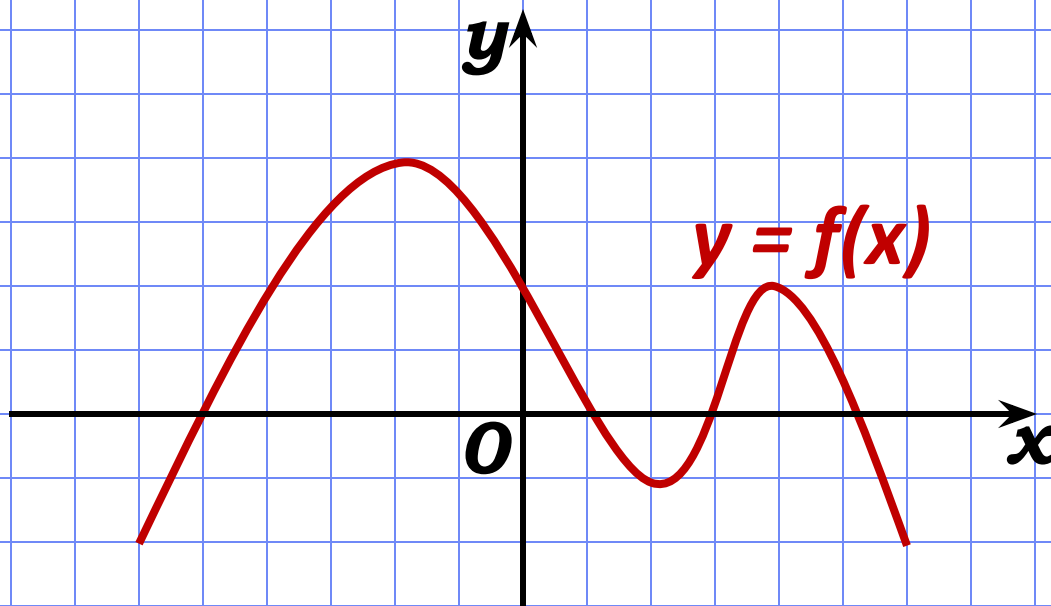


# Функции и их свойства



# Понятие функции

Если каждому значению  $x$  из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число  $y$ , то говорят, что на этом множестве задана **функция  $y(x)$** .

При этом  $x$  называют **независимой переменной** или **аргументом**,  
а  $y$  – **зависимой переменной** или **функцией**.

$$y = f(x)$$

# Область определения и множество значений функции

**Областью определения** функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Обозначается  **$D(y)$**

**Множество значений** (или область значений) функции – это множество всех значений переменной  $y$ .

Обозначается  **$E(y)$**

# Способы задания функции:

- **аналитический** (с помощью формулы);
- **графический** (с помощью графика);
- **табличный** (с помощью таблицы значений);
- **словесный** (правило задания функции описывается словами).

# Свойства функций:

## МОНОТОННОСТЬ

Функцию  $y = f(x)$  называют **возрастающей** на множестве  $X$ , если для любых двух элементов из этого множества, таких, что  $x_1 < x_2$ , выполняется условие  **$f(x_1) < f(x_2)$** .

(Функцию называют **возрастающей**, если **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции)

Функцию  $y = f(x)$  называют **убывающей** на множестве  $X$ , если для любых двух элементов из этого множества, таких, что  $x_1 < x_2$ , выполняется условие  **$f(x_1) > f(x_2)$** .

(Функцию называют **убывающей**, если **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции)

# Свойства функций:

## ограниченность

Функцию  $y = f(x)$  называют **ограниченной снизу** на множестве  $X$ , если существует число  **$m$** , такое, что для любого значения  $x \in X$ , выполняется неравенство  **$f(x) > m$** .

Функцию  $y = f(x)$  называют **ограниченной сверху** на множестве  $X$ , если существует число  **$M$** , такое, что для любого значения  $x \in X$ , выполняется неравенство  **$f(x) < M$** .

Если функция ограничена и снизу и сверху, то ее называют **ограниченной**

# Свойства функций:

наибольшее и наименьшее значения

функции

Число  $m$  называют **наименьшим значением функции**  $y = f(x)$  на множестве  $X$ , если:  
существует число  $x_0 \in X$  такое, что  $f(x_0) = m$ ;  
для любого значения  $x \in X$  выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Число  $M$  называют **наибольшим значением функции**  $y = f(x)$  на множестве  $X$ , если:  
существует число  $x_0 \in X$  такое, что  $f(x_0) = M$ ;  
для любого значения  $x \in X$  выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

# Свойства функций:

## ЧЕТНОСТЬ ИЛИ НЕЧЕТНОСТЬ

Функцию  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  называют **четной**, если для любого значения  $x$  из множества  $X$  выполняется равенство  **$f(-x) = f(x)$** .

