Тема:

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.

Свойства четности и нечетности

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

четная

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

нечетная

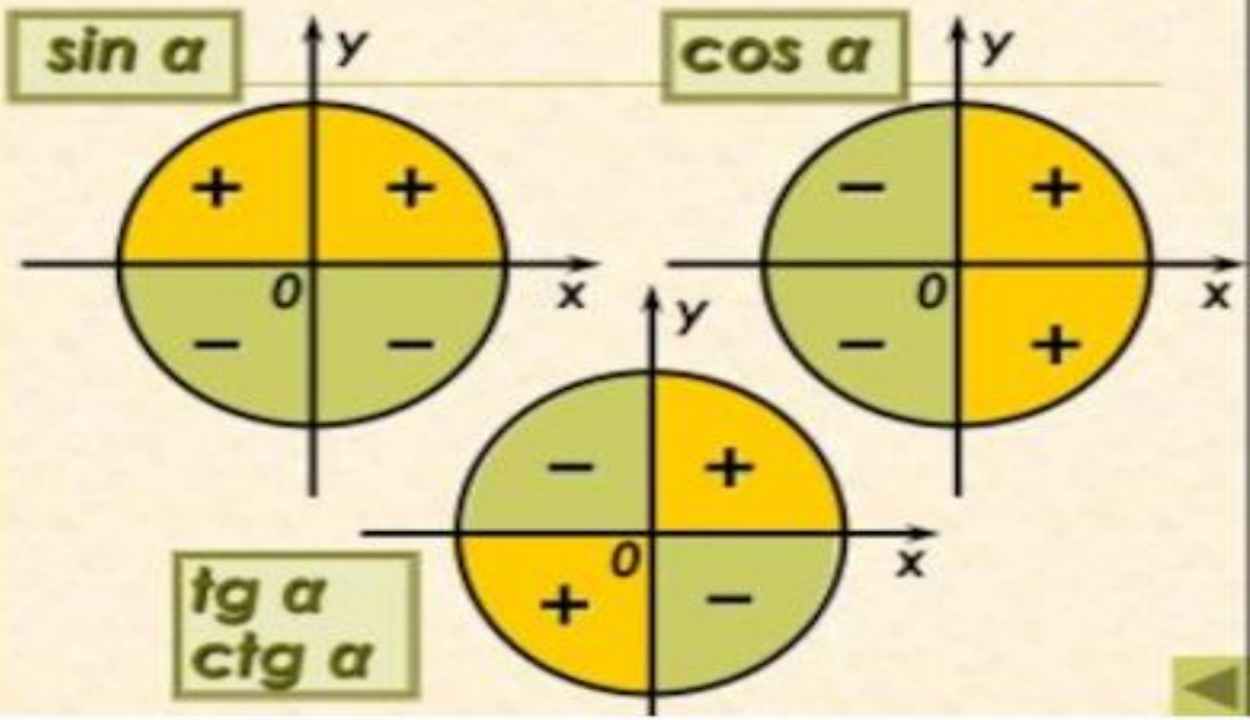
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

