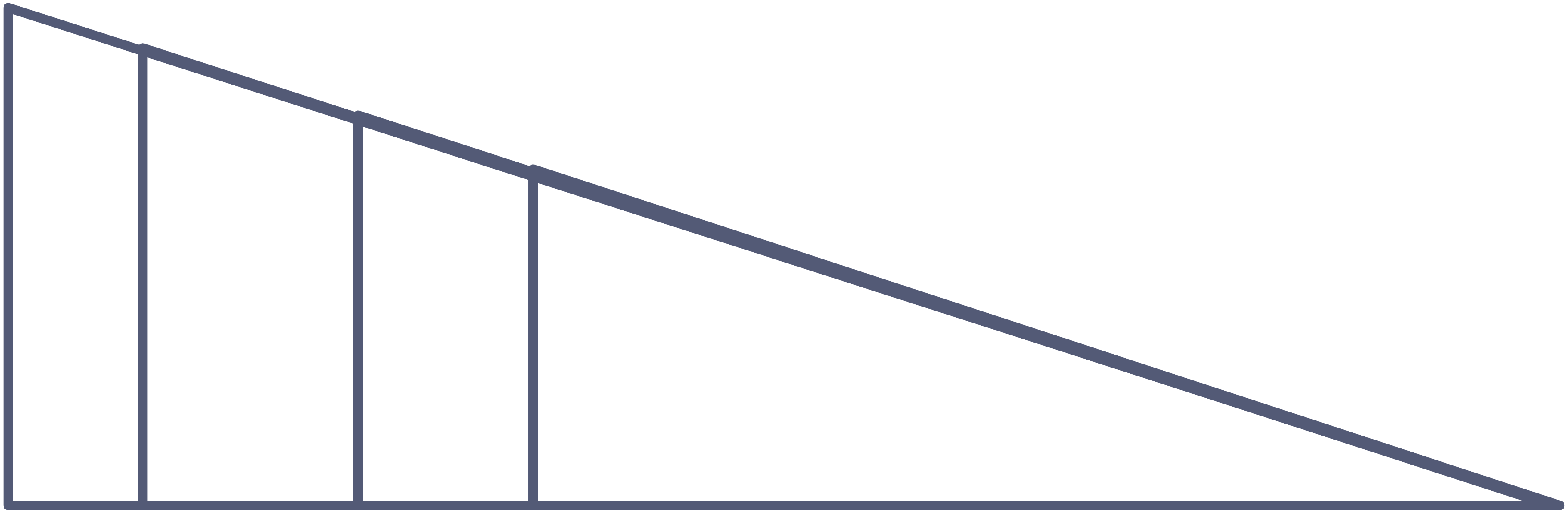
Тригонометрические функции острого и тупого углов

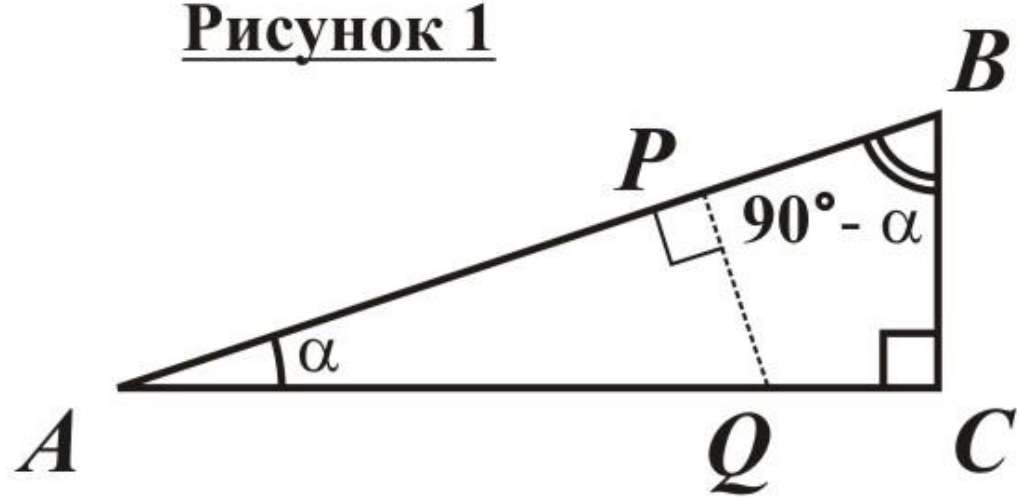
Тригонометрические функции острого угла



Определение

- Если рассмотреть два прямоугольных треугольника *APQ* и *ABC*, с общим острым углом α, то Δ*ABC* ~ Δ*AQP* по двум углам, а следовательно, их стороны пропорциональны.
- Тригонометрические функции острого угла определяются исключительно градусной мерой самого угла и не зависят от «надетого» на него треугольника

