Раздел II. Векторная алгебра

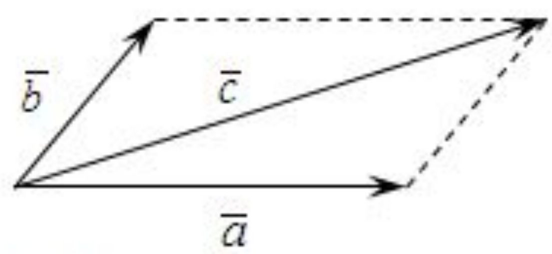
Тема 1-6.
Линейные операции. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов. Базис векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов

Основные определения векторной алгебры

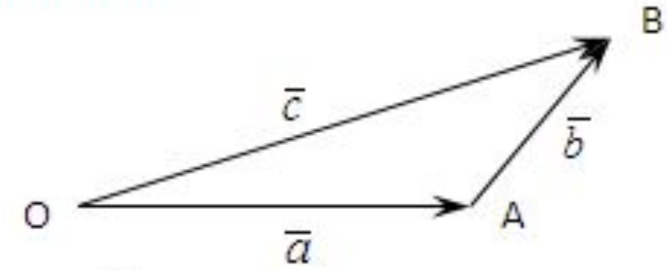
- **Вектором** называется направленный отрезок.
- **Длиной** $|\overline{a}|$ **вектора** $\overline{a}$ называется длина задающего его направленного отрезка.
- **Нулевым вектором** называется вектор нулевой длины.
- **Единичным вектором** называется вектор длины 1.
- Векторы называются **равными**, если равны их длины и они одинаково направлены.
- Векторы называются **коллинеарными,** если они лежат на параллельных прямых.
- Векторы называются **компланарными,** если они параллельны одной плоскости (лежат в одной

Линейные операции

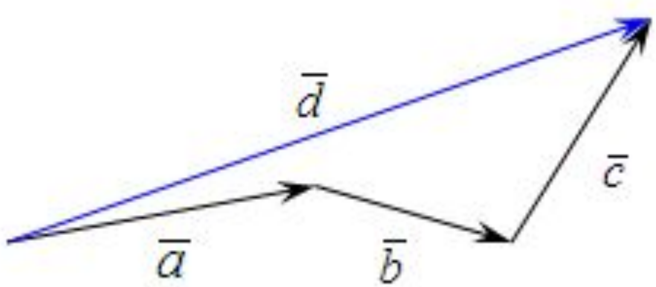
1) Сложение: (первые три правила для векторов компланарных, т.е. лежащих в одной плоскости)



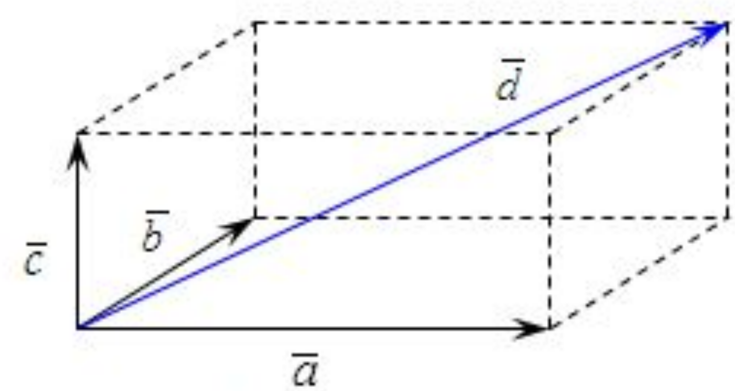
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ (правило параллелограмма)



$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ (правило треугольника)



$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ (правило многоугольника)

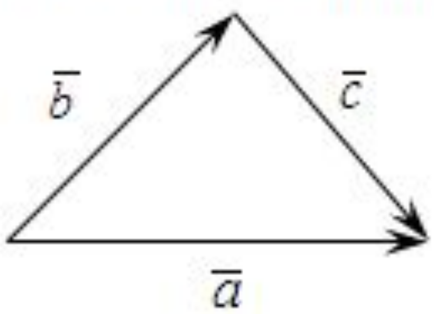


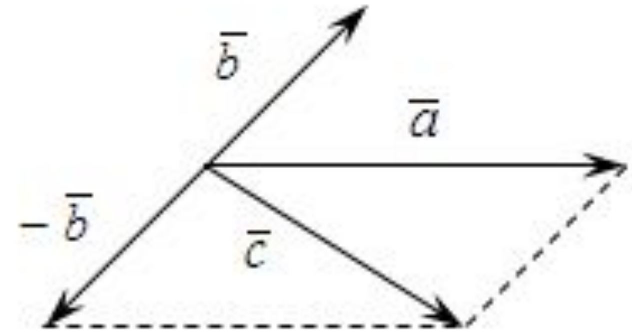
$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ (правило параллепипеда)

Линейные операции

2) Вычитание:

$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, *если* $\overline{a} = \overline{c} + \overline{b}$





3) Умножение на число:

$\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$; $|\overline{b}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$. Если $\lambda < 0$, то векторы коллинеарные ($\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$). Если $\lambda > 0$, то векторы противоположно направленные ($\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$).