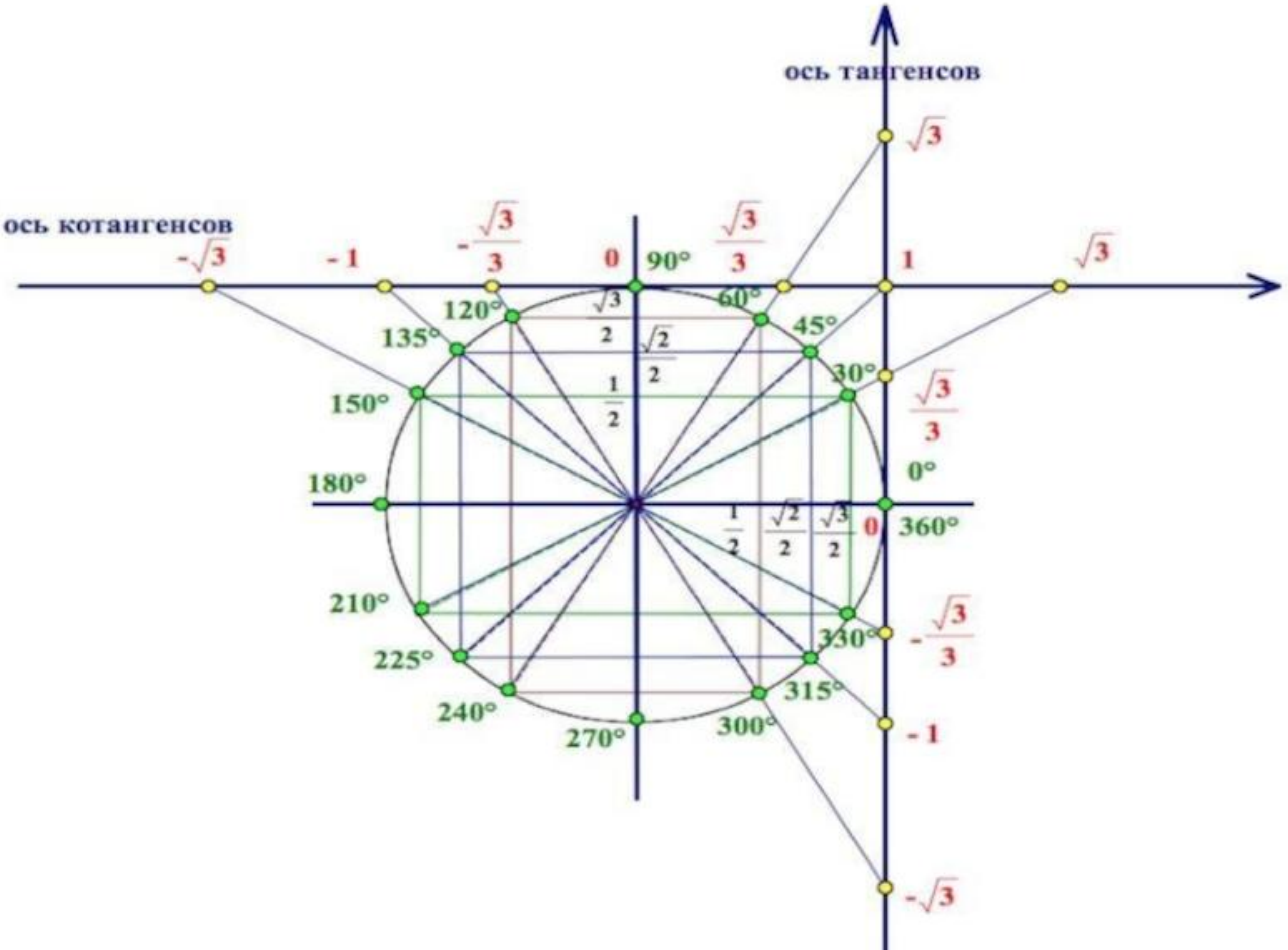
нечетная

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

нечетная

Знаки синуса и косинуса





ось тангенсов
ось котангенсов
$-\sqrt{3}$
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0
90°
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
-1
$-\sqrt{3}$
120°
135°
150°
180°
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
0°
360°
30°
45°
60°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0

Как вы , наверное, успели заметить: тригонометрия сложна обилием формул, которые трудно запомнить.

Быстрее запоминать тригонометрические понятия и формулы могут помочь **мнемонические правила.**

Мнемо́ника (др.-греч. μνημονικόν *искусство запоминания*), **мнемоте́хника** совокупность специальных приёмов и способов, облегчающих запоминание нужной информации и увеличивающих объём памяти путём образования ассоциаций (связей).

Мнемоническое правило запоминания формул сложения

Формулы сложения – это та, группа формул которую нужно знать наизусть. Но для их запоминания можно тоже воспользоваться ассоциативным приемом. У **косинуса** функции **одноименные**:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

а у синуса **разноименные:**

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Не все в нашей жизни бывает «гладко» за белой полосой идет черная, и наоборот. Так и у наших функций, если функции идут одноименные, то знаки не совпадают, а если разноименные, то совпадают.

Пример 1

Вычислить: $\sin 20^0 \, cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0$

Решение:

$$\sin 20^0 \, cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0 = \sin\left(20^0 + 40^0\right) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 2

Вычислить: $\cos 47^0 \, cos 17^0 + \sin 47^0 \sin 17^0$

Решение:

$$\cos 47^0 \, cos 17^0 + \sin 47^0 \sin 17^0 = \cos\left(47^0 - 17^0\right) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 3

Упростить:
$$\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-tg\alpha}{1+tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)tg\alpha}$$

