

Лекция 4
Оптимизационные задачи на
сетях

(Управление проектами)



Введение

Проект — особым образом организованный комплекс действий, направленный на достижение определенной цели, выполнение которого ограничено во времени, а также связано с потреблением конкретных финансовых, материальных и трудовых ресурсов.

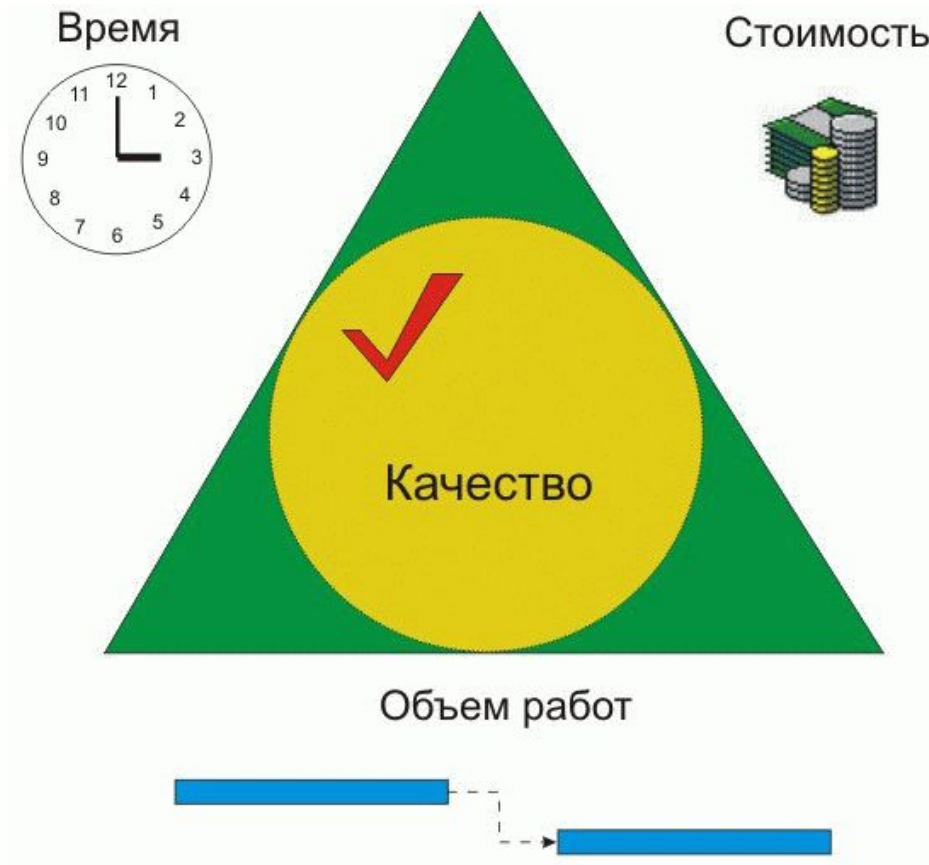
- *Проект* — совокупность работ, которые необходимо выполнить для достижения некоторой цели.
- *Начало проекта* — начало выполнения хотя бы одной из работ
- *Конец проекта* — момент времени, когда все работы завершены
- На работах определено *отношение предшествования*
- Отсутствуют *циклические повторения работ*

Особенности проекта как объекта управления:

- КОМПЛЕКСНОСТЬ
- направленность на достижение целей
- ограниченность по времени и ресурсам
- уникальность

Под *управлением проектом* подразумевается деятельность, направленная на реализацию проекта с *максимально возможной эффективностью* при заданных ограничениях по *времени, ресурсам*, а также качеству конечных результатов проекта

Проектный треугольник



Жизненный цикл проекта

- формулирование проекта
- планирование
- реализация
- завершение

Основные термины

Работа, задача (Activity, Task) – элементарная, неделимая часть комплекса действий, выполняемых при реализации проекта.

Работы характеризуются *длительностью (продолжительностью, временем выполнения, Duration)*, *объемом трудозатрат (Work)* и *стоимостью (Cost)*.

Работы могут выполняться параллельно или последовательно.

Работы могут объединяться в *группы (фазы, Phases)*.

Работы, выполнение которых приводит к достижению важного результата или завершает фазу, называются *вехами (Milestones)*.

Для выполнения работ необходимы *ресурсы (Resources)*: люди, оборудование и материалы.

Ресурсы характеризуются *рабочим временем (Working Time)* и *стоимостью (Cost)*.

Выделение ресурса работе называется *назначением (Assignment)*. У работы может быть неограниченное число назначений.

Работы связаны друг с другом *зависимостями* (*связями, Dependences*), определяющими порядок их выполнения относительно друг друга.

Все работы по проекту объединяются в *график работ* (*календарный план, Schedule*).


Работы, задержка выполнения которых может отразиться на сроках выполнения проекта, называются *критическими работами* (*Critical Tasks*).

Критические работы образуют *критический путь* (*Critical Path*). Продолжительность критического пути определяет продолжительность проекта.

Сетевое планирование и управление (СПУ)

- 1956 г. Фирмы «Дюпон» и «Ремингтон Рэнд» – *Critical Path Method (CPM)*
- 1958 г. Корпорация «Локхид» и консалтинговая фирма «Буз, Аллен энд Гамильтон» – *Program Evaluation and Review Technique (PERT)*
- 1960 гг. Министерство обороны СССР

Системы управления проектами



**Системы начального
уровня (до \$1000)**

- Microsoft Project
- Time Line
- SureTrak Project Manager

**Профессиональные
системы (\$1000 и выше)**

- Primavera Project Planner
- Open Plan
- Spider Project



Сетевые графики

Проект удобно представлять в виде *сетевого графика* – ориентированного графа, представляющего собой совокупность *вершин (точек, Nodes)*, соединенных между собой *дугами (направленными отрезками линий, Arrows)*.

Виды сетевых графиков:

- с работами на дугах (*Activities on Arrows, AoA*), «события – работы»
- с работами на вершинах (*Activities on Nodes, AoN*), «работы – связи»

Сетевые графики

Сетевые графики состоят из двух типов элементов: *работ* (представляются дугами) и *событий* (представляются вершинами).

Виды работ:

- действительные работы
- ожидания
- фиктивные работы

Событие – это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. У любой работы есть *начальное* и *конечное* события.

Правила построения сетевых графиков

1. На графике должно быть только одно *исходное* и одно *завершающее* событие.
2. На графике не должно быть замкнутых контуров и *петель* – работ, соединяющих события с ними же самими.
3. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой.

Путем называется любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Полными путями называются пути, начало которых совпадает с исходным событием сетевого графика, а конец – с завершающим.

Критическим путем называется полный путь наибольшей продолжительности $t_{кр}$.