Свойства линейных операций

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$

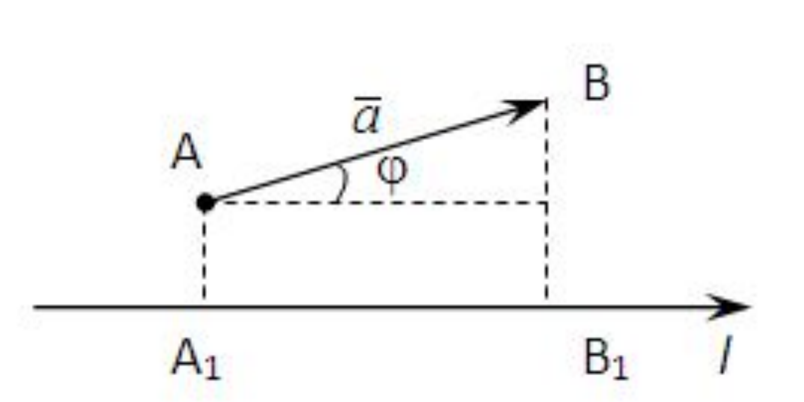
2) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$

3) $\lambda_1(\lambda_2 \cdot \overline{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \overline{a}$

4) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$

5) $\overline{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \overline{a}\lambda_1 + \overline{a}\lambda_2$

Проекция вектора на ось

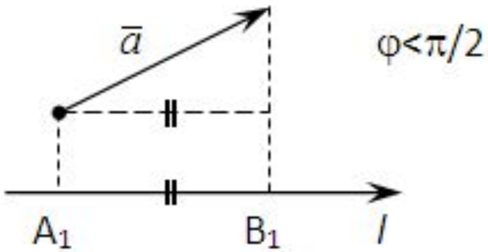


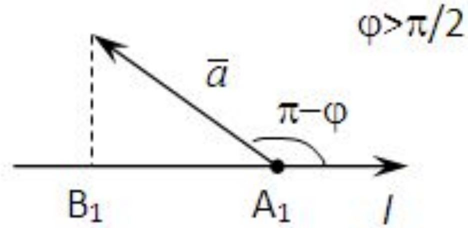
Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется A_1B_1, если $\overline{AB}$ и l сонаправленные, и $-A_1B_1$, если $\overline{AB}$ и l противоположно направленные.

φ – угол между осью и вектором $\overline{AB}$ $(\hat{\bar{l}, \overline{AB}})$.

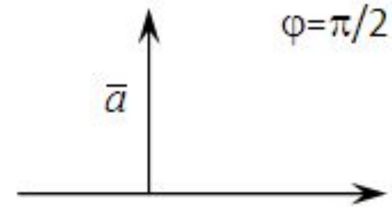
Свойства проекций:

1) Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна длине вектора $\overline{a}$ ($|\overline{a}|$), умноженной на cosφ ($np_l = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$).

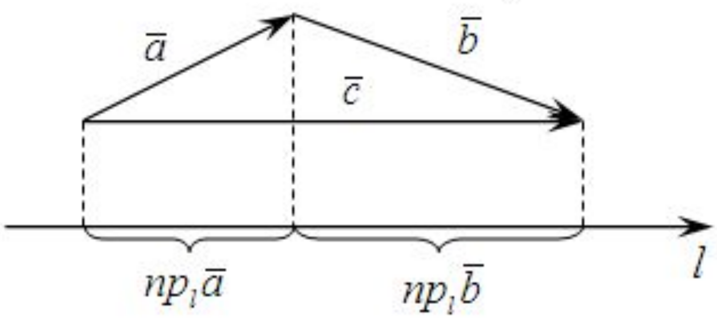




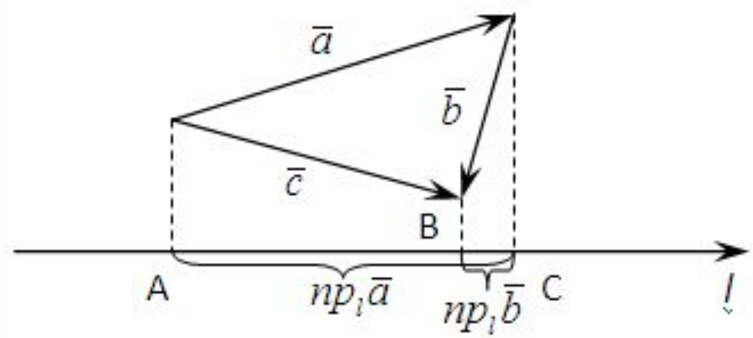
$$np_l\overline{a} = -A_1B_1 = -|\overline{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\overline{a}| \cdot \varphi$$



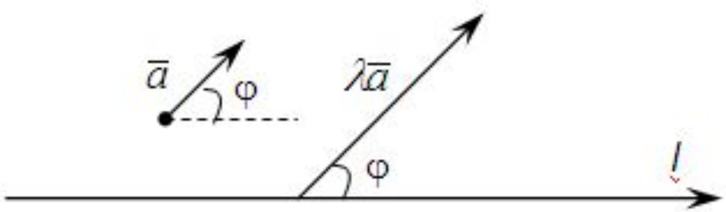
$$np_l\overline{0} = 0 = |\overline{a}| \cdot \cos\frac{\pi}{2}$$



