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.
- Эта производная обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x(x,y).$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

- Аналогично определяется *частная производная от функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_y(x, y).$$

- В общем случае *частной производной первого порядка функции* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_k называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

- Т.к. при вычислении частных производных все переменные, кроме одной, считают постоянными, то для частных производных сохранаяются все правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

- **Пример**. Найти частные производные функции

$$z = x^2 y + \frac{x}{y}$$

- **Решение.** Полагая *y* = const, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}$$

- Полагая *x* = const, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 1 + x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = x^2 - \frac{x}{y^2}$$

- **Пример.** Найти значения частных производных функции

$$u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$$

в точке $M(1, -1, 0)$.

- **Решение.** Полагая *y* = const, *z* = const, находим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y,z=c} = \frac{1}{x^2 + y^2}(2x + 0) + 1 \cdot yz =$$

$$= \left.\frac{2x}{x^2 + y^2} + yz\right|_{\grave{\imath}} = \frac{2}{1+1} + 0 = 1$$

- Аналогично находим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,z=c} = \frac{1}{x^2+y^2}(0+2y)+1\cdot xz =$$

$$= \left.\frac{2y}{x^2+y^2}+xz\right|_M = \frac{-2}{1+1}+0=-1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x,y=c} = 0+1\cdot xy = xy\Big|_M = -1$$

- Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

- Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Будем называть $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ *частными производными 1-го порядка*.

- *Частными производными 2-го порядка* называются частные производные от частных производных 1-го порядка.
- Для функции $z = f(x, y)$ двух переменных можно найти четыре частные производные 2-го порядка, которые обозна-чаются следующим обр-м:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);
\end{aligned}\right\}\ \text{смешанные частные производные}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

- В общем случае смешанные частные производные могут не совпадать, однако для них справедлива теорема:
- **Теорема**. Если смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в некоторой точке *M*(*x*, *y*), то они равны, т. е.

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

- Частными производными *n*–го порядка называются частные производные от частных производных (*n* – 1)–го порядка.
- Их обозначают

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$$

и т. д.

- Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными.

- **Пример.** Найти частные производные 2-го порядка функции

$$z = x^3 y^2 + \sin(xy + 1)$$

- **Решение.** Последовательно находим

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=c} = 3x^2y^2 + y\cos(xy+1);$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=c} = 2x^3y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + y\cos(xy+1)\right)\underset{y=c}{=}$$

$$\underset{y=c}{=} 6xy^2 - y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + y\cos(xy+1)\right)\underset{x=c}{=}$$

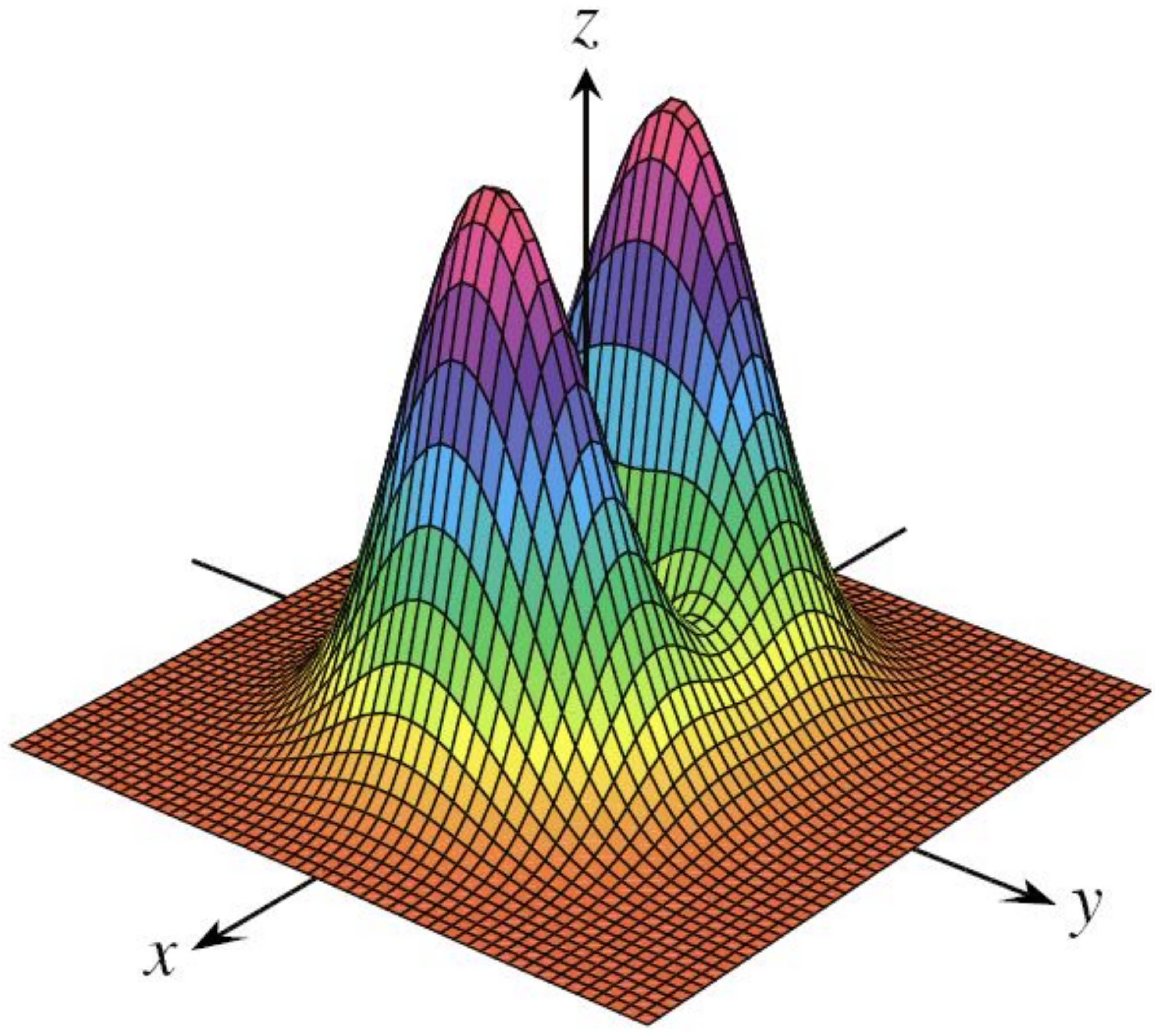
$$\underset{x=c}{=} 6x^2y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

