

## 2. ОДНОФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 2.1. Основные понятия о переменном токе

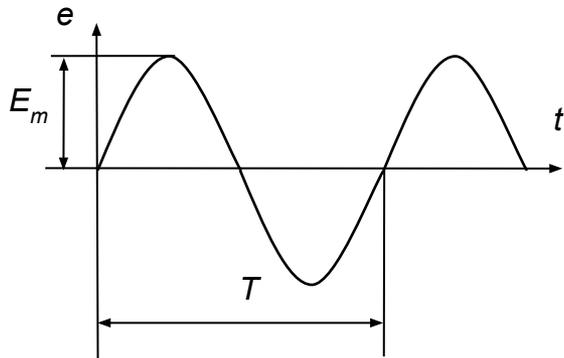


Рис. 15. Временная диаграмма изменения синусоидальной ЭДС

$$\left. \begin{aligned} e &= E_m \sin \omega t; \\ i &= I_m \sin \omega t; \\ u &= U_m \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

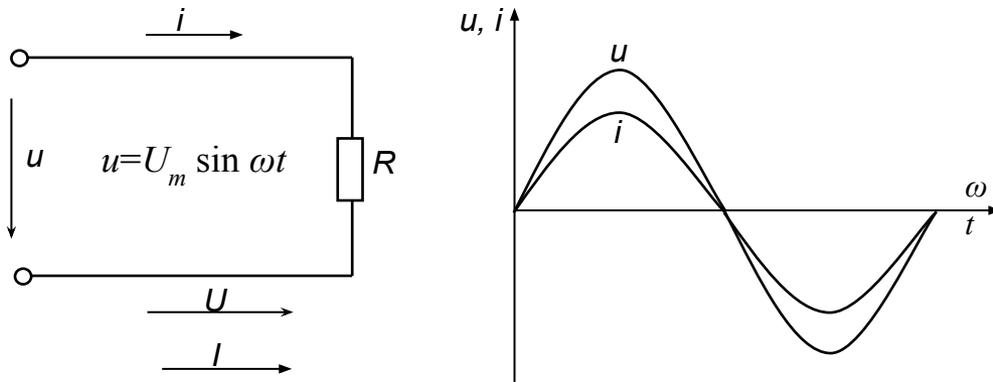
$$\omega = 2\pi f \quad (58)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (59)$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (60)$$

## 2.2. Элементы и параметры электрических цепей переменного тока

### 2.2.1. Цепь переменного тока с активным сопротивлением



$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t \quad (61)$$

$$i = I_m \sin \omega t \quad (62)$$

$$I = \frac{U}{R} \quad (63)$$

$$p = u \cdot i = U_m I_m \sin^2 \omega t \quad (64)$$

$$P = I^2 R \quad (65)$$

Рис. 16. Электрическая схема, графики изменения напряжения, тока и векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением

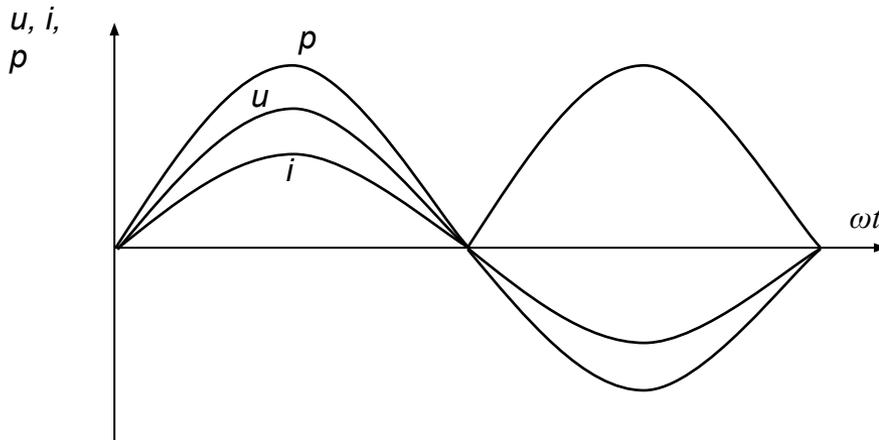


Рис. 17. Графики изменения мгновенных значений тока, напряжения и мощности в цепи с активным сопротивлением