График **четной** функции симметричен относительно **оси ординат**.

Функцию  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  называют **нечетной**, если для любого значения  $x$  из множества  $X$  выполняется равенство  **$f(-x) = -f(x)$** .

График **нечетной** функции симметричен относительно **начала координат**.



# Свойства функций:

## ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА

Точку  $x_0$  называют **точкой максимума функции**  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки  $x_0$ ) выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Точку  $x_0$  называют **точкой минимума функции**  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки  $x_0$ ) выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Точки максимума и минимума объединяют общим названием – **точки экстремума**

# Свойства функций:

## периодичность

Говорят, что функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  имеет **период  $T$** , если для любого  $x \in X$  выполняется равенство

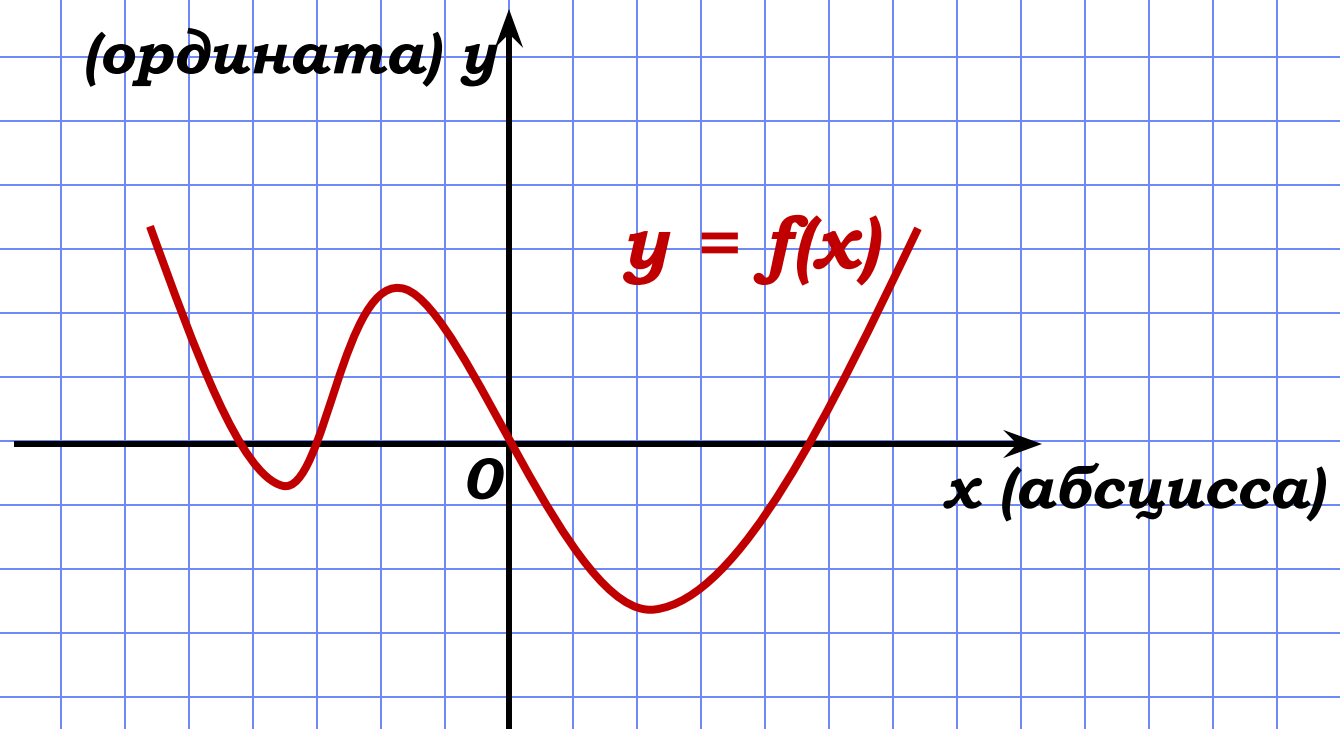
$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$


Функцию, имеющую отличный от нуля период называют **периодической**.

Если функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  имеет период  $T$ , то любое число, кратное  $T$  (т.е. число вида  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), также является ее периодом.

# График функции

**Графиком функции** называется множество всех точек координатной плоскости  $(x; y(x))$ , абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты — соответствующим значениям функции.





# Основные элементарные функции, их свойства и графики

# Линейная функция $y=kx+b$

Свойства линейной функции  $y = kx + b$ :

1.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ .

3. Если  $b = 0$ , то функция *нечетная*.

4. а) Нули функции:  $(-b/k; 0)$ ;

б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; b)$ .

5. а) *возрастает*, если  $k > 0$ ;

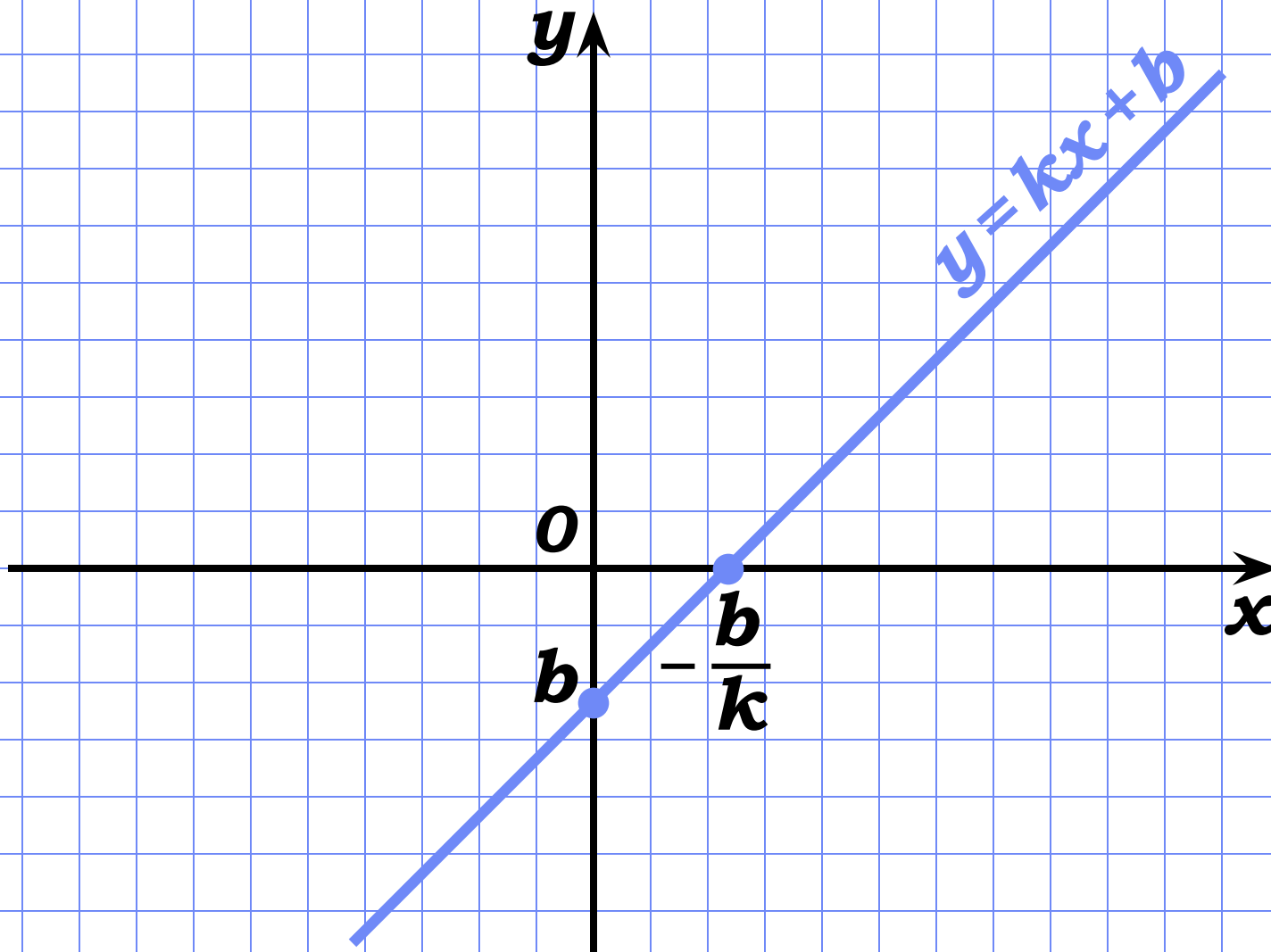
б) *убывает*, если  $k < 0$ .

6. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Функция непрерывна на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

# Линейная функция $y=kx+b$



# Обратная

$$y = \frac{k}{x}$$

## пропорциональность

Свойства функции  $y = k/x$ :

1.  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

2.  $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

3. Функция нечетная.

4. а) Нули функции: *нет*;

б) точка пересечения с  $Oy$ : *нет*.

4. а) если  $k < 0$ , то  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$  – промежутки возрастания функции;

б) если  $k > 0$ , то  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$  – промежутки убывания функции.