2) $np_l(\overline{a} + \overline{b}) = np_l\overline{a} + np_l\overline{b}; \quad \overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$



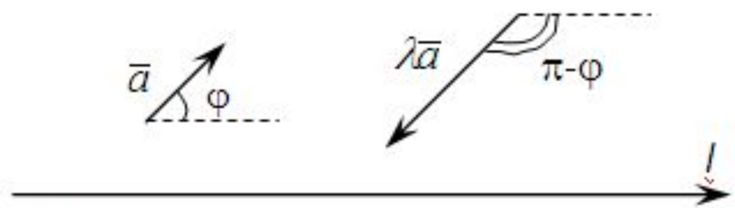
$np_l\overline{a} = AC; \quad np_l\overline{b} = -BC. \quad np_l(\overline{a} + \overline{b}) = AB = AC - BC$



3) Проекция произведения числа на вектор

$$np_l(\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot np_l\overline{a}$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow np_l(\lambda\overline{a}) = |\lambda\overline{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda|\overline{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot np_l\overline{a}$$



$$\lambda < 0 \Rightarrow np_l(\lambda\overline{a}) = |\lambda\overline{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) =$$

$$= |\lambda| \cdot |\overline{a}| \cdot (-\cos\varphi) = -\lambda|\overline{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda|\overline{a}| \cdot \cos\varphi =$$

$$= \lambda \cdot np_l\overline{a}$$

Скалярное произведение векторов

Обозначение: $\overline{a} \cdot \overline{b}$ *или* $(\overline{a}, \overline{b})$

Скалярным произведением векторов называется число $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$, $\varphi = (\overline{a}, \hat{\ } \overline{b})$.

$np_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$ (аналогично можно получить $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b}$).

Свойства скалярного произведения:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2) $\lambda \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = (\lambda \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = (\lambda \cdot \overline{b}) \cdot \overline{a}$

3) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

Доказательство:

$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \cdot (np_{\overline{a}}\overline{b} + np_{\overline{a}}\overline{c}) = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} + |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

4) $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$

Доказательство:

$\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cdot \cos 0^0 = |\overline{a}|^2$

5) $\overline{a} \neq 0$, $\overline{b} \neq 0$

$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

Если скалярное произведение векторов равно нулю, то вектора называют ортогональными.

Скалярное произведение в координатах

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + 0 + a_zb_z;$$

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}$$

Применение скалярного произведения

1) $\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0;\qquad a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$

2) $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b};\quad np_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|},\quad np_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}.$

3) $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

4) Работа постоянной силы:

$\bar{F} = \{F_x; F_y; F_z\};\quad \bar{s} = \{s_x; s_y; s_z\}$

$A = F\cdot s\cdot\cos\varphi = \bar{F}\cdot\bar{s}$

Базис векторов

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что выполняется равенство $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = 0$.

Если равенство выполняется только для $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, то вектора называются ***линейно независимыми***.

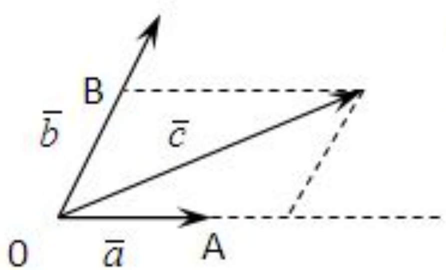
Если вектора линейно зависимые, то один из них можно выразить через другие.

$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = 0$, существует $\lambda_i \neq 0$.

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\lambda_1\bar{a}_1 = -\lambda_2\bar{a}_2 - \ldots - \lambda_n\bar{a}_n$, тогда $\bar{a}_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\bar{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\bar{a}_n$.

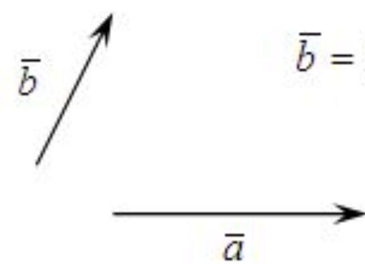
Для двух векторов получим условие коллинеарности $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

На плоскости любые три вектора линейно зависимые, любые два коллинеарных вектора линейно независимые.