## 2.2.2. Цепь переменного тока с индуктивным элементом

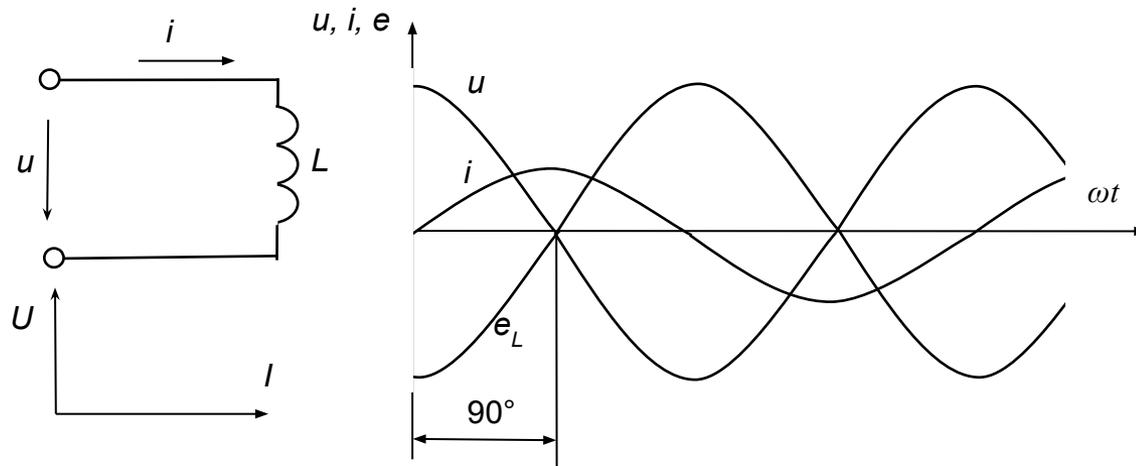


Рис. 18. Электрическая схема, графики изменения напряжения, тока, ЭДС самоиндукции и векторная диаграмма для цепи с индуктивным элементом

$$i = I_m \sin \omega t \quad (66)$$

$$u = -e_L \quad (67)$$

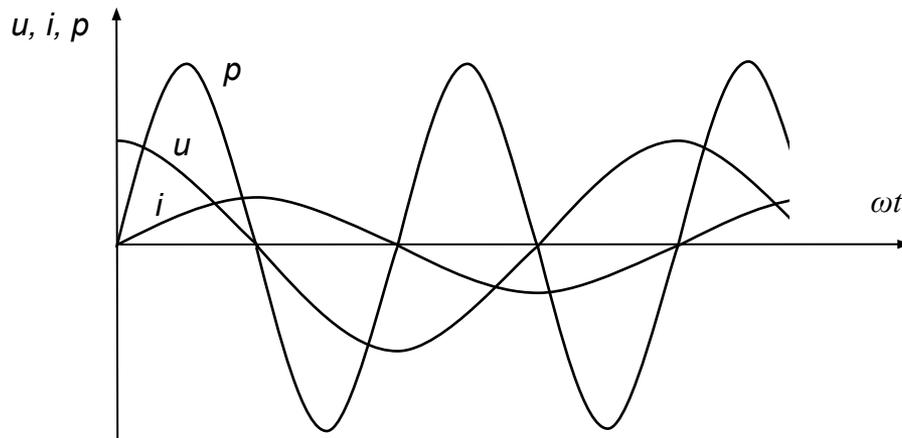


Рис. 19. Графики изменения напряжения, тока и мощности в цепи с индуктивным сопротивлением