5. Не ограничена ни снизу, ни сверху.

6. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

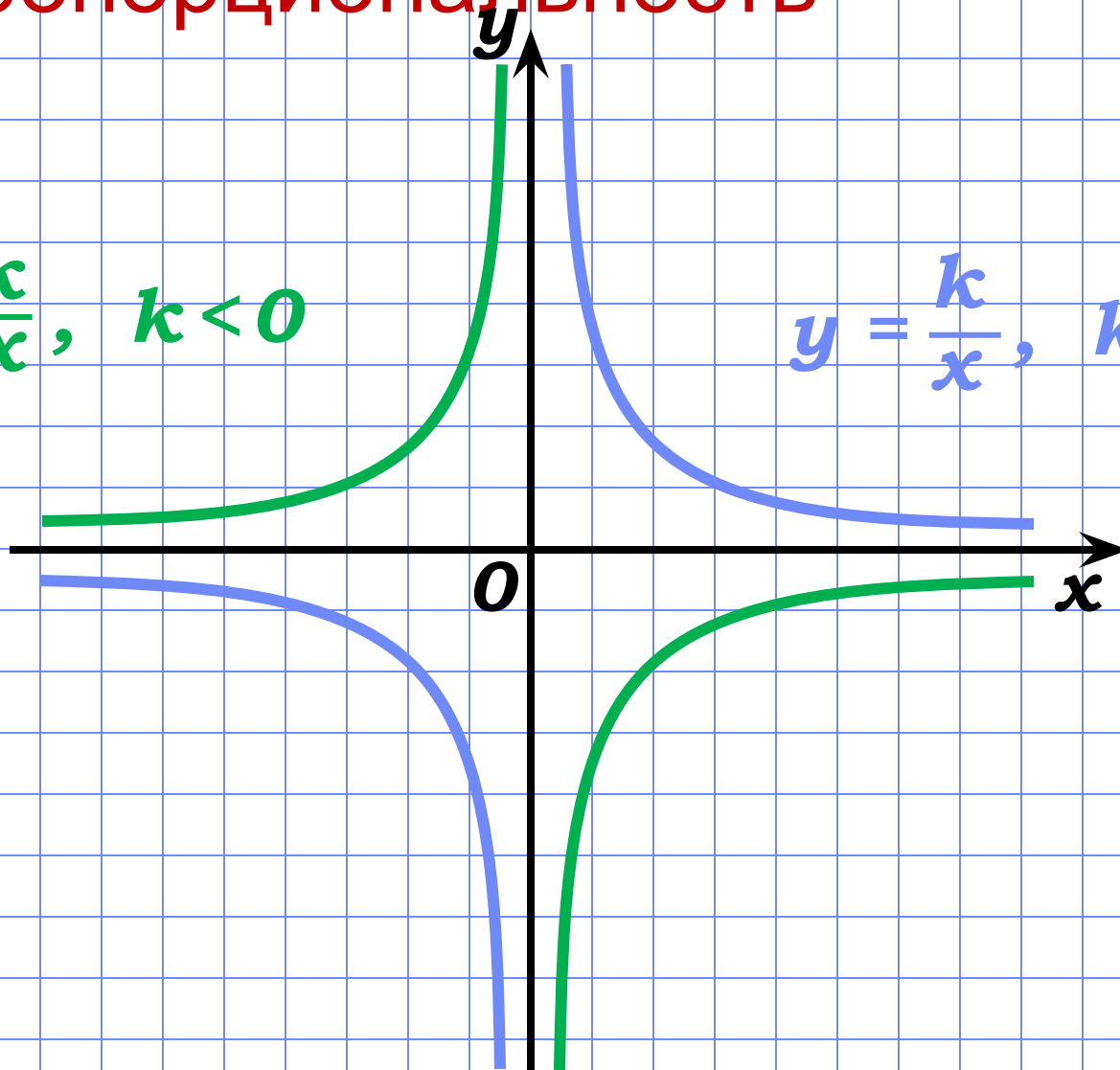
7. Функция непрерывна на каждом из промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; +\infty)$ .

# Обратная пропорциональность

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x}, k < 0$$

$$y = \frac{k}{x}, k > 0$$





# Квадратичная функция $y=kx^2$

Свойства функции  $y = kx^2$  при  $k > 0$ :

1.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $E(f) = [0; +\infty)$ .

3. Функция *четная*.

4. а) Нули функции:  $(0; 0)$ ;

б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; 0)$ .

5. а)  $[0; +\infty)$  – промежуток *возрастания* функции;

б)  $(-\infty; 0]$  – промежуток *убывания* функции.