[Переход](#)

Пример. Проект строительства склада

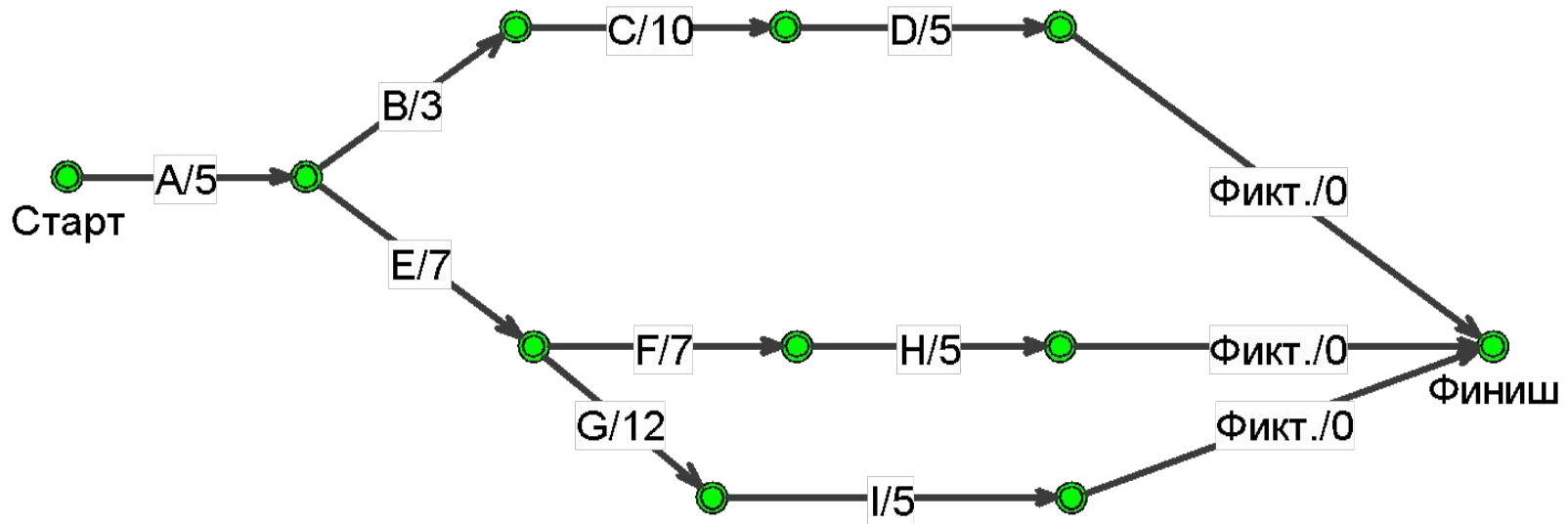
№	Наименование работы	Предшествующие работы	Время выполнения, $t(i, j)$, дней
A	Монтаж металлоконструкций нижней обвязки каркаса	–	5
B	Устройство бетона под стойки	A	3
C	Монтаж стоек	B	10
D	Монтаж опорных столиков	C	5
E	Монтаж балок	A	7
F	Монтаж металлоконструкций ворот	E	7
G	Обшивка стен и кровли волнистым листом	E	12
H	Монтаж козлового крана	F	5
I	Устройство асфальтобетонных покрытий	G	5

Сетевые графики

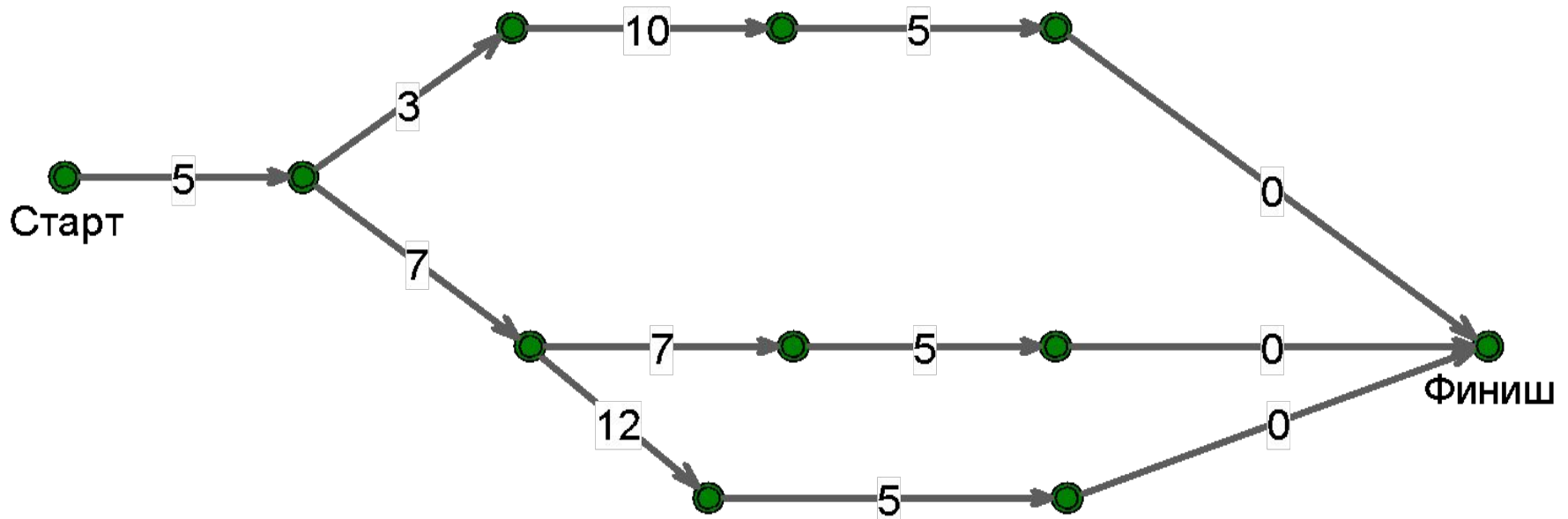
Сетевые графики состоят из двух типов элементов: *работ* (представляются ориентированными дугами) и *событий* (представляются вершинами сети)

Сетевой график проекта строительства склада

[Переход](#)



Какой путь самый длинный?