$\overline{OA} = \lambda_1\bar{a}, \quad \overline{OB} = \lambda_2\bar{b}$

$\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$

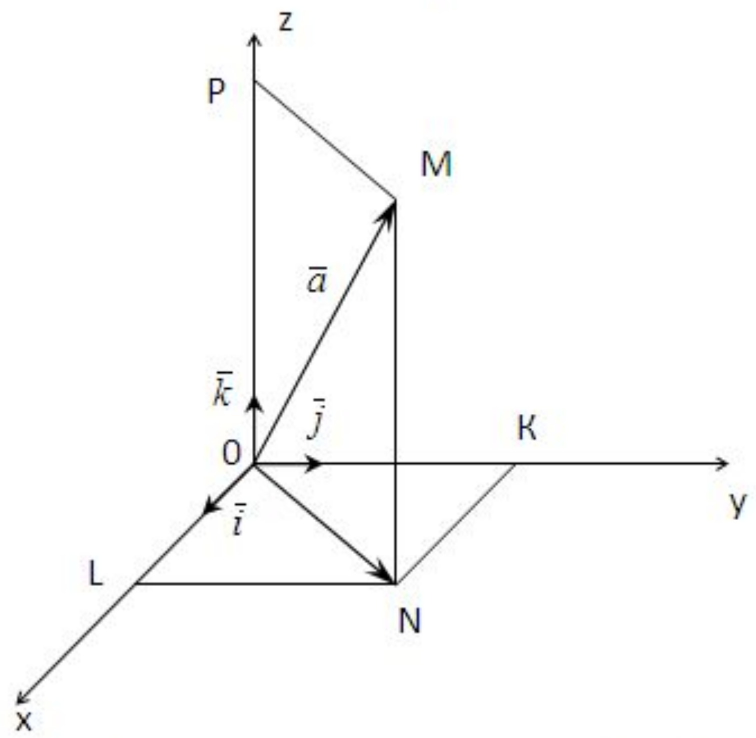


$\bar{b} = \lambda\bar{a}$, *λ – не существует*

В пространстве любые четыре вектора линейно зависимые, любые три компланарных вектора линейно независимые.

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ – образуют **базис**, если они линейно независимые и любой вектор $\bar{b}$ единственным образом можно представить в виде $\bar{b} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n$ (это есть разложение $\bar{b}$ по базису ($\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$), тогда $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ – координата вектора $\bar{b}$ в базисе (a_1, a_2, …, a_n).

Чаще всего пользуются прямоугольным базисом



$\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ – единичные вектора (орты).

Орты направлены по осям и имеют единичную длину: $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$.

$\bar{a}=\overline{OM}=\overline{OL}+\overline{OK}+\overline{OP}=(\overline{ON}+\overline{MN})=$

$=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}.$

a_x, a_y, a_z – прямоугольные координаты вектора $\bar{a}$.

$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ – разложение по ортам.

$\bar{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ – координатная форма записи.

$OM^2=ON^2+NM^2=OL^2+OK^2+NM^2=$

$=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, *значит* $OM=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Линейные операции над векторами:

$\bar{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\quad \bar{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$

$\bar{a}\pm\bar{b}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\pm(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=\bar{i}(a_x\pm b_x)+\bar{j}(a_y\pm b_y)+\bar{k}(a_z\pm b_z)=\{a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z\}$

$\lambda\bar{a}=\{\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z\}$

Направляющие косинусы:

$\alpha=(\bar{a},\hat{\ }\bar{i});\quad \beta=(\bar{a},\hat{\ }\bar{j});\quad \gamma=(\bar{a},\hat{\ }\bar{k});$

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\bar{a}|};\quad \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\bar{a}|};\quad \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\bar{a}|};$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Признак коллинеарности векторов:

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}$$

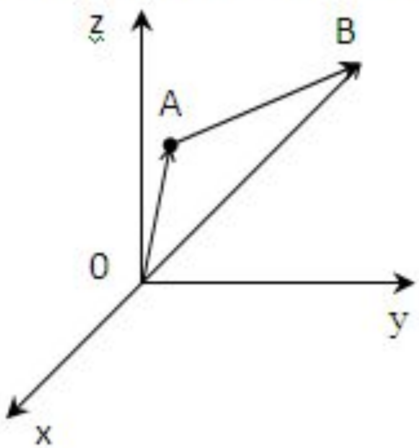
$$\{b_x; b_y; b_z\} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z},$$

$$\begin{cases} b_x = \lambda a_x \\ b_y = \lambda a_y \\ b_z = \lambda a_z \end{cases}$$

Если вектора коллинеарны, то их одноименные координаты пропорциональны.

Координаты $\overline{AB}$ по координатам начала и конца.



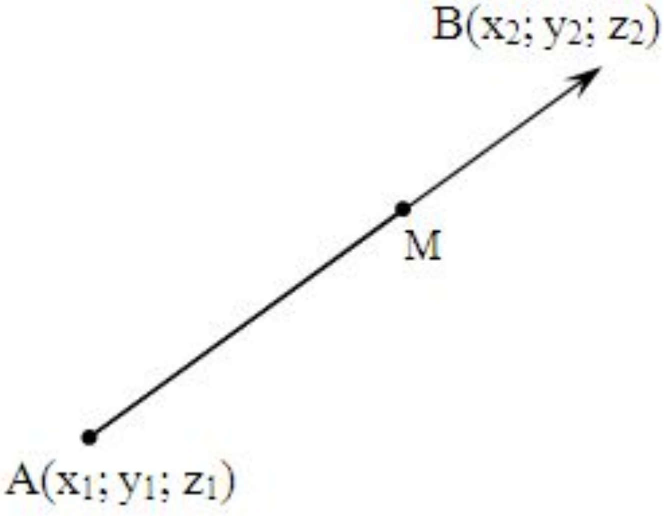
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\};$$

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала.