6. *Ограничена снизу, не ограничена сверху.*

7. а)  $y_{\text{наим.}} = 0$ ;

б)  $y_{\text{наиб.}}$  – не существует.

8. Непрерывна на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

9. Выпукла вниз.

# Квадратичная функция $y=kx^2$

Свойства функции  $y = kx^2$  при  $k < 0$ :

1.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $E(f) = (-\infty; 0]$ .

3. Функция *четная*.

4. а) Нули функции:  $(0; 0)$ ;

б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; 0)$ .

5. а)  $[0; +\infty)$  – промежуток *убывания* функции;

б)  $(-\infty; 0]$  – промежуток *возрастания* функции.

6. *Ограничена сверху, не ограничена снизу.*

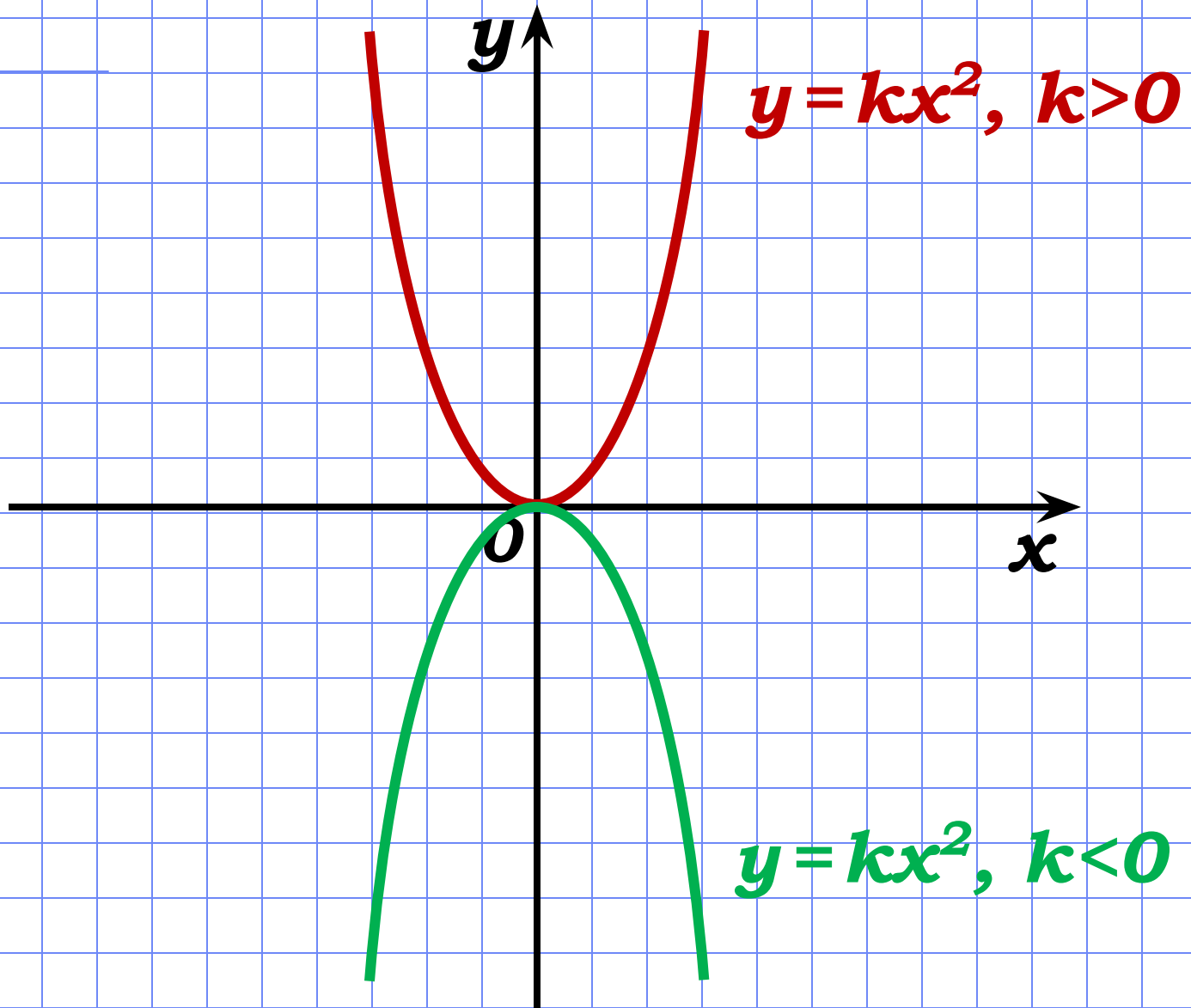
7. а)  $y_{\text{наиб.}} = 0$ ;

б)  $y_{\text{наим.}}$  – не существует.