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = -I_m L \omega \cos \omega t \quad (68)$$

$$u = I_m L \omega \cos \omega t = U_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (69)$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (70)$$

$$I = \frac{U}{X_L} \quad (71)$$

$$p = u \cdot i = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \cdot I_m \sin \omega t = \frac{1}{2} \cdot U_m \cdot I_m \sin 2\omega t \quad (72)$$

$$Q_L = I^2 X_L \quad (73)$$

### 2.2.3. Цепь переменного тока с емкостным элементом

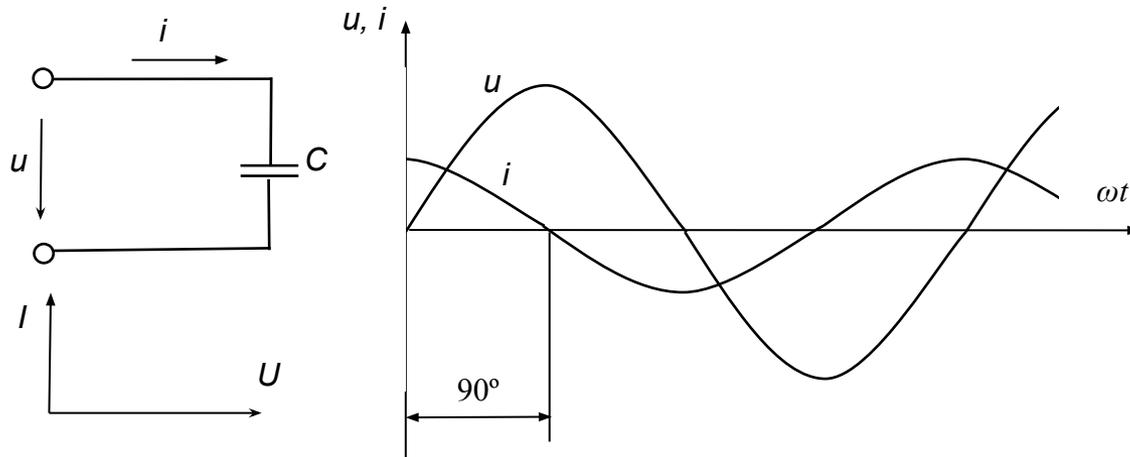


Рис. 20. Электрическая схема, графики изменения напряжения, тока и векторная диаграмма для цепи с емкостным элементом

$$u = U_m \sin \omega t \quad (74)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = U_m C \omega \cos \omega t = U_m C \omega \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (75)$$

$$i = U_m C \omega \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (76)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (77)$$

$$I = \frac{U}{X_C} \quad (78)$$

$$p = -u \cdot i = -U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = -\frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t. \quad (79)$$

$$Q_C = I^2 X_C \quad (80)$$

## 2.3. Анализ неразветвленной цепи переменного тока

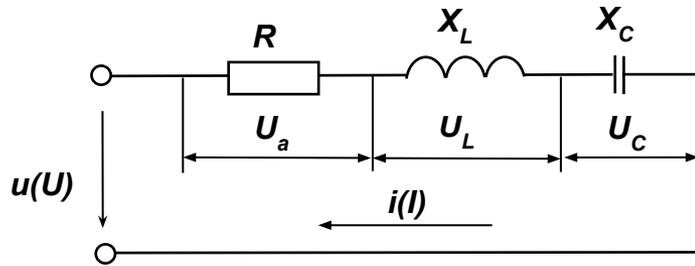


Рис. 21. Последовательное соединение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений

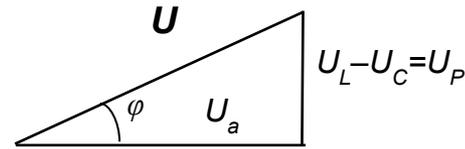


Рис. 23. Треугольник напряжений

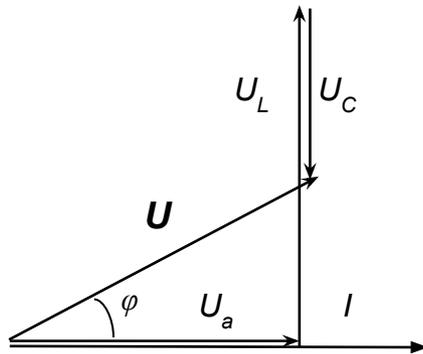


Рис. 22. Векторная диаграмма для схемы, состоящей из последовательно соединенных активного, индуктивного и емкостного сопротивлений

$$\left. \begin{aligned} U_a &= I \cdot R; \\ U_L &= I \cdot X_L; \\ U_C &= I \cdot X_C. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_L + \bar{U}_C \quad (82)$$

$$U_L > U_C \quad (83)$$

$$U_L < U_C \quad (84)$$

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{I^2 R^2 + (I X_L - I X_C)^2} = \\ &= I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \end{aligned} \quad (85)$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{Z} \quad (86)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (87)$$