Работы на критическом пути

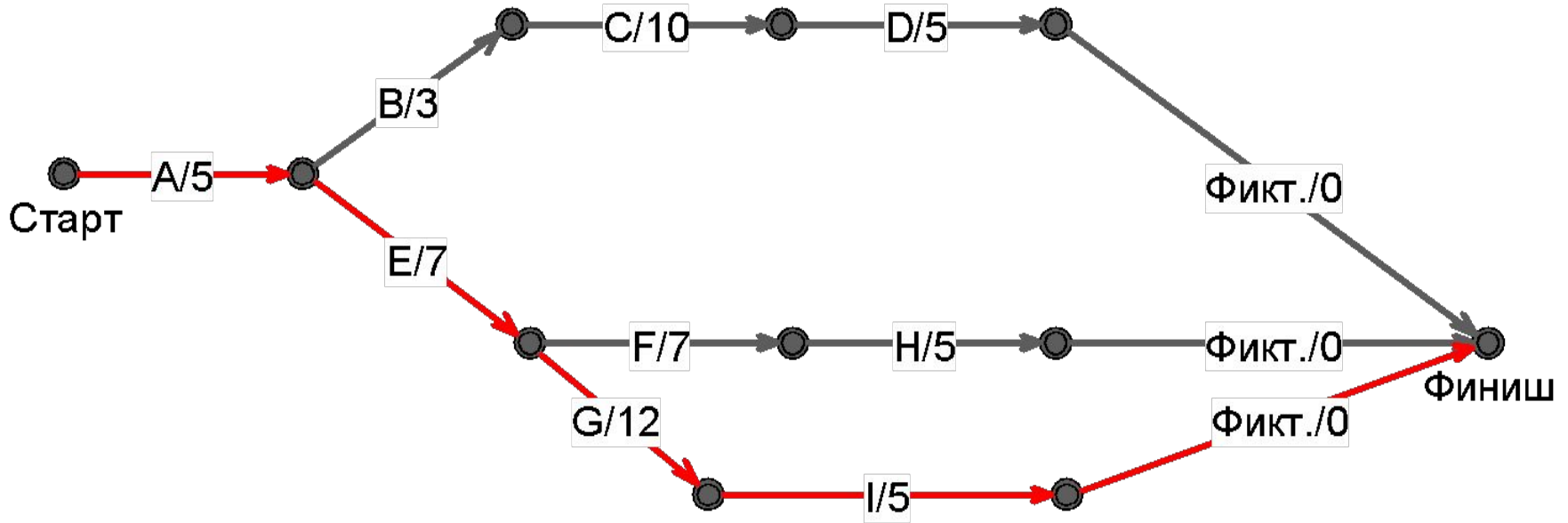
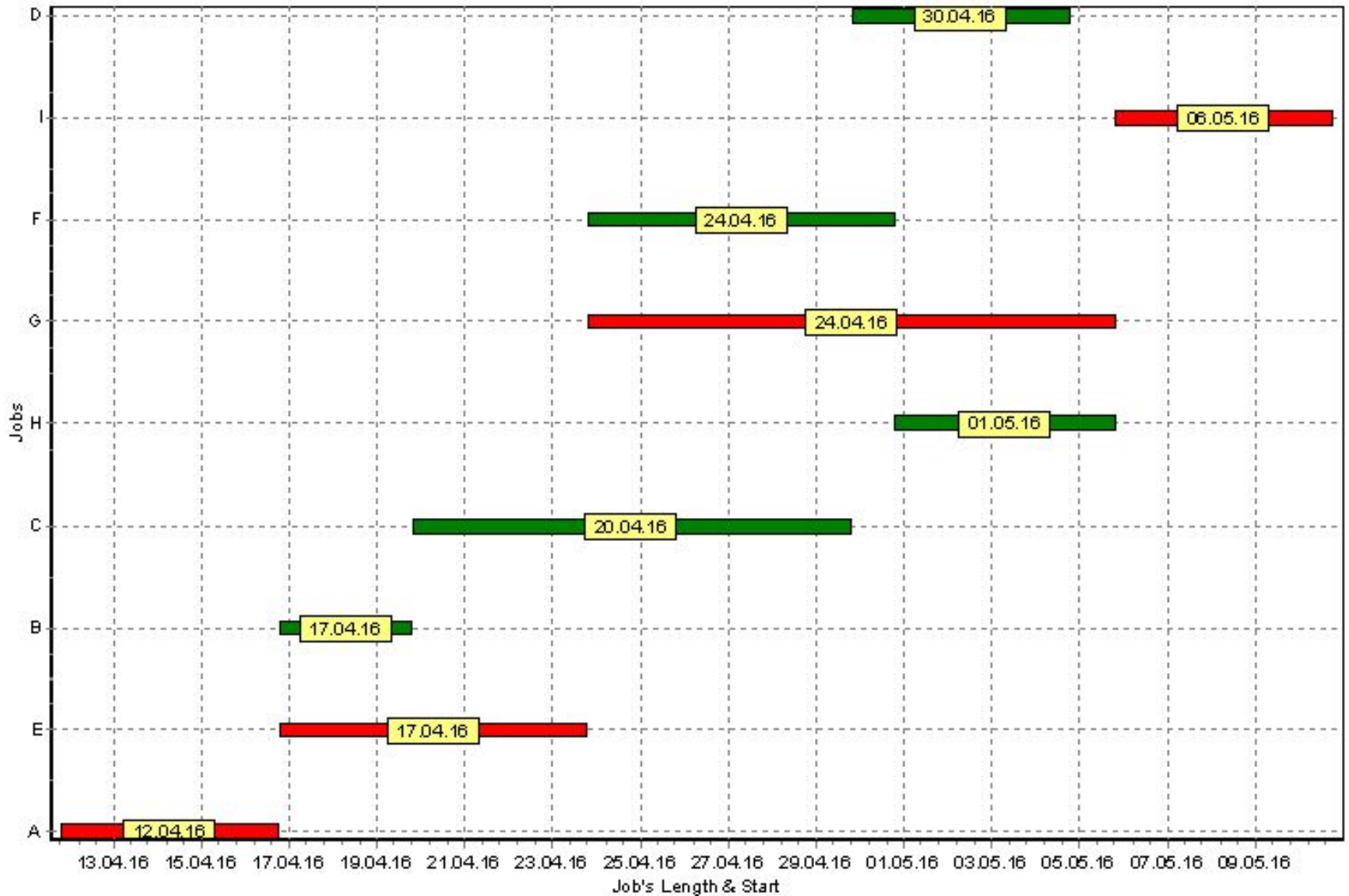


Диаграмма Гантта



б) Временные параметры событий

- ранний срок наступления
- поздний срок наступления
- резерв времени

Ранний срок наступления события

показывает время наступления события в том случае, когда все предшествующие ему работы будут выполнены без задержек, а все предшествующие события свершатся в ранние сроки.

Ранний срок наступления i -го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_{L_{ni}} t(L_{ni})$$

Поздний срок наступления события

показывает максимально возможное время наступление события, при котором общая продолжительность выполнения проекта еще не увеличивается.

Поздний срок наступления i -го события определяется как разница между продолжительностью критического пути и продолжительностью максимального пути, следующего за этим событием:

$$t_n(i) = t_{кр} - \max_{L_{ci}} t(L_{ci})$$

Резерв времени события

показывает, на какой максимально допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего проекта в целом.