Деление отрезка в заданном отношении:



Найти M(x; y; z).

$$AM = \lambda \cdot MB; \quad \overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB};$$

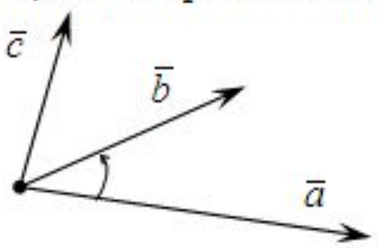
$$\{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\} = \lambda\{x - x_2;\ y - y_2;\ z - z_2\}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \\ z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

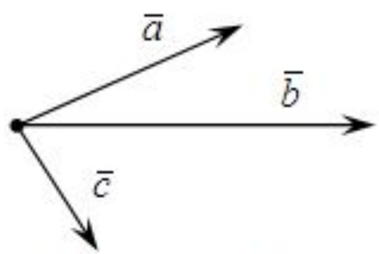
Векторное произведение векторов

Обозначение: $\bar{a}\times\bar{b}$ *или* $[\bar{a},\bar{b}]$.

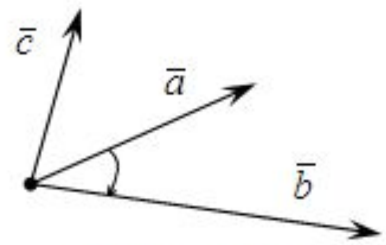
Вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, иначе тройка левая.



Правая тройка



Правая тройка



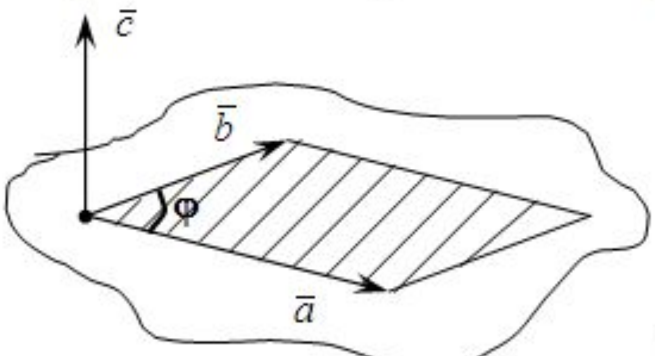
Левая тройка

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обладающий свойствами:

1) $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку;

2) $\bar{c}\perp\bar{a},\ \bar{c}\perp\bar{b}$;

3) величина вектора $\bar{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



$$|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$$

Свойства $\overline{a} \times \overline{b}$ **:**

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (тройка станет не левой, а правой)

2) $\lambda \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda \cdot \overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda \cdot \overline{b})$

3) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$

4) $\overline{a} \neq 0,\ \overline{b} \neq 0;\quad \overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$

Применение $\overline{a} \times \overline{b}$ **:**

1) $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = 0$

2) $S_{параллелограмма} = |\overline{a} \times \overline{b}|;\quad S_{треугольника} = \frac{1}{2} |\overline{a} \times \overline{b}|$

Векторное произведение в координатах:

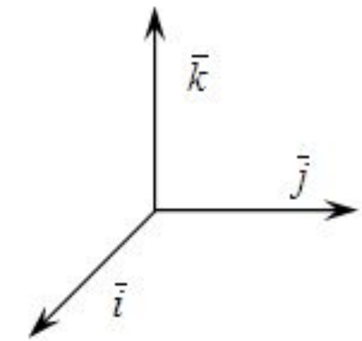
	$\bar i$	$\bar j$	$\bar k$
$\bar i$	0	$\bar k$	$-\bar j$
$\bar j$	$-\bar k$	0	$\bar i$
$\bar k$	$\bar j$	$-\bar i$	0

$$\overset{+}{\longrightarrow}$$

$$\bar i \quad \bar j \quad \bar k \quad \bar i \quad \bar j$$

$$\underset{-}{\longleftarrow}$$

$$|\bar i \times \bar j| = |\bar i| \cdot |\bar j| \cdot \sin 90^\circ = 1$$



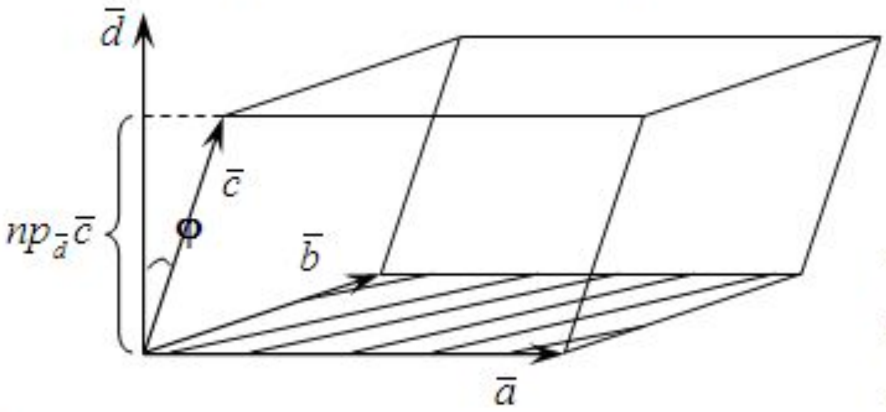
$$\bar a \times \bar b = (a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k) \times (b_x \bar i + b_y \bar j + b_z \bar k) = 0 + a_x b_y \bar k - a_x b_z \bar j - a_y b_x \bar k + 0 + a_y b_z \bar i + a_z b_x \bar j - a_z b_y \bar i + 0 =$$

$$= \bar i (a_y b_z - a_z b_y) - \bar j (a_x b_z - a_z b_x) + \bar k (a_x b_y - a_y b_x) = \bar i \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar a \times \bar b$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов называется число $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$.