Рисунок 1



Определение

- ***Синусом острого угла прямоугольного треугольника*** *ABC* называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

- ***Косинусом острого угла прямоугольного треугольника*** *ABC* называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

Определение

- ***Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника*** *ABC* называется отношение противолежащего катета к прилежащему

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC}$$

- ***Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника*** *ABC* называется отношение прилежащего катета к противолежащему

$$ctg\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Найдем тригонометрические функции острого угла (90° - α)

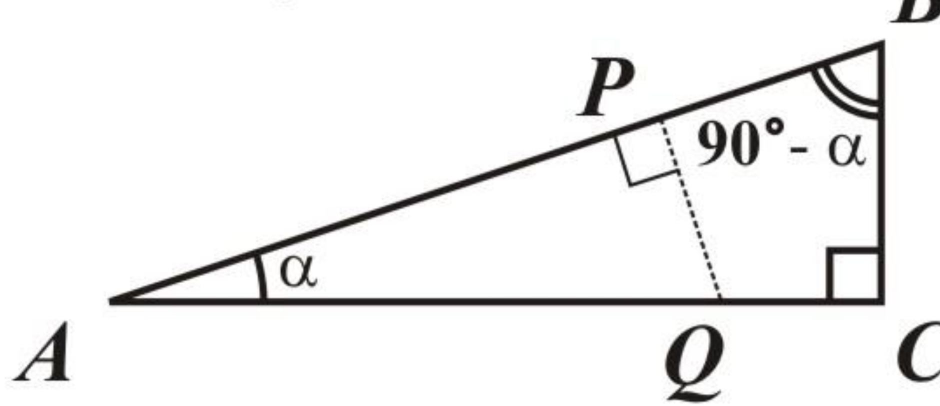
$$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$$

$$\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$$

$$tg\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{AC}{BC}=ctg\alpha$$

$$ctg\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{BC}{AC}=tg\alpha$$

Рисунок 1



«СИНУС»

- Слово встречается в индийских трудах IV-V вв.
- Линия синуса называлась «джива» – тетива лука. Позднее термин был переделан в «джаб». При переводе с арабского на латынь употребили слово sinus – дословный перевод слово «джайб».
- Для обозначения синуса использовались различные сокращения. Современное обозначение sin закрепилось в 18 веке (Симпсон, Эйлер, Д' аламбер, Лагранж), чему способствовал авторитет Эйлера, который перенял обозначения от И. Бернулли.

- «КОСИНУС». Сокращение выражения complementi sinus – «дополнительный синус». В трудах арабских математиков косинус рассматривался как синус дополнения угла до 90° (18 в.).

- «ТАНГЕНС». Тангенс и котангенс фигурировали в науке о солнечных часах у арабских математиков. В работах известного математика Ал-Хорезми (9 в.) приведены таблицы тангенсов и котангенсов. «Тангенс» происходит от латинского tangere – «касаться» (Финке, 1583)

- «КОТАНГЕНС». Котангенсы появились раньше тангенсов (арабские математики, 9 в.)

Тригонометрические тождества

С доказательством

Связь между синусом и косинусом (основное тригонометрическое тождество)

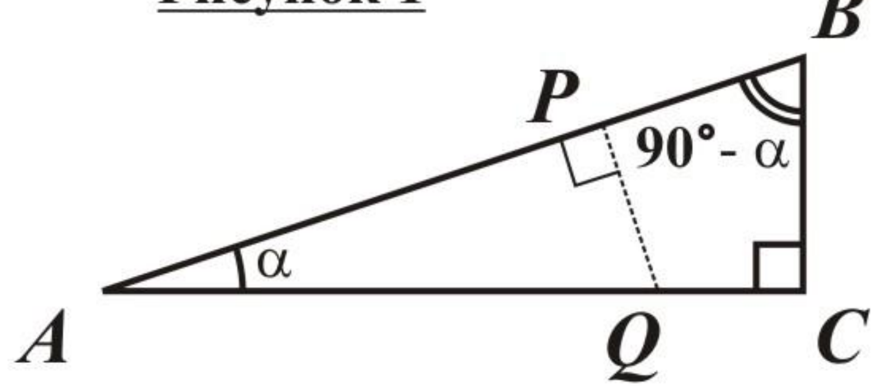
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- **Доказательство:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