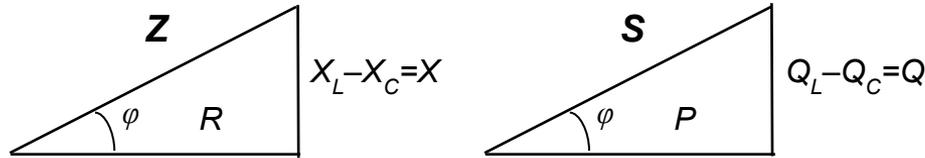


Рис. 24. Треугольники сопротивлений и мощностей

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (88)$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z} \quad (89)$$

$$S = IU \quad (90)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} \quad (91)$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (92)$$

$$P = S \cos \varphi = IU \cos \varphi \quad (93)$$

$$\sin \varphi = \frac{Q}{S} \quad (94)$$

$$Q = S \sin \varphi = IU \sin \varphi \quad (95)$$

## 2.4. Резонанс напряжений

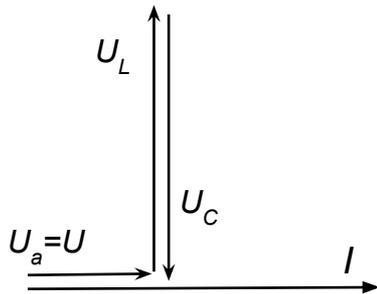


Рис. 25. Векторная диаграмма при резонансе напряжений

$$X_L = X_C \quad (96)$$

$$\omega_{рез}L = \frac{1}{\omega_{рез}C} \quad (97)$$

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (98)$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 0}} = \frac{U}{R} \quad (99)$$

$$U_L = U_C \quad (100)$$

$$X_L = X_C > R \quad (101)$$

## 2.5. Пример расчета неразветвленной цепи переменного тока

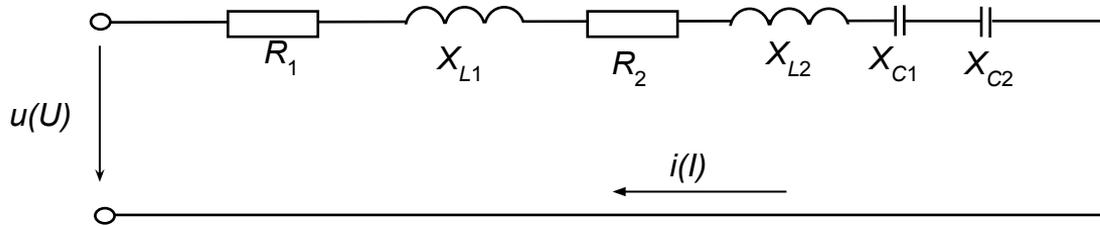


Рис. 26. Неразветвленная цепь переменного тока

Дано:

$$R_1 = 2 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 2 \text{ Ом};$$

$$X_{L1} = 4 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = 4 \text{ Ом};$$

$$X_{C2} = 2 \text{ Ом};$$

$$U = 220 \text{ В.}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4^2 + (9 - 6)^2} = 5 \text{ Ом}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{5} = 44 \text{ А}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{9 - 6}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\varphi = 36^\circ 50'$$

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 44 = 9680 \text{ ВА} = 9,680 \text{ кВА}$$

$$P = S \cdot \cos \varphi = 9680 \cdot 0,8 = 7744 \text{ Вт} = 7,744 \text{ кВт}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = 9680 \cdot 0,6 = 5808 \text{ ВАр} = 5,808 \text{ кВАр}$$