Решение:
$$\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-tg\alpha}{1+tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)tg\alpha}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\alpha\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Формулы суммы

$$\mathrm{Sin}(\alpha) + \mathrm{Sin}(\beta) = 2 \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{Sin}(\alpha) - \mathrm{Sin}(\beta) = 2 \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) + \mathrm{Cos}(\beta) = 2 \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) - \mathrm{Cos}(\beta) = -2 \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha) + \mathrm{tg}(\beta) = \frac{\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)}{\mathrm{Cos}(\alpha) \cdot \mathrm{Cos}(\beta)} \qquad \mathrm{tg}(\alpha) - \mathrm{tg}(\beta) = \frac{\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)}{\mathrm{Cos}(\alpha) \cdot \mathrm{Cos}(\beta)}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha) + \mathrm{ctg}(\beta) = \frac{\mathrm{Sin}(\beta+\alpha)}{\mathrm{Sin}(\alpha) \cdot \mathrm{Sin}(\beta)} \qquad \mathrm{ctg}(\alpha) - \mathrm{ctg}(\beta) = \frac{\mathrm{Sin}(\beta-\alpha)}{\mathrm{Sin}(\alpha) \cdot \mathrm{Sin}(\beta)}$$

Формулы произведения

$$\mathrm{Sin}(\alpha)\cdot\mathrm{Sin}(\beta)=\frac{1}{2}(\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}(\alpha+\beta))$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha)\cdot\mathrm{Cos}(\beta)=\frac{1}{2}(\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha+\beta))$$

$$\mathrm{Sin}(\alpha)\cdot\mathrm{Cos}(\beta)=\frac{1}{2}(\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)+\mathrm{Sin}(\alpha+\beta))$$

$$\mathrm{tg}(\alpha)\cdot\mathrm{tg}(\beta)=\frac{\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)}{\mathrm{ctg}(\alpha)+\mathrm{ctg}(\beta)} \qquad \mathrm{ctg}(\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(\beta)=\frac{\mathrm{ctg}(\alpha)+\mathrm{ctg}(\beta)}{\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha)\cdot\mathrm{tg}(\beta)=\frac{\mathrm{ctg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)}{\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{ctg}(\beta)}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$= 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$\sin\alpha \pm \sin\beta$

Тригонометрия.

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

$\cos\alpha \pm \cos\beta$

$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y$$

$$\begin{matrix} x = \alpha+\beta \\ y = \alpha-\beta \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2};\ \beta = \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cancel{\sin\beta\cos\alpha} + \sin\alpha\cos\beta - \cancel{\sin\beta\cos\alpha} = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) =$$
$$= \cancel{\sin\alpha\cos\beta} + \sin\beta\cos\alpha - \cancel{\sin\alpha\cos\beta} + \sin\beta\cos\alpha = 2\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$

Формулы преобразования тригонометрических функций в алгебраическую сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

Пример 4

Преобразовать в алгебраическую сумму:

$$\sin 5x \sin 3x$$

Решение:

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)\right) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x$$

Формулы преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Пример 5

Преобразовать в произведение: $\sin 40^0 + \sin 20^0$

Решение:

$$\sin 40^0 + \sin 20^0 = 2\sin\frac{40^0 + 20^0}{2}\cos\frac{40^0 - 20^0}{2} =$$

$$= 2\sin 30^0 \cos 10^0 = 2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^0 = \cos 10^0$$

Пример 6

Преобразовать в произведение: $cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{7\pi}{10}$

Решение:

$$cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{7\pi}{10}=2\sin\frac{9\pi}{20}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{20}$$

1. $$\sin 6x + \sin 4x = 2\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2} = 2\sin 5x\cos x;$$

2. $$\sin 43^\circ + \sin 17^\circ = 2\sin\frac{43^\circ+17^\circ}{2}\cos\frac{43^\circ-17^\circ}{2} =$$
$$= 2\sin 30^\circ\cos 13^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 13^\circ = \cos 13^\circ.$$

3. $$\sin 3x - \sin 5x = 2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2} =$$
$$= 2\sin(-x)\cos 4x = -2\sin x\cos 4x.$$

4. $$\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2} =$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}.$$

5. $$\cos(2x+y) - \cos(4x-y) =$$
$$= -2\sin\frac{(2x+y)+(4x-y)}{2}\sin\frac{(2x+y)-(4x-y)}{2} =$$
$$= -2\sin 3x\sin(-x+y) = 2\sin 3x\sin(x-y).$$

Домашнее задание:

- 1. Составить краткий конспект.
- 2. Вывести формулу преобразования суммы и разности тангенса и котангенса двух углов в произведение (по образцу слайда №7)
- 3. Прочитать в учебнике стр. 102-106 и вычислить два выражения (на выбор) из упражнения №1 на стр.106.