8. Непрерывна на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

9. Выпукла вверх.

# Квадратичная функция $y=kx^2$

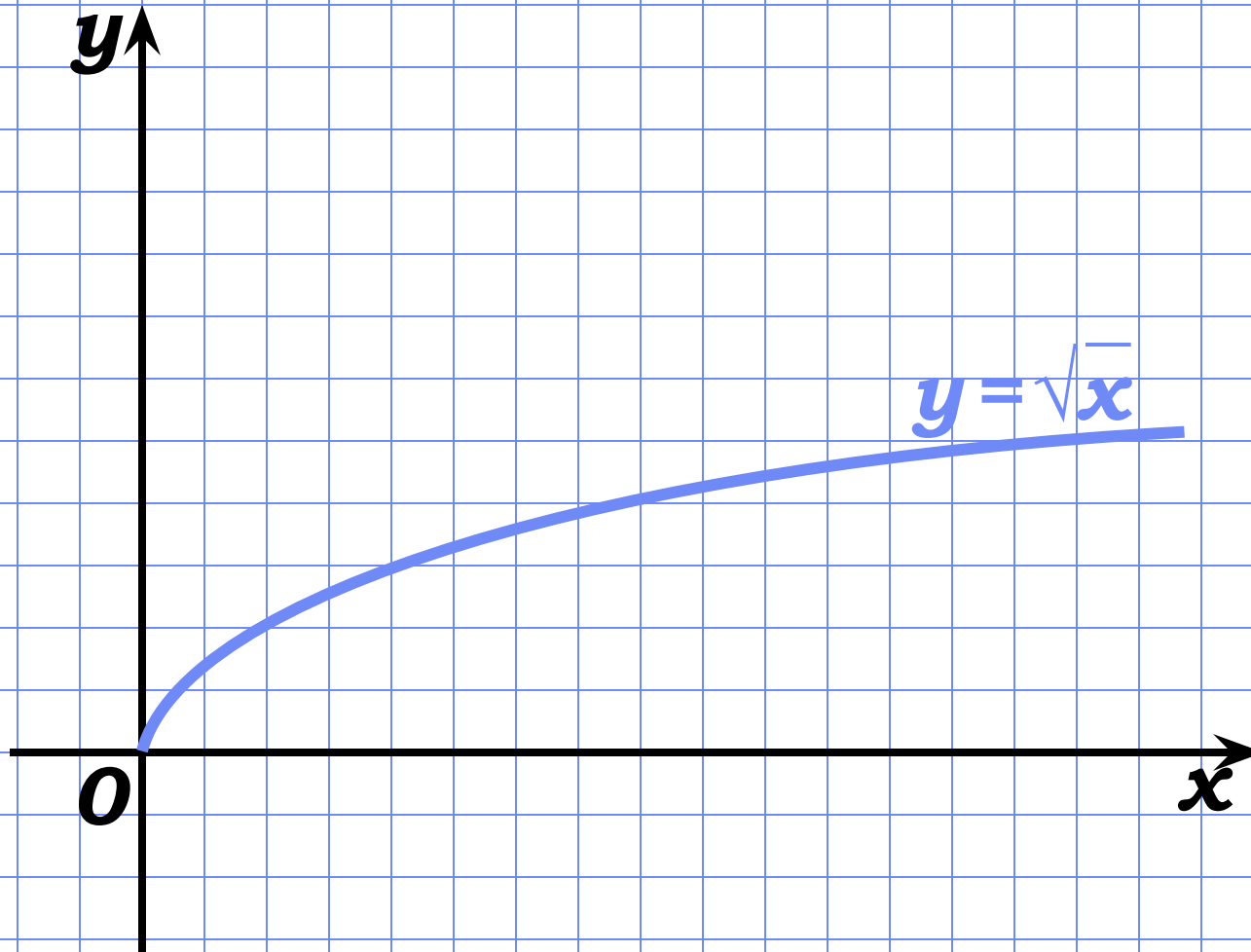


# Степенная функция $y = \sqrt{x}$

## Свойства функции $y = \sqrt{x}$ :

1.  $D(f) = [0; +\infty)$ .
2.  $E(f) = [0; +\infty)$ .
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции:  $(0; 0)$ ;  
б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; 0)$ .
5.  $[0; +\infty)$  – промежуток возрастания функции.
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а)  $y_{\text{наим.}} = 0$ ;  
б)  $y_{\text{наиб.}}$  – не существует.
8. Непрерывна на множестве  $[0; +\infty)$ .
9. Выпукла вверх.