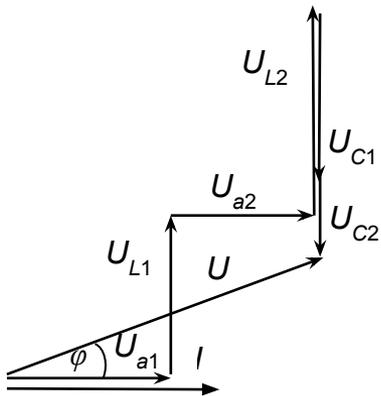


Рис. 27. Векторная диаграмма для неразветвленной цепи

$$U_a = I \cdot R$$

$$U_L = I \cdot X_L$$

$$U_C = I \cdot X_C$$

$$U_{L1} = I \cdot X_{L1} = 44 \cdot 4 = 176 \text{ В} \quad U_{a1} = I \cdot R_1 = 44 \cdot 2 = 88 \text{ В}$$

$$U_{L2} = I \cdot X_{L2} = 44 \cdot 5 = 220 \text{ В} \quad U_{a2} = I \cdot R_2 = 44 \cdot 2 = 88$$

$$U_{C1} = I \cdot X_{C1} = 44 \cdot 4 = 176 \quad U_{C2} = I_{C2} = 4 \cdot 2 = 88$$

$$\bar{\Delta}_I = I / m_I = \frac{44 \text{ А}}{10 \text{ А/см}} = 4,4 \text{ см}$$

$$\bar{\Delta}_{UL1} = U_{L1} / m_U = \frac{176 \text{ В}}{44 \text{ В/см}} = 4 \text{ см} \quad \bar{\Delta}_{Ua1} = U_{a1} / m_U = \frac{88 \text{ В}}{44 \text{ В/см}} = 2 \text{ см}$$

$$\bar{\Delta}_{UL2} = U_{L2} / m_U = \frac{220 \text{ В}}{44 \text{ В/см}} = 5 \text{ см} \quad \bar{\Delta}_{Ua2} = U_{a2} / m_U = \frac{88 \text{ В}}{44 \text{ В/см}} = 2 \text{ см}$$

$$\bar{\Delta}_{UC1} = U_{C1} / m_U = \frac{176 \text{ В}}{44 \text{ В/см}} = 4 \text{ см} \quad \bar{\Delta}_{UC2} = U_{C2} / m_U = \frac{88 \text{ В}}{44 \text{ В/см}} = 2 \text{ см}$$

$$U_{a1} \rightarrow U_{L1} \rightarrow U_{a2} \rightarrow U_{L2} \rightarrow U_{C1} \rightarrow U_{C2}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_{a1} + \bar{U}_{L1} + \bar{U}_{a2} + \bar{U}_{L2} + \bar{U}_{C1} + \bar{U}_{C2}.$$