$$\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$$

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\varphi = |\bar{d}| \cdot np_{\bar{d}}\bar{c} =$$

$$= S(\pm H) = \pm V$$

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллепипеда, построенного на этих векторах, взятого со знаком «+», если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку, и со знаком «–», если левую.

Свойства $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$:

1) Смешанное произведение векторов не изменится при круговой перестановке сомножителей и меняет знак при перестановке двух соседних множителей.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}$$

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = \ldots$$

2) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \neq 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$.

Применение смешанного произведения:

1) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0 \Leftrightarrow a, b, c -$ *компланарные*;

2) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарны, а значит, образуют базис, если $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \neq 0$;

3) $V_{\text{параллелепипеда}} = |\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,|$; $\quad V_{\text{пирамиды}} = \dfrac{1}{6}|\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,|$;

4) Ориентация:

$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} > 0$, то $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ – правая тройка,

$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} < 0$, то $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ – левая тройка.

Смешанное произведение векторов в координатах:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b})\,\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}) = (\overline{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) - \overline{j} \cdot (a_x b_z - a_z b_x) + \overline{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x)) \cdot$$

$$\cdot (c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot c_x - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot c_y + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}.$$

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Примеры вычисления длины вектора

Пример. Найти длину вектора a = {2; 4; 4}.

Решение: $|a| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Определение равенства векторов

Пример. При каком значении параметра n вектора a = {1; 2; 4} и b = {1; 2; 2n} равны.

Решение:

Проверим равенство компонентов векторов

$a_x = b_x = 1$

$a_y = b_y = 2$

$a_z = b_z \Rightarrow 4 = 2n \Rightarrow n = 4/2 = 2$

Ответ: при n = 2 вектора a и b равны.

Пример умножения вектора на число

Пример . Найти произведение вектора a = {1; 2} на 3.

Решение: $3 \cdot a = \{3 \cdot 1; 3 \cdot 2\} = \{3; 6\}$.

Примеры на сложение (вычитание) векторов

Пример 1. Найти сумму векторов a = {1; 2} и b = {4; 8}.

Решение: $a + b = \{1 + 4; 2 + 8\} = \{5; 10\}$

Примеры вычисления проекции вектора

Пример. Найти проекцию вектора a = {1; 4; 0} на вектор b = {4; 2; 4}.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов

a · b = 1 · 4 + 4 · 2 + 0 · 4 = 4 + 8 + 0 = 12

Найдем модуль вектора b

|b| = $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{14 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$

Найдем проекцию вектора a на вектор b $\quad \text{Пр}_{b} a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{12}{6} = 2$

Примеры вычисления скалярного произведения векторов

Пример . Найти скалярное произведение векторов a = {1; 2; -5} и b = {4; 8; 1}.

Решение: a · b = 1 · 4 + 2 · 8 + (-5) · 1 = 4 + 16 - 5 = 15.

Пример . Найти скалярное произведение векторов a и b, если их длины |a| = 3, |b| = 6, а угол между векторами равен 60˚.

Решение: a · b = |a| · |b| cos α = 3 · 6 · cos 60˚ = 9.

<u>*Вычисление угла между векторами*</u>

Пример. Найти угол между векторами a = {3; 4; 0} и b = {4; 4; 2}.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

a·b = 3 · 4 + 4 · 4 + 0 · 2 = 12 + 16 + 0 = 28.

Найдем модули векторов:

$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|b| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$

Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15}$$

<u>*Примеры задач с направляющими косинусами вектора*</u>

Пример. Найти направляющие косинусы вектора a = {3; 4}.

Решение:

Найдем модуль вектора a:

$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

Найдем направляющие косинусы вектора a:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Определение линейной зависимости

Пример. Проверить будут ли вектора a = {1; 1; 1}, b = {1; 2; 0}, c = {0; -1; 1} линейно независимыми.

Решение: Найдем значения коэффициентов при котором линейная комбинация этих векторов будет равна нулевому вектору.

$x_1a + x_2b + x_3c_1 = 0$

Это векторное уравнение можно записать в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему используя метод Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

из второй строки вычтем первую; из третей строки вычтем первую:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 2-1 & -1-0 & 0-0 \\ 1-1 & 0-1 & 1-0 & 0-0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

из первой строки вычтем вторую; к третей строке добавим вторую:

$$\sim \begin{pmatrix} 1-0 & 1-1 & 0-(-1) & 0-0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0+0 & -1+1 & 1+(-1) & 0+0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Данное решение показывает, что система имеет множество решений, то есть существует не нулевая комбинация значений чисел x_1, x_2, x_3 таких, что линейная комбинация векторов a, b, c равна нулевому вектору, например: -a + b + c = 0, а это значит вектора a, b, c линейно зависимы.