Резерв времени i -го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его наступления:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

Временные параметры событий проекта строительства склада

[Переход](#)

Событие	Ранний срок наступления, $t_p(i)$	Поздний срок наступления, $t_n(i)$	Резерв времени, $R(i)$
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

в) Временные параметры работ

- ранний срок начала
- ранний срок окончания
- поздний срок начала
- поздний срок окончания
- полный резерв времени
- частный резерв времени первого вида
- частный резерв времени второго вида
- независимый резерв времени

Сроки начала и окончания работ

Ранний срок начала работы (i, j) совпадает с ранним сроком наступления ее начального события:

$$t_{pn}(i, j) = t_p(i)$$

Ранний срок окончания работы (i, j) определяется по формуле:

$$t_{po}(i, j) = t_p(i) + t(i, j)$$

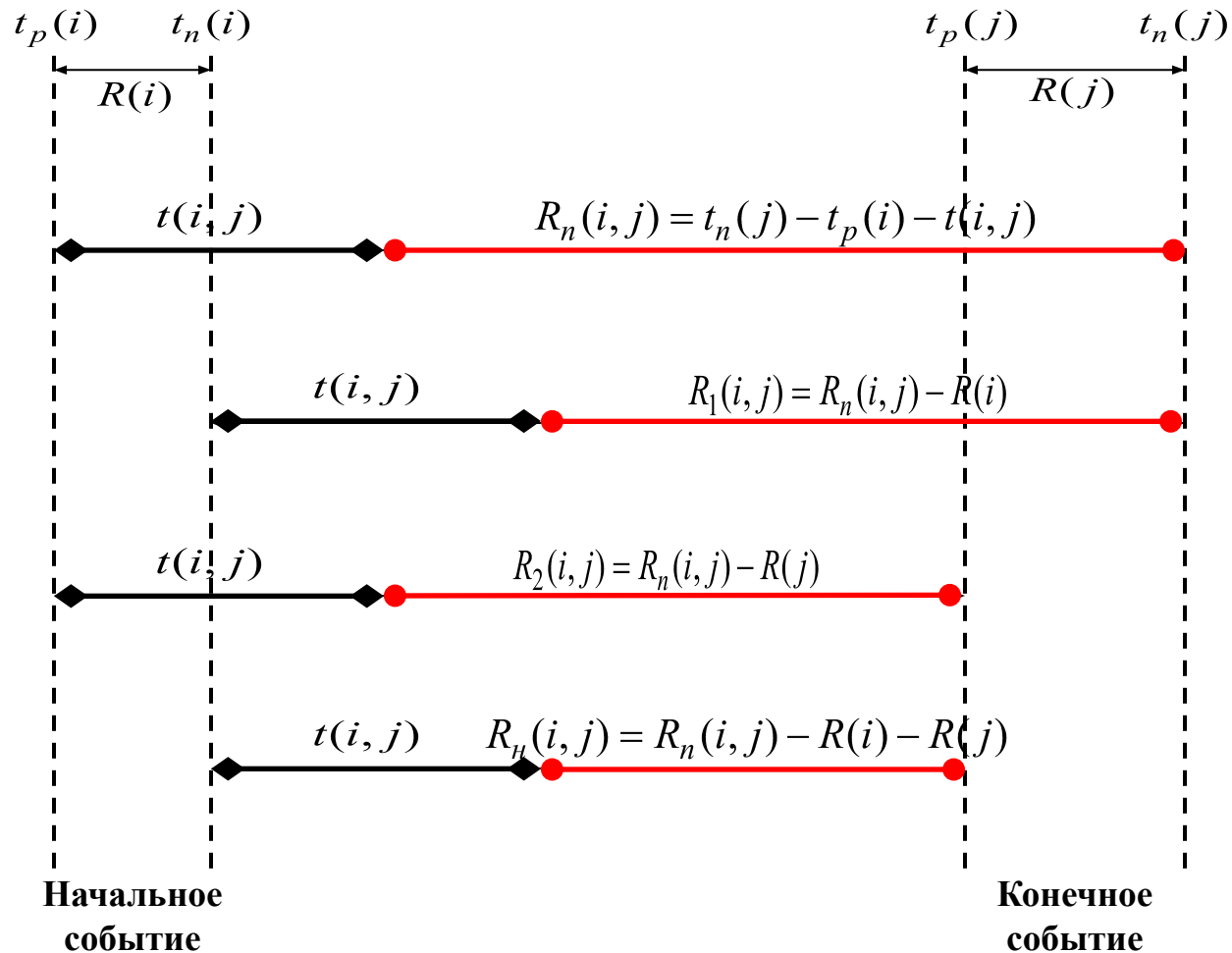
Поздний срок окончания работы (i, j) совпадает с поздним сроком наступления ее конечного события.

$$t_{no}(i, j) = t_n(j)$$

Поздний срок начала работы (i, j) определяется по формуле:

$$t_{nn}(i, j) = t_n(j) - t(i, j)$$

Резервы времени работ



Полный резерв времени работы, $R_n(i, j)$ показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. При использовании полного резерва времени только для одной работы резервы времени других работ, лежащих на пути максимальной длины, проходящих через эту работу, будут полностью исчерпаны.

Частный резерв времени первого вида работы, $R_1(i, j)$ – часть полного резерва времени работы, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события.

Частный резерв времени второго вида работы, свободный резерв времени работы, $R_2(i, j) = R_c(i, j)$ – часть полного резерва времени работы, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события.

Независимый резерв времени работы, $R_n(i, j)$ – часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки.

г) Коэффициенты напряженности работ

$$K_n(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}}$$

где $t'_{кр}$ – продолжительность отрезка максимального пути, проходящего через работу (i, j) , совпадающего с критическим путем.

Для критических работ коэффициент напряженности равен единице.

Выделяют три зоны классификации работ по напряженности:

- критическую ($>0,8$)
- подкритическую ($[0,6; 0,8]$)
- резервную ($<0,6$)

Коэффициенты напряженности работ проекта строительства склада

[Переход](#)

Работа	$R_n(i, j)$	$t'_{кр}$	$K_n(i, j)$
(0, 1)	0		
(1, 2)	6		
(1, 4)	0		
(2, 3)	6		
(3, 7)	6		
(4, 5)	5		
(4, 6)	0		
(5, 7)	5		
(6, 7)	0		

1.3. Оптимизация временных параметров сетевых графиков

представляет собой процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Оптимизация проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

Меры по оптимизации:

- перераспределение ресурсов из менее напряженных в более напряженные зоны
- передача части критических работ на пути, имеющие резервы времени
- параллельное выполнение критических работ
- пересмотр структуры сетевого графика



2. Планирование ресурсов

При планировании использования ресурсов необходимо учитывать:

- расписание работы ресурсов
- возможность перегрузки (или недогрузки) ресурсов
- психологические особенности людей