## 2.6. Анализ разветвленной цепи переменного тока методом проводимостей

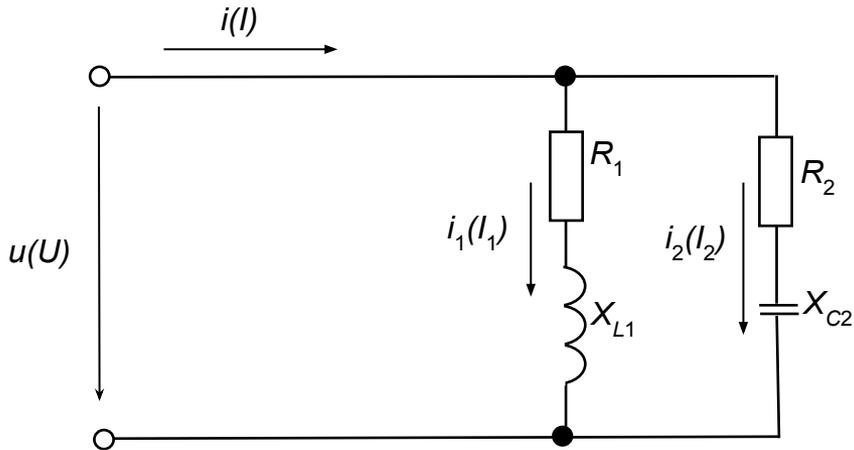


Рис. 28. Электрическая цепь с двумя параллельными ветвями

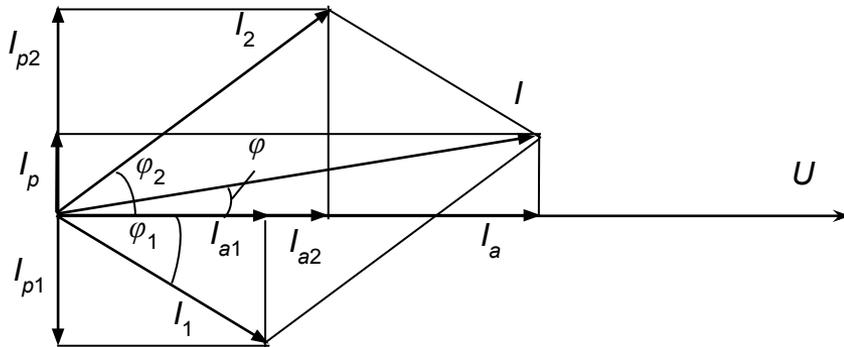
$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2}} \quad (102)$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2}} \quad (103)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} \quad (104)$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \quad (105)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_{a1} + \bar{I}_{p1}; \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_{a2} + \bar{I}_{p2}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$



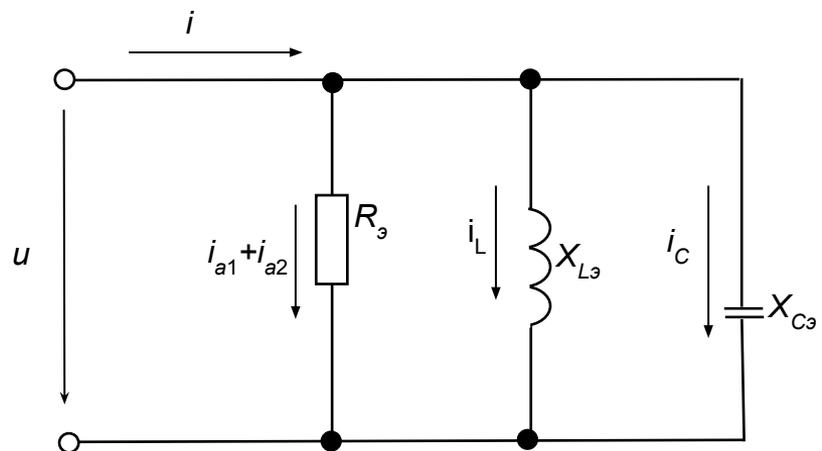
$$\left. \begin{aligned} I_{a1} &= I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U}{Z_1} \cdot \frac{R_1}{Z_1} = U \cdot \frac{R_1}{Z_1^2} = U \cdot g_1; \\ I_{a2} &= I_2 \cos \varphi_2 = \frac{U}{Z_2} \cdot \frac{R_2}{Z_2} = U \cdot \frac{R_2}{Z_2^2} = U \cdot g_2, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

$$g = g_1 + g_2 \quad (108)$$

$$I_{p1} = I_1 \cdot \sin \varphi_1 = \frac{U}{Z_1} \cdot \frac{X_{L1}}{Z_1} = U \cdot \frac{X_{L1}}{Z_1^2} = U \cdot b_{L1} \quad (109)$$

$$I_{p2} = I_2 \cdot \sin \varphi_2 = U \cdot b_{C2} \quad (110)$$

Рис. 29. Векторная диаграмма для электрической цепи с двумя параллельными ветвями



$$\left. \begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{g_1 + g_2}; \\ X_{L3} &= \frac{1}{b_{L1}}; \\ X_{C3} &= \frac{1}{b_{C2}}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Рис. 30. Эквивалентная схема разветвленной цепи

$$I_p = I_{p1} + (-I_{p2}) = U \cdot b_{L1} + (-U \cdot b_{C2}) = U \cdot [(b_{L1} + (-b_{C2}))] \quad (112)$$

$$g = \sum g_n \quad b = \sum b_n \quad (113)$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(U \cdot g)^2 + (U \cdot b)^2} = U \sqrt{g^2 + b^2} = U \cdot y \quad (114)$$