Коллинеарность векторов

Пример. найти значение параметра n при котором вектора a = {3; 2} и b = {9; n} коллинеарны.

Решение: Так как вектора не содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся вторым условием коллинеарности

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

Значит:

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{n}.$$

Решим это уравнение:

$$n = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$$

Ответ: вектора a и b коллинеарны при n = 6.

Пример. Какие из векторов a = {1; 2; 3}, b = {4; 8; 12}, c = {5; 10; 12} коллинеарны?

Решение: Так как вектора не содержат компоненты равные нулю, то воспользуемся вторым условием коллинеарности, которое в случае пространственной задачи для векторов a и b примет вид:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Значит:

Вектора a и b коллинеарны т.к. $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$.

Вектора a и c не коллинеарны т.к. $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \neq \frac{3}{12}$.

Вектора c и b не коллинеарны т.к. $\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \neq \frac{12}{12}$.

Ортогональность векторов

Пример . Проверить являются ли вектора a = {3; -1} и b = {7; 5} ортогональными.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$a \cdot b = 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 5 = 21 - 5 = 16$

Ответ: так как скалярное произведение не равно нулю, то вектора a и b не ортогональны.

Пример . Найти значение числа n при котором вектора a = {2; 4} и b = {n; 1} будут ортогональны.

Решение:

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$a \cdot b = 2 \cdot n + 4 \cdot 1 = 2n + 4$

$2n + 4 = 0$

$2n = -4$

$n = -2$

Ответ: вектора a и b будут ортогональны при n = -2.

<u>*Вычисление координат*</u>

Пример. Найти координаты вектора AB, если A(1; 4; 5), B(3; 1; 1).

Решение: AB = {3 - 1; 1 - 4; 1 - 5} = {2; -3; -4}.

Пример. Найти координаты точки B вектора AB = {5; 1; 2}, если координаты точки A(3; -4; 3).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \quad => \quad B_x = AB_x + A_x \quad => \quad B_x = 5 + 3 = 8$

$AB_y = B_y - A_y \quad => \quad B_y = AB_y + A_y \quad => \quad B_y = 1 + (-4) = -3$

$AB_z = B_z - A_z \quad => \quad B_z = AB_z + A_z \quad => \quad B_z = 2 + 3 = 5$

Ответ: B(8; -3; 5).

<u>*Вычисление векторного произведения*</u>

Пример. Найти векторное произведение векторов a = {1; 2; 3} и b = {2; 1; -2}.

Решение:

$$a \times b = \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} =$$

$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) + \mathbf{k}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \mathbf{i}(-4 - 3) - \mathbf{j}(-2 - 6) + \mathbf{k}(1 - 4) = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \{-7; 8; -3\}$$

Смешанное произведение векторов

Пример. Найти смешанное произведение векторов a = {1; 2; 3}, b = {1; 1; 1}, c = {1; 2; 1}.

Решение:

$$a \cdot [b \times c] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 - 1\cdot1\cdot3 - 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

Компланарность векторов

Пример. Проверить компланарны ли три вектора a = {1; 2; 3}, b = {1; 1; 1}, c = {1; 2; 1}.

Решение: найдем смешанное произведение векторов

$$a \cdot [b \times c] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 - 1\cdot1\cdot3 - 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

Ответ: вектора не компланарны так, как их смешанное произведение не равно нулю.

Базис векторов

Пример. Даны векторы $\overline{a}_1(4;1;4), \overline{a}_2(-2;-1;1), \overline{a}_3(3;1;5), \overline{b}(-3;-2;1)$. Показать, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

Решение: Сначала разбираемся с условием. По условию даны четыре вектора, и, как видите, у них уже есть координаты в некотором базисе. Какой это базис – нас не интересует. А интересует следующая вещь: три вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ вполне могут образовывать новый базис. И первый этап: необходимо проверить, действительно ли векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ линейно независимы:

Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-5-1) + 2 \cdot (5-4) + 3 \cdot (1+4) = -24 + 2 + 15 = -7 \neq 0$$, значит, векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ линейно независимы и образуют базис трехмерного пространства.

! Важно: *координаты векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ *обязательно записываем в столбцы определителя, а не в строки. Иначе будет путаница в дальнейшем алгоритме решения.*

Теперь вспомним теоретическую часть: если векторы $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3$ образуют базис, то любой вектор $\bar{v}$ можно единственным способом разложить по данному базису: $\bar{v} = \alpha \cdot \bar{e}_1 + \beta \cdot \bar{e}_2 + \gamma \cdot \bar{e}_3$, где α, β, γ – координаты вектора в базисе $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$.

Поскольку наши векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис трёхмерного пространства (это уже доказано), то вектор $\bar{b}$ можно единственным образом разложить по данному базису:

$\bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3$, где x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\bar{b}$ в базисе $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.