# Степенная функция $y = \sqrt{x}$



# Кубическая функция $y=x^3$

Свойства кубической функции  $y = x^3$ :

1.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ .

3. Функция *нечетная*.

4. а) Нули функции:  $(0; 0)$ ;

б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; 0)$ .

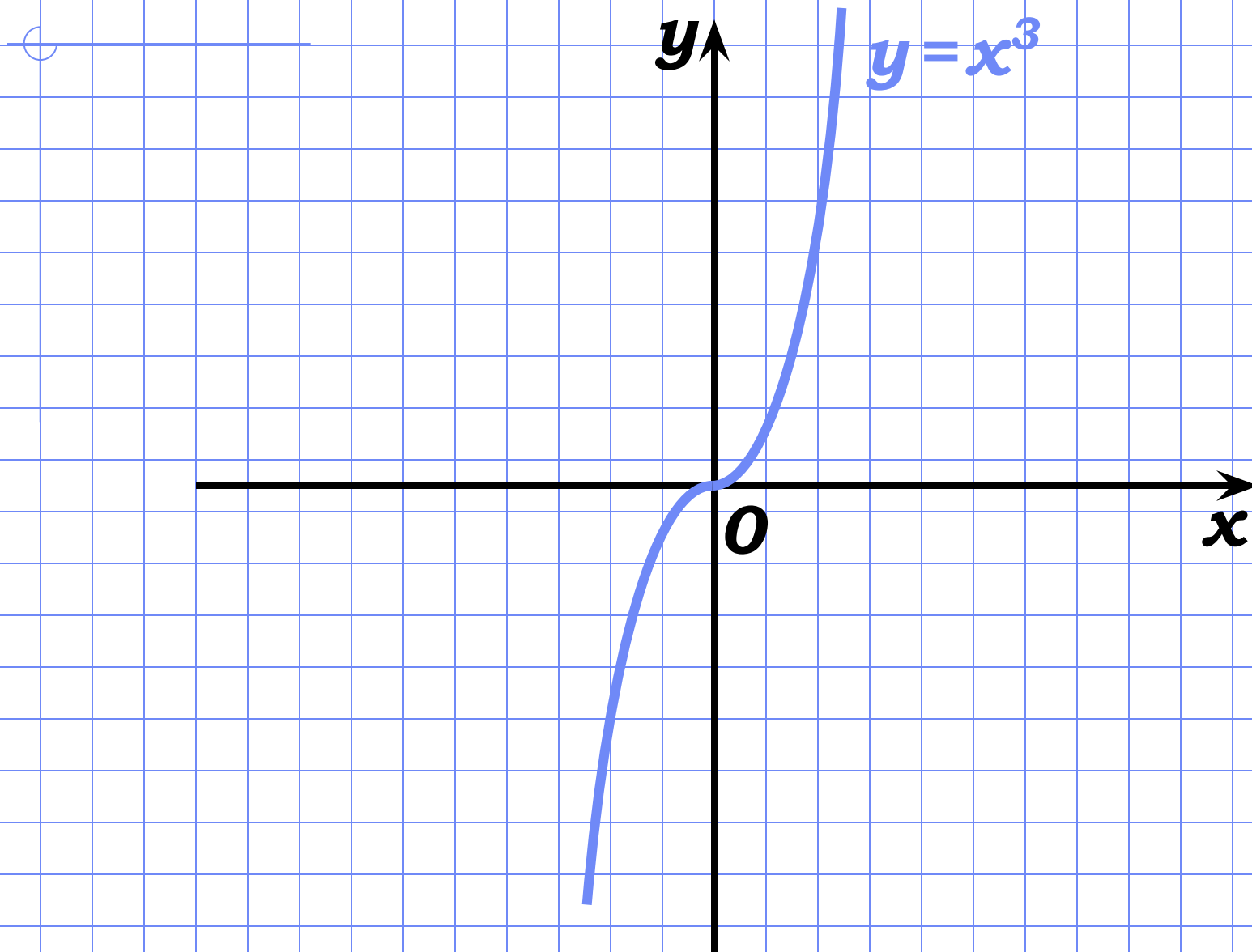
5. *Возрастает* на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

6. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Функция непрерывна на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

# Кубическая функция $y=x^3$



# Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}$ , $x \geq 0$

Свойства функции  $y = \sqrt[n]{x}$ ,  $x \geq 0$ :

1.  $D(f) = [0; +\infty)$ .

2.  $E(f) = [0; +\infty)$ .

3. Функция ни четная, ни нечетная.

4. а) Нули функции:  $(0; 0)$ ;

б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; 0)$ .

5.  $[0; +\infty)$  – промежуток возрастания функции.

6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.