$$I = U \sqrt{(\sum g)^2 + (\sum b)^2} \quad (115)$$

## 2.7. Резонанс токов

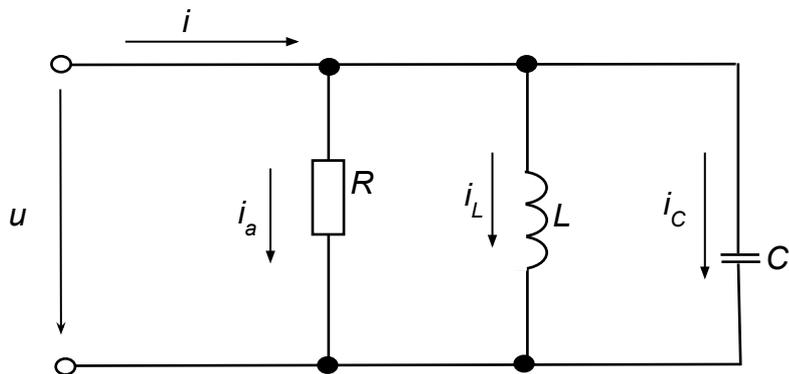


Рис. 31. Электрическая схема разветвленной цепи, иллюстрирующая резонанс токов

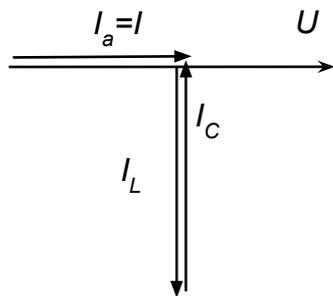


Рис. 32. Векторная диаграмма для разветвленной цепи при резонансе токов

$$b_L = b_C \quad (116)$$

$$b_L = \frac{1}{\omega_{рез} L}; \quad b_C = \omega_{рез} C \quad (117)$$

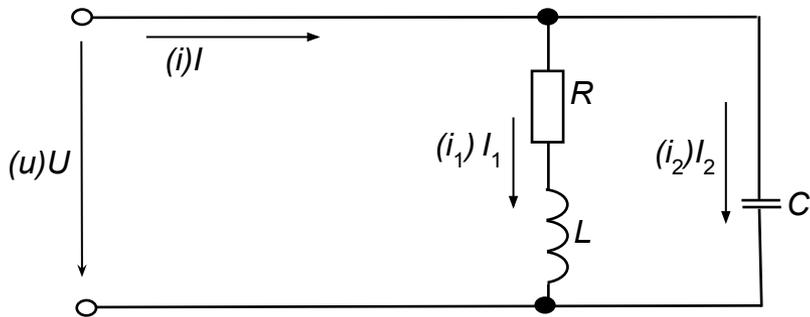
$$\omega_{рез} C = \frac{1}{\omega_{рез} L} \quad (118)$$

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (119)$$

$$I = U \cdot y = U \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} \quad (120)$$

$$I = U \cdot g \quad (121)$$

## 2.8. Пример расчета разветвленной цепи переменного тока



Дано:  $U=127$  В;  
 $f=50$  Гц;  
 $R=10$  Ом;  
 $L=63,7$  мГн;  
 $C=212$  мкФ.

Рис. 33. Схема разветвленной электрической цепи

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 63,7 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 212} = 15$$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,4$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{127}{22,4} = 5,67$$

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{127}{15} = 8,47$$

$$g_1 = \frac{R}{Z_1^2} = \frac{10}{22,4^2} = 0,02$$

$$b_{L1} = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{20}{22,4^2} = 0,04$$

$$b_{C2} = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{15} = 0,067$$

$$y = \sqrt{g_1^2 + (b_{L1} - b_{C2})^2} = \sqrt{0,02^2 + (0,04 - 0,067)^2} = 3,36 \cdot 10^{-2}$$