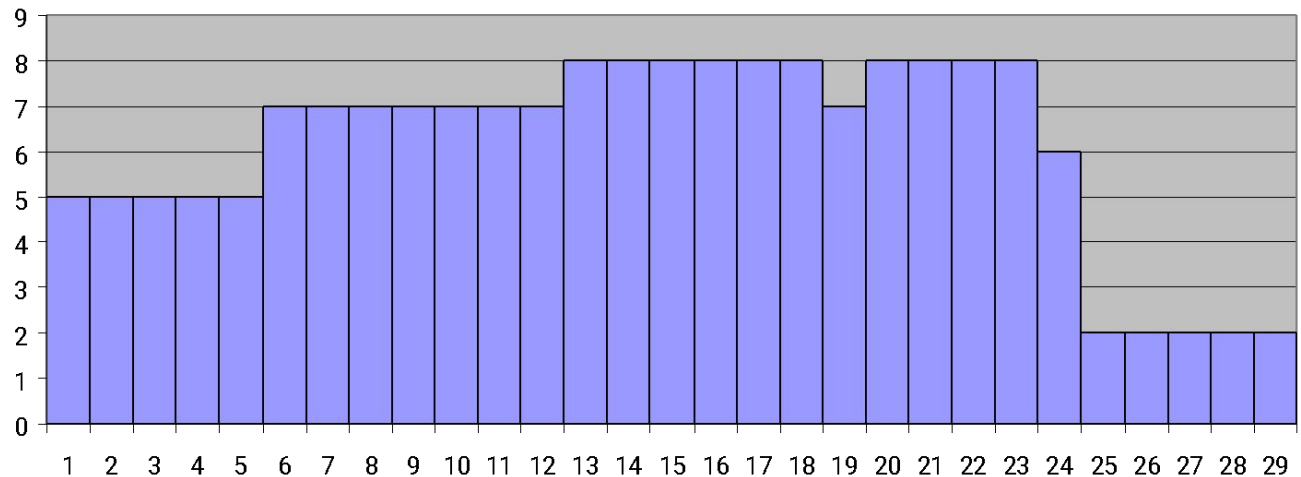
Принципы сглаживания потребности в ресурсе:

1. Принцип распараллеливания работ
2. Принцип снижения (перераспределения) интенсивности работ

Потребности в ресурсе

Работа	Трудозатраты, человеко-дней	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
A	25	5	5	5	5	5																									
B	9						3	3	3																						
C	30									3	3	3	3	3	3	3	3	3	3												
D	10																				2	2	2	2	2						
E	28						4	4	4	4	4	4	4																		
F	21													3	3	3	3	3	3	3											
G	24													2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2					
H	20																					4	4	4	4	4					
I	10																										2	2	2	2	2
Всего:		5	5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	6	2	2	2	2	2

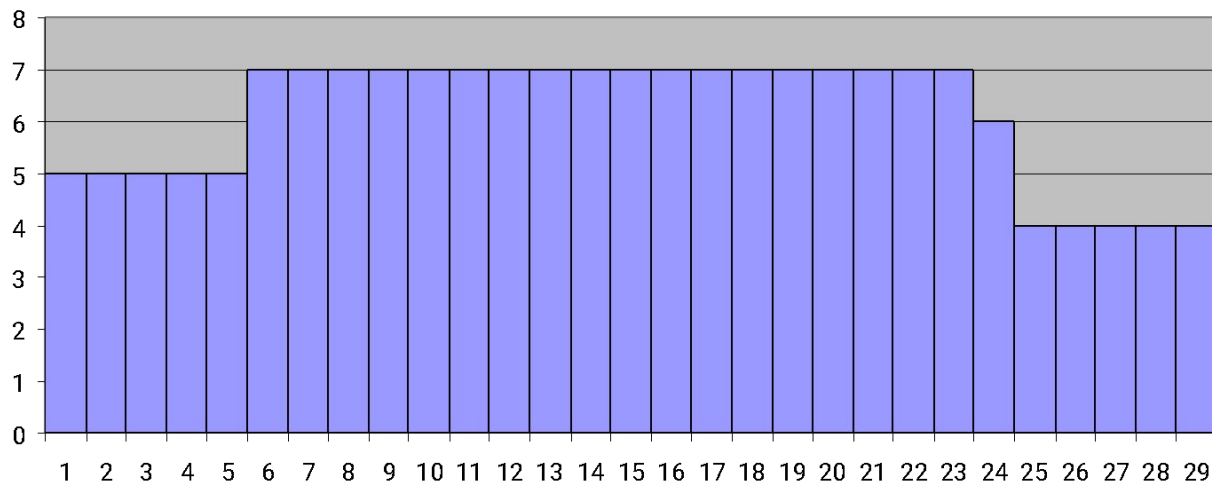
Диаграмма загрузки ресурса



Сглаживание потребности в ресурсе

Работа	Трудозатраты, человеко-дней	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
A	25	5	5	5	5	5																								
B	9						3	3	3																					
C	30									3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1						
D	10																									2	2	2	2	2
E	28						4	4	4	4	4	4	4																	
F	21													3	3	3	3	3	3											
G	24													2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2					
H	20																				4	4	4	4	4					
I	10																									2	2	2	2	2
Всего:		5	5	5	5	5	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	4	4	4	4	4

Диаграмма загрузки ресурса





3. Анализ рисков

I аспект

- **Риск** – возможность отклонения параметра от планируемого значения, ведущего к негативным последствиям.
- **Риск** – возможность любого отклонения параметра от планируемого значения.

II аспект

- **Риск** – вероятность отклонения параметра.
- **Риск** – величина отклонения параметра.

3.1. Качественный анализ рисков

Источники рисков проекта



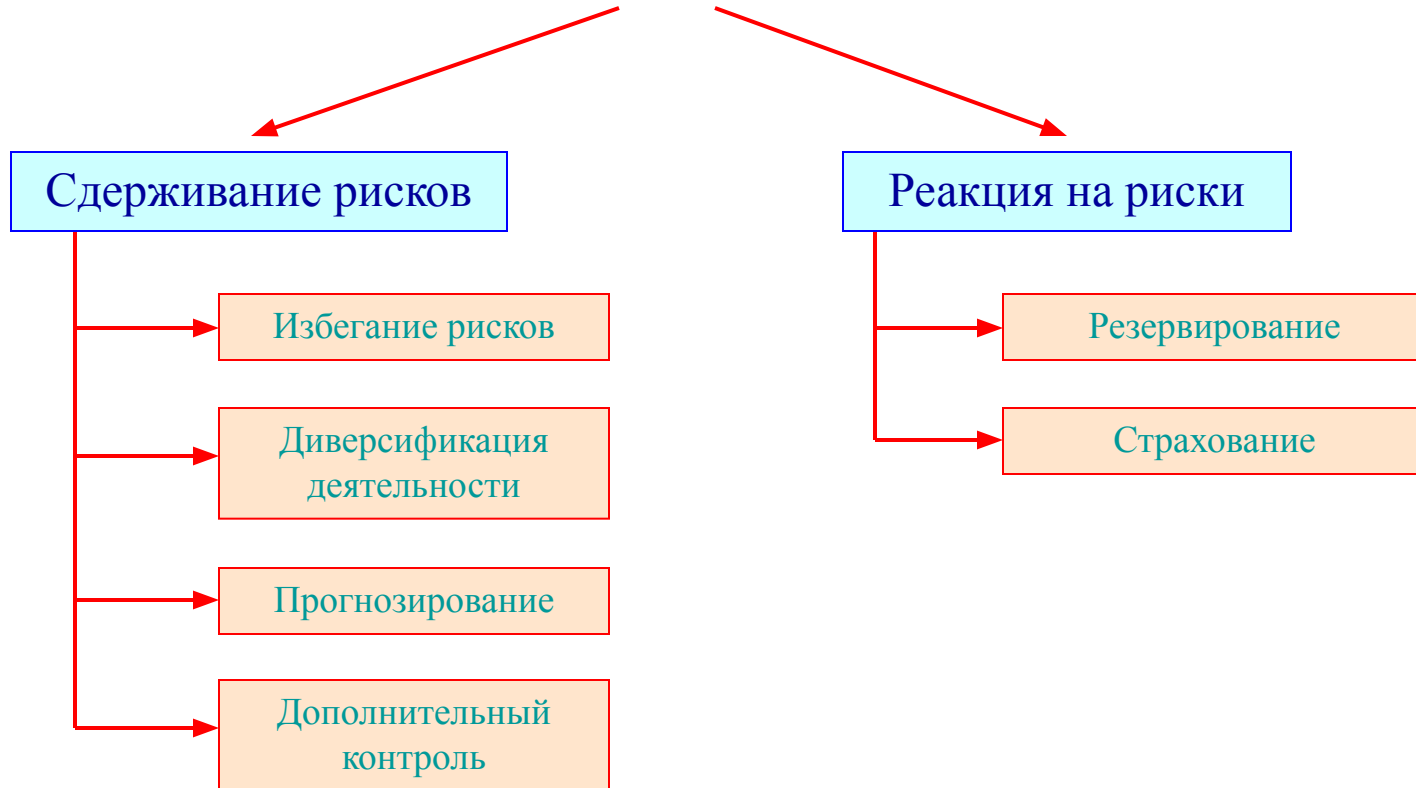
Для каждого риска проекта необходимо определить:

- Вероятность возникновения (в % или баллах)
- Степень воздействия на проект (в баллах)
- Ожидаемое время возникновения
- Частоту возникновения
- *Триггеры* – ранние признаки риска

Карта сортировки рисков

Вероятность, %	100										
	90										
	80										
	70										
	60										
	50										
	40										
	30										
	20										
	10										
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Степень воздействия										

Управление рисками



3.2. Количественный анализ рисков

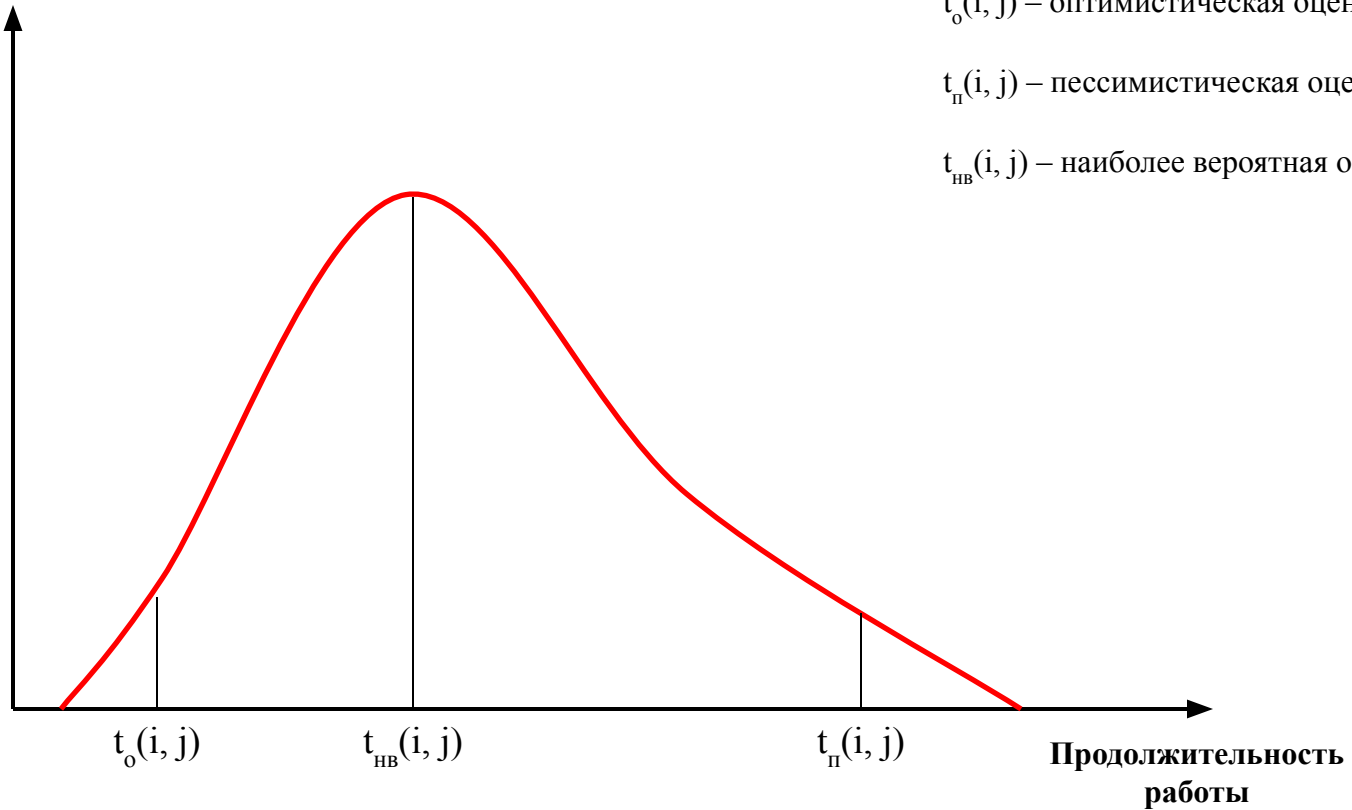
Продолжительность работы – случайная величина с некоторым *математическим ожиданием* и *дисперсией*.

Свойства распределения продолжительности работы:

- непрерывность
- унимодальность
- две точки пересечения с осью абсцисс в положительной области
- положительная асимметрия

β -распределение продолжительности работы

Плотность
вероятности



$t_0(i, j)$ – оптимистическая оценка

$t_п(i, j)$ – пессимистическая оценка

$t_{нв}(i, j)$ – наиболее вероятная оценка

Характеристики β -распределения продолжительности работы

Математическое ожидание:

$$\bar{t}(i, j) = \frac{t_o(i, j) + 4t_{нв}(i, j) + t_n(i, j)}{6} \quad \text{или} \quad \bar{t}(i, j) = \frac{2t_o(i, j) + 3t_n(i, j)}{5}$$

Дисперсия:

$$\sigma^2(i, j) = \left[\frac{t_n(i, j) - t_o(i, j)}{6} \right]^2$$

Вероятностные характеристики продолжительностей работ проекта строительства склада

Переход

Работа	$t_o(i, j)$	$t_n(i, j)$	$\bar{t}(i, j)$	$\sigma^2(i, j)$
(0, 1)	3	6,33		
(1, 2)	2	3,67		
(1, 4)	5	8,33	7	0,31
(2, 3)	7	12	10	0,69
(3, 7)	4	5,67	5	0,08
(4, 5)	6	7,67	7	0,08
(4, 6)	8	14,67	12	1,24
(5, 7)	4	5,67	5	0,08
(6, 7)	3	6,33	5	0,31

При достаточно большом количестве работ, принадлежащих критическому пути, можно утверждать, что общая продолжительность критического пути имеет *нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным сумме математических ожиданий продолжительностей составляющих его работ, и дисперсией, равной сумме дисперсий продолжительностей этих работ.*