7. а)  $y_{\text{наим.}} = 0$ ;

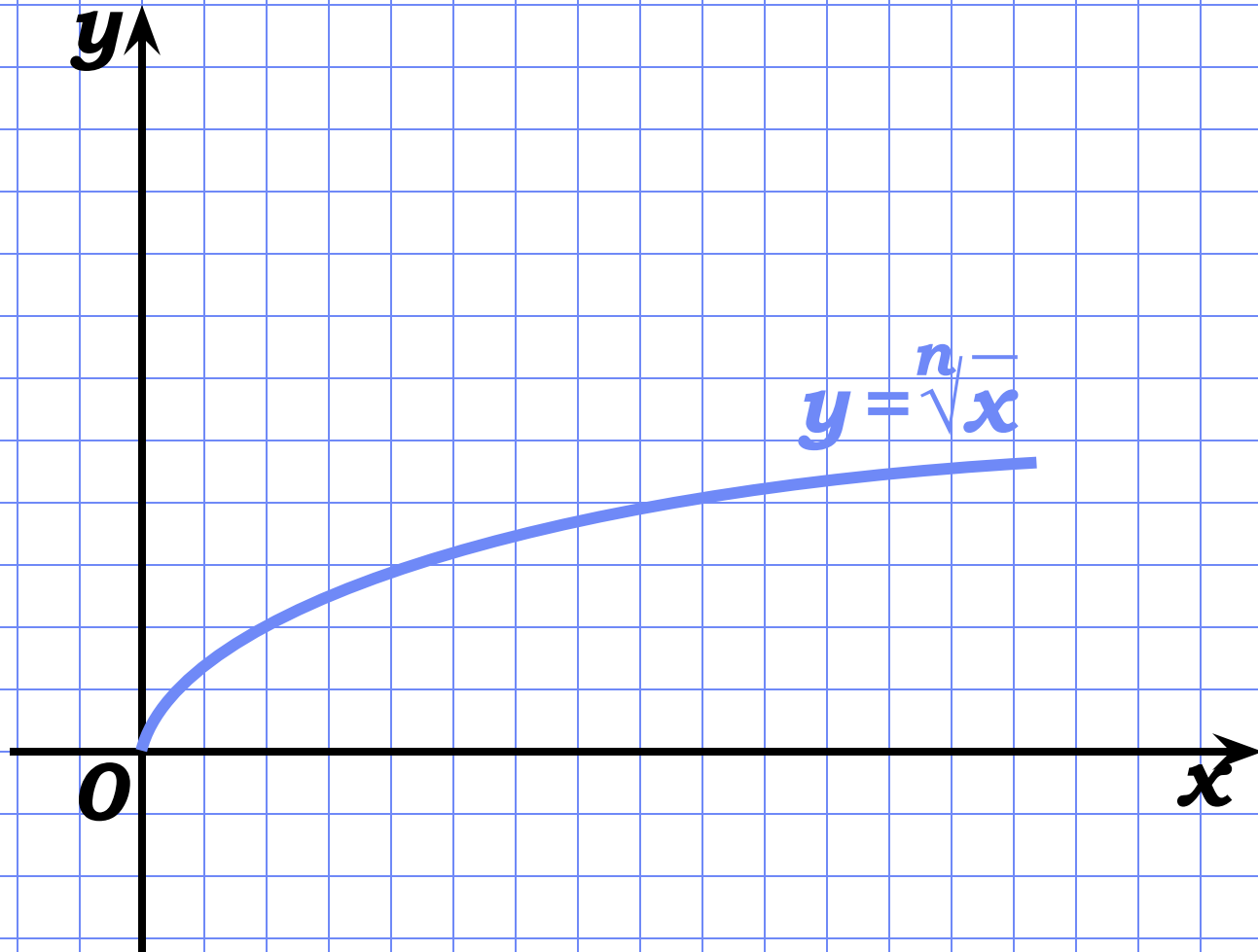
б)  $y_{\text{наиб.}}$  – не существует.

8. Непрерывна на множестве  $[0; +\infty)$ .

9. Выпукла вверх.



# Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$



# Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}$ ,

$n$  - нечетное

Свойства функции  $y = \sqrt[n]{x}$ ,  $n = 2k+1$ :

1.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ .

2.  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ .

3. Функция *нечетная*.

4. а) Нули функции:  $(0; 0)$ ;

б) точка пересечения с  $Oy$ :  $(0; 0)$ .

5. *Возрастает* на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

6. *Не ограничена* ни снизу, ни сверху.

7. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Функция непрерывна на множестве  $(-\infty; +\infty)$ .

# Степенная функция $y = \sqrt[n]{x}$ ,

$n$  - нечетное