По условию и требуется найти координаты x_1, x_2, x_3.

Для удобства объяснения поменяем части местами: $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = \bar{b}$. В целях нахождения x_1, x_2, x_3 следует расписать данное равенство покоординатно:

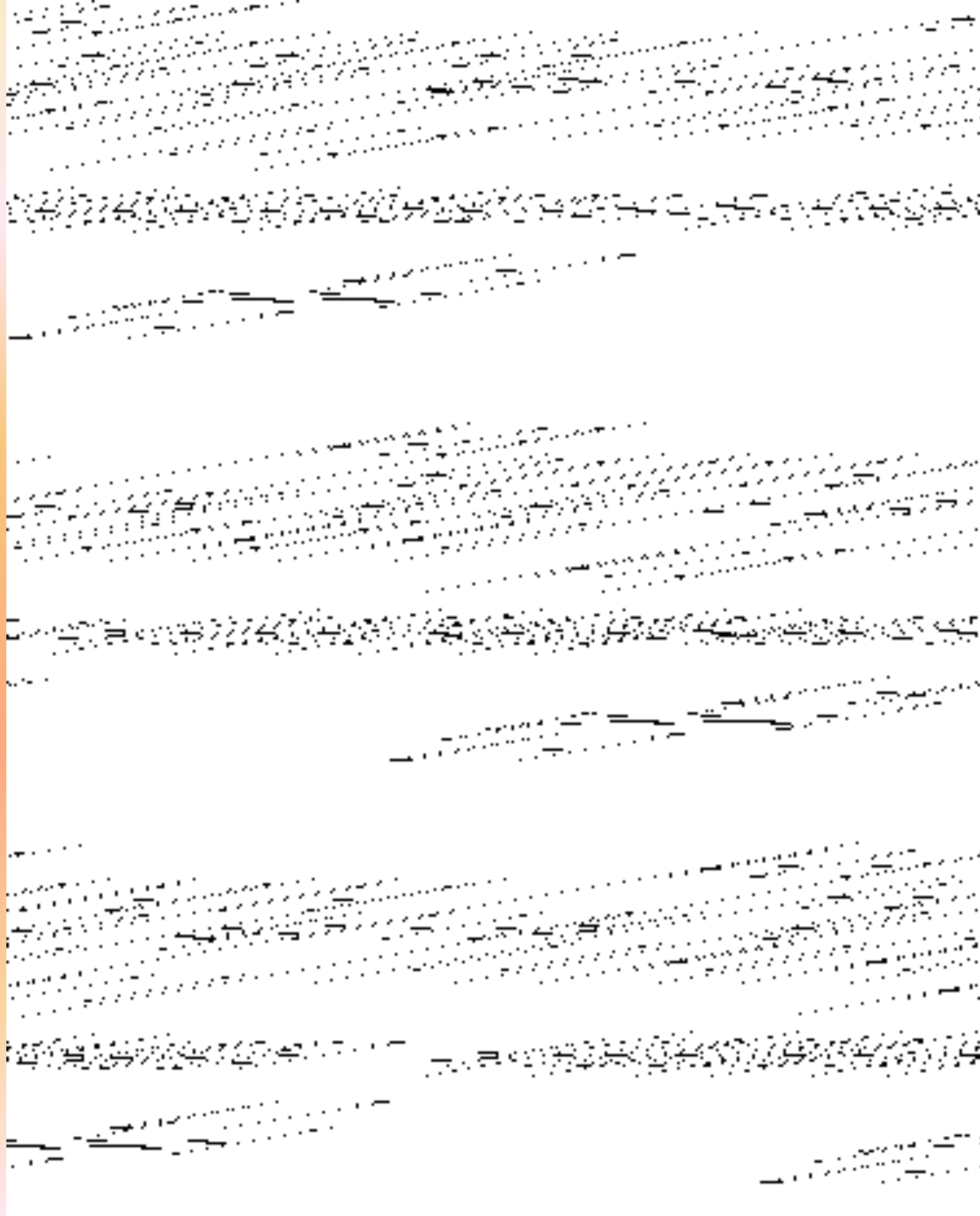
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

По какому принципу расставлены коэффициенты? Все коэффициенты левой части в точности перенесены из определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, в правую часть записаны координаты вектора $\overline{b}(-3; -2; 1)$.

Получилась система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Обычно её решают по формулам Крамера, часто даже в условии задачи есть такое требование.

Главный определитель системы уже найден:

$\Delta = -7 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.



Таким образом:

$\bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = 1 \cdot \bar{a}_1 + 2 \cdot \bar{a}_2 - 1 \cdot \bar{a}_3 = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3$ – разложение вектора $\bar{b}$ по базису $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.

Ответ: $\bar{b} = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3$

Задача носит алгебраический характер. Векторы, которые были рассмотрены – это не обязательно те векторы, которые можно нарисовать в пространстве, а, в первую очередь, абстрактные векторы курса линейной алгебры. Для случая двумерных векторов можно сформулировать и решить аналогичную задачу, решение будет намного проще.