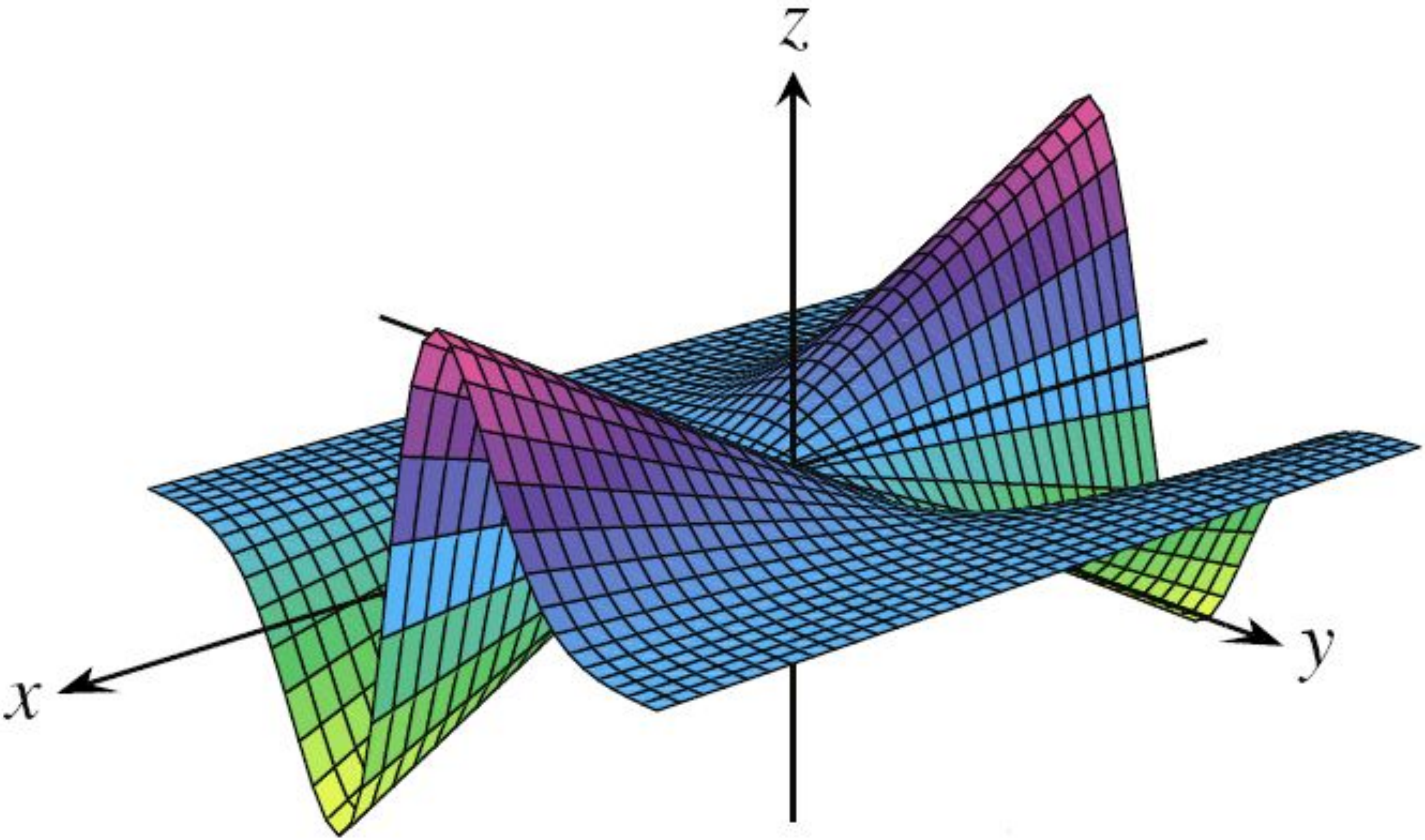
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right)_{y=c} =$$

$$\underset{y=c}{=} 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right)_{x=c} =$$

$$\underset{x=c}{=} 2x^3 - x^2\sin(xy+1)$$


z
x
y


z
x
y