(по теореме Пифагора)

Рисунок 1

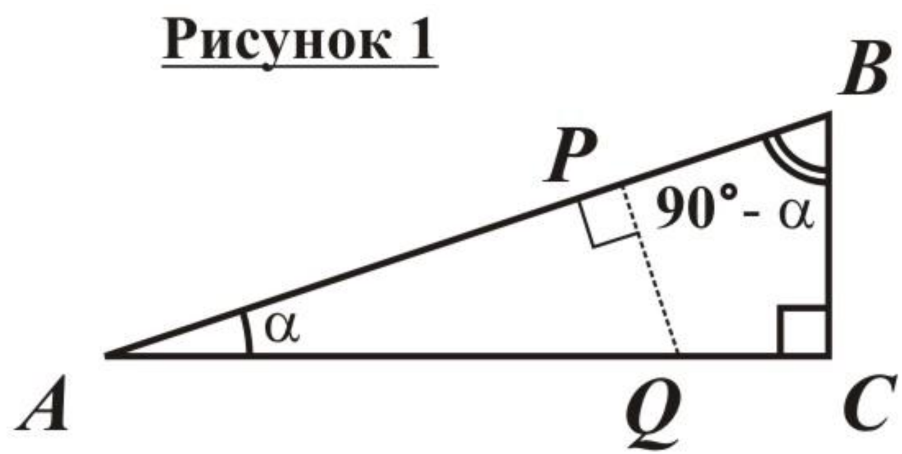


Связь между синусом, косинусом и тангенсом

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

- **Доказательство:**

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC \cdot \cancel{AB}}{\cancel{AB} \cdot AC} = \frac{BC}{AC} = tg\alpha$$



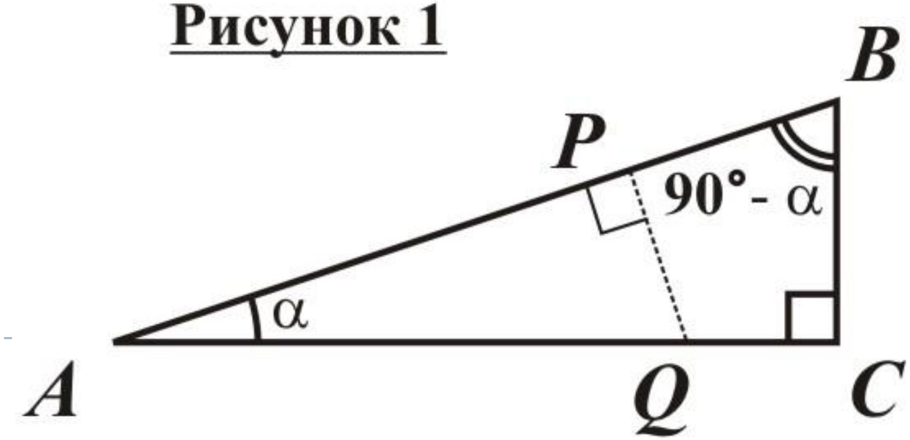
Связь между синусом, косинусом и котангенсом

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

- **Доказательство:**

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB} = \frac{AC \cdot \cancel{AB}}{\cancel{AB} \cdot BC} = \frac{AC}{BC} = ctg\alpha$$