В нашем примере ожидаемая продолжительность критического пути составляет:

Переход

$$\bar{t}_{кр} = \quad = \quad \text{дней,}$$

дисперсия:

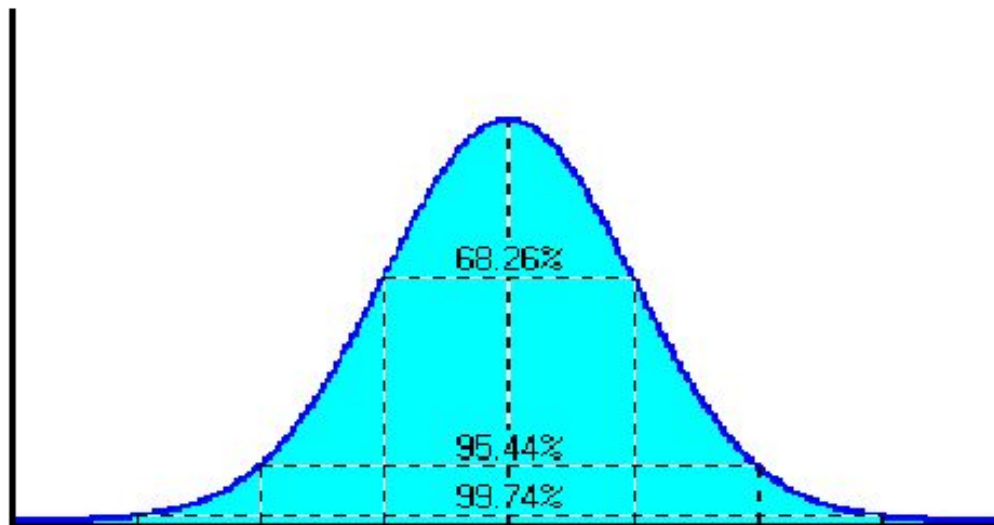
$$\sigma_{кр}^2 = \quad =$$

среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_{кр} =$$

Нормальное распределение продолжительности проекта

Плотность вероятности



-3σ	-2σ	-1σ	0	$+1\sigma$	$+2\sigma$	$+3\sigma$
24,59	26,06	27,53	29	30,47	31,94	33,41

Продолжительность проекта, дней

Вероятность того, что реальный срок выполнения проекта $t_{кр}$ не превзойдет T :

$$P(t_{кр} \leq T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right), \quad \bar{t}_{кр} \leq T$$

$$P(t_{кр} \leq T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\bar{t}_{кр} - T}{\sigma_{кр}}\right), \quad T \leq \bar{t}_{кр}$$

Таблица значений интеграла вероятностей Лапласа

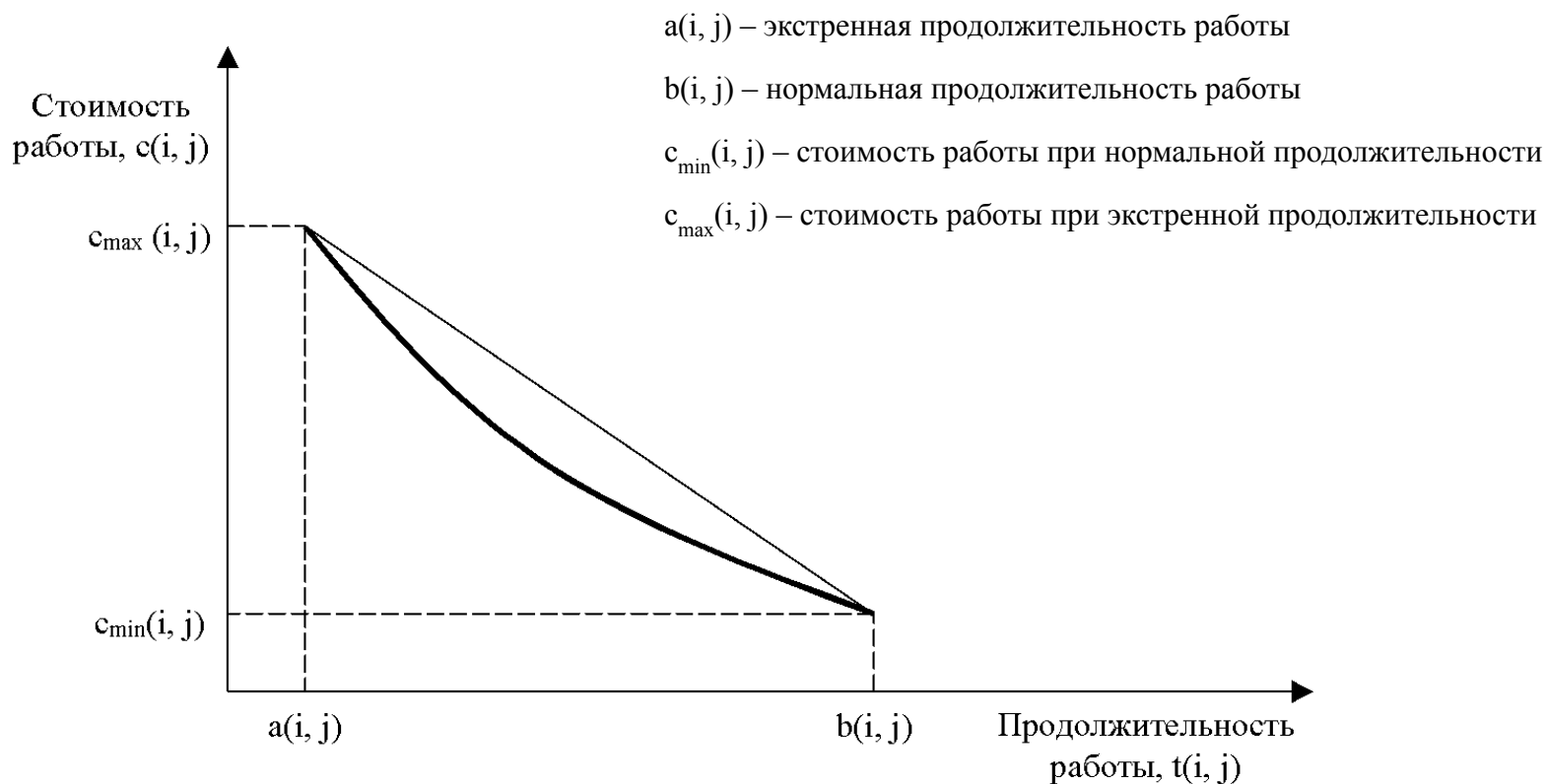
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,75	0,54675	1,50	0,86639	2,25	0,97555	3,00	0,99730
0,05	0,03988	0,80	0,57629	1,55	0,87886	2,30	0,97855	3,10	0,99806
0,10	0,07966	0,85	0,60468	1,60	0,89040	2,35	0,98123	3,20	0,99863
0,15	0,11924	0,90	0,63188	1,65	0,90106	2,40	0,98360	3,30	0,99903
0,20	0,15852	0,95	0,65789	1,70	0,91087	2,45	0,98571	3,40	0,99933
0,25	0,19741	1,00	0,68269	1,75	0,91988	2,50	0,98758	3,50	0,99953
0,30	0,23582	1,05	0,70628	1,80	0,92814	2,55	0,98922	3,60	0,99968
0,35	0,27366	1,01	0,72867	1,85	0,93569	2,60	0,99068	3,70	0,99978
0,40	0,31084	1,15	0,74986	1,90	0,94257	2,65	0,99195	3,80	0,99986
0,45	0,34729	1,20	0,76986	1,95	0,94882	2,70	0,99307	3,90	0,99990
0,50	0,38292	1,25	0,78870	2,00	0,9545	2,75	0,99404	4,00	0,99994
0,55	0,41768	1,30	0,80640	2,05	0,95964	2,80	0,99489	4,10	0,99996
0,60	0,45149	1,35	0,82298	2,01	0,96427	2,85	0,99563	4,20	0,99997
0,65	0,48431	1,40	0,83849	2,15	0,96844	2,90	0,99627	4,40	0,99999
0,70	0,51607	1,45	0,85294	2,20	0,97219	2,95	0,99682	4,50	0,99990

4. Оптимизация стоимости проекта

Задачи оптимизации:

- минимизация стоимости проекта при заданной продолжительности (частная задача оптимизации)
- минимизация продолжительности проекта при заданной стоимости (частная задача оптимизации)
- минимизация продолжительности проекта при минимизации его стоимости (комплексная задача оптимизации)

Зависимость стоимости работы от ее продолжительности



Зависимость стоимости проекта от его продолжительности



Стоимости выполнения работ проекта строительства склада

Переход

Работа	Экстренная продолжительность работы, $a(i,j)$	Макс. стоимость работы, $c_{\max}(i,j)$	Нормальная продолжительность работы, $b(i,j)$	Мин. стоимость работы, $c_{\min}(i,j)$	Затраты на ускорение работы, $h(i,j)$
(0, 1)	3	480	6	210	
(1, 2)	2	350	5	200	
(1, 4)	6	500	8	350	
(2, 3)	8	900	14	600	
(3, 7)	3	740	7	500	
(4, 5)	5	700	9	300	
(4, 6)	9	940	14	540	
(5, 7)	4	450	6	250	
(6, 7)	4	600	7	240	

4.1. Минимизация стоимости проекта при заданной продолжительности

Шаг 1. Построение опорного плана выполнения проекта.

Шаг 2. Если заданная продолжительность проекта меньше продолжительности критического пути опорного плана, производится последовательное «сжатие» работ на критическом пути (принцип: «чем дешевле сжатие, тем раньше оно должно быть выполнено»). Суммарное сжатие не может превышать минимального из свободных резервов времени работ (отличных от нуля).

Шаг 3. «Растяжение» некритических работ. «Растяжение» работы не может превосходить ее свободного резерва времени.

Минимизация стоимости проекта строительства склада при продолжительности 25 дней

График

Таблица

Шаг 1. Построение опорного плана выполнения проекта

Работа	$b(i,j)$	$c_{min}(i,j)$	$t(i,j)$	$h(i,j)$	Стоимость, $c(i, j)$
(0, 1)	6	210	5	90	
(1, 2)	5	200	3	50	
(1, 4)	8	350	7	75	
(2, 3)	14	600	10	50	
(3, 7)	7	500	5	60	
(4, 5)	9	300	7	100	
(4, 6)	14	540	12	80	
(5, 7)	6	250	5	100	
(6, 7)	7	240	5	120	

Стоимость проекта = у.е.

Шаг 2. «Сжатие» работ на критическом пути

Переход

Минимальный свободный резерв работ равен ____

Работа	a(i,j)	b(i,j)	h(i,j)	t(i,j)	Резерв «сжатия»	«Сжатие»	t'(i,j)	«Удорожание»
(0, 1)	3	6	90	5				
(1, 2)	2	5	50	3	-	-	-	-
(1, 4)	6	8	75	7				
(2, 3)	8	14	50	10	-	-	-	-
(3, 7)	3	7	60	5	-	-	-	-
(4, 5)	5	9	100	7	-	-	-	-
(4, 6)	9	14	80	12				
(5, 7)	4	6	100	5	-	-	-	-
(6, 7)	4	7	120	5				

Стоимость проекта = _____ у.е.

Шаг 2. «Сжатие» работ на критическом пути

Переход

Шаг 3. «Растяжение» не критических работ

Таблица График

Работа	a(i,j)	b(i,j)	h(i,j)	t(i,j)	Свобод- ный резерв, R _c (i,j)	Резерв «растя- жения»	«Растя- жение»	t'(i,j)	«Удешев- ление
(0, 1)	3	6	90	5	-	-	-	-	-
(1, 2)	2	5	50	3					
(1, 4)	6	8	75	6	-	-	-	-	-
(2, 3)	8	14	50	10					
(3, 7)	3	7	60	5					
(4, 5)	5	9	100	7					
(4, 6)	9	14	80	9	-	-	-	-	-
(5, 7)	4	6	100	5					
(6, 7)	4	7	120	5	-	-	-	-	-

Стоимость проекта =

у.е.

4.2. Минимизация продолжительности проекта при минимизации его стоимости

Шаг 1. Построение нормального плана выполнения проекта.

Итерации:

Шаг 2. Если минимальный свободный резерв работ равен нулю, завершаем работу алгоритма.

Шаг 3. Из числа критических работ выбирается работа, которая может дать максимальное сокращение критического пути и не превышает минимального из свободных резервов времени работ (отличных от нуля). Если таких работ несколько, то выбирается та из них, которая имеет наименьшие затраты на ускорение.

Шаг 4. Если снижение косвенных затрат больше прироста прямых (или равно ему) «пересчитываем» проект и переходим к шагу 2. Если нет, завершаем работу алгоритма.

Минимизация продолжительности проекта строительства склада при минимизации его стоимости

Переход

Шаг 1. Построение нормального плана выполнения проекта
* *Косвенные затраты* составляют 80 у.е./день

Стоимость проекта = = у.е.

Итерация 1:

Шаг 2. Минимальный свободный резерв работ равен ____ →

Шаг 3. «Сжатие» работ на критическом пути

Переход

Работа	a(i,j)	b(i,j)	h(i,j)	t(i,j)	Резерв «сжатия»	«Сжатие»	t'(i,j)	«Удорожание»
(0, 1)	3	6	90	6				
(1, 2)	2	5	50	5	-	-	-	-
(1, 4)	6	8	75	8				
(2, 3)	8	14	50	14	-	-	-	-
(3, 7)	3	7	60	7	-	-	-	-
(4, 5)	5	9	100	9	-	-	-	-
(4, 6)	9	14	80	14				
(5, 7)	4	6	100	6	-	-	-	-
(6, 7)	4	7	120	7				

Шаг 4. Прирост прямых затрат (у.е.) ____ снижения косвенных затрат (у.е.)

Стоимость проекта = у.е.