Рисунок 1



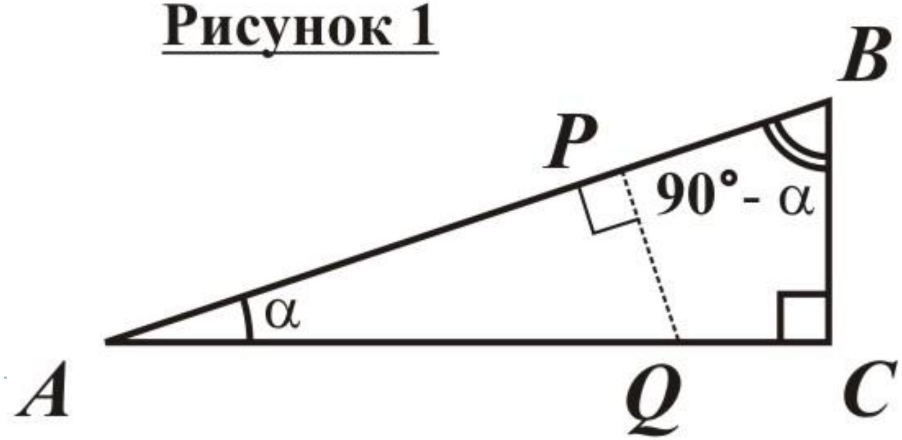
Связь между тангенсом и котангенсом

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

- **Доказательство:**

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$$

Рисунок 1



Связь между тангенсом и косинусом

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

- **Доказательство:**
- Разделим обе части основного тригонометрического тождества на $\cos^2\alpha\neq 0$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Big|:\cos^2\alpha\neq 0\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Связь между котангенсом и синусом

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

- **Доказательство:**
- Разделим обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha\neq 0$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Big|:\sin^2\alpha\neq 0\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

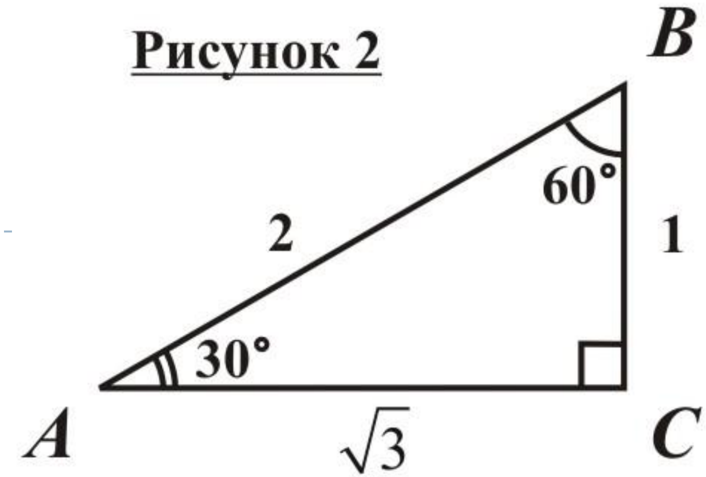
Значения тригонометрических функций углов в 30°, 45° и 60°.

- Рассмотрим прямоугольный треугольник с острыми углами в 30° и 60° и меньшим катетом, равным 1.
- По свойству прямоугольного треугольника с углом в 30°, *AB* = 2. Катет *AC* найдем по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

- Найдем тригонометрические функции углов в 30° и 60°:

Рисунок 2



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg 30^\circ = ctg 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg 30^\circ = tg 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$$

- Теперь рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным 1. Оба его острых угла равны по 45°. Найдем гипотенузу по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,45^\circ = ctg\,45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1$$

Рисунок 3

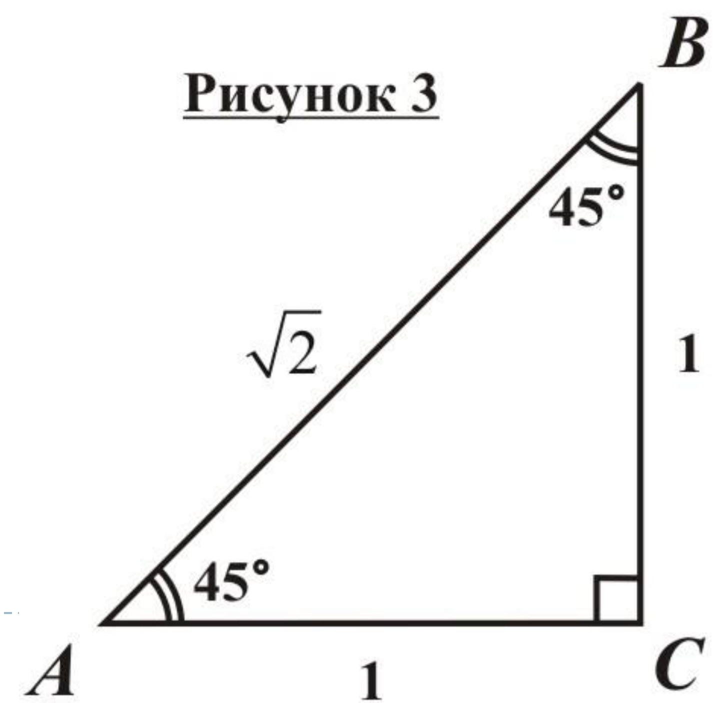


Таблица значений тригонометрических функций

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$