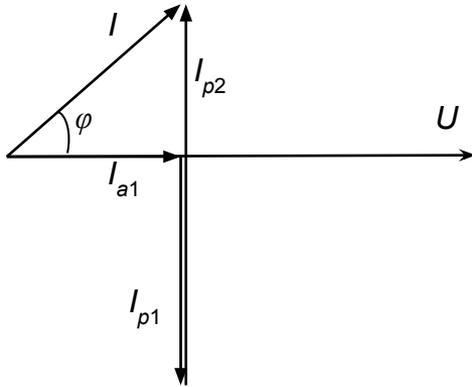


Рис. 34. Векторная диаграмма для разветвленной цепи

$$I = U \cdot y = 127 \cdot 3,36 \cdot 10^{-2} = 4,27 \text{ A.}$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{b_{L1}}{g_1} = \arctg \frac{0,04}{0,02} = \arctg 2 = 64^\circ$$

$$\varphi_2 = 90^\circ$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{g} = \arctg \frac{b_{L1} - b_{C2}}{g_1} = \arctg \frac{0,04 - 0,067}{0,02} = \arctg(-1,35) = -53^\circ 30'$$

$$S = U \cdot I = 127 \cdot 4,27 = 542 \text{ ВА}$$

$$P = S \cdot \cos \varphi = 542 \cdot 0,59 = 320 \text{ Вт}$$

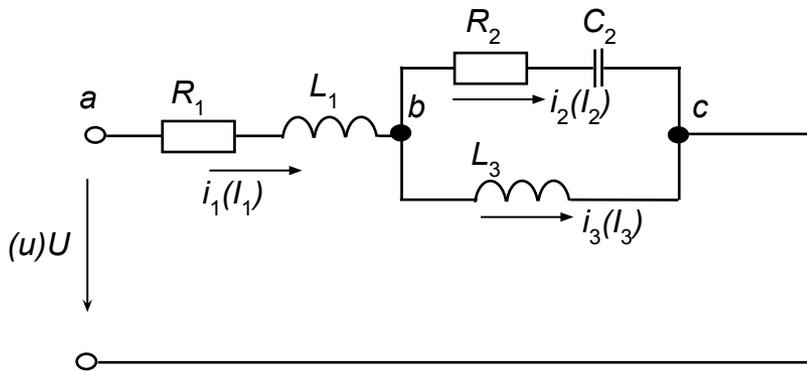
$$Q = S \cdot \sin \varphi = 542 \cdot 0,8 = 434 \text{ ВАр}$$

$$I_{a1} = U \cdot g_1 = 127 \cdot 0,02 = 2,54 \text{ A}; I_{p1} = U \cdot b_1 = 127 \cdot 0,04 = 5,08 \text{ A}$$

$$I_{p2} = I_2 = 8,47 \text{ A}$$

$$m_U = 20 \frac{\text{В}}{\text{см}} \quad m_I = 2 \frac{\text{А}}{\text{см}}$$

## 2.9. Пример расчета цепи переменного тока со смешанным соединением нагрузки



Дано:  $U=220$  В;  
 $f=50$  Гц;  
 $R_1=3$  Ом;  
 $R_2=3$  Ом;  
 $L_1=10$  мГн;  
 $L_3=50$  мГн;  
 $C_2=400$  мкФ

Рис. 35. Схема электрической цепи со смешанным соединением нагрузки

$$X_{L1} = 2\pi f L_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3,14 \text{ Ом}$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ Ом}$$

$$X_{L3} = 2\pi f L_3 = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 15,7 \text{ Ом}$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{3^2 + 3,14^2} = 4,34 \text{ Ом}$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8,5 \text{ Ом}$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + X_{L3}^2} = \sqrt{0^2 + 15,7^2} = 15,70 \text{ Ом}$$

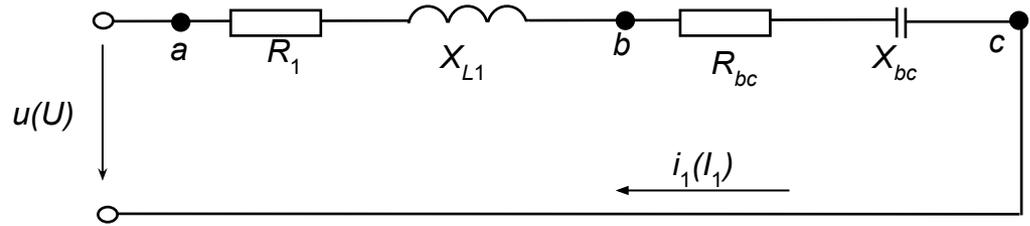


Рис. 36. Эквивалентная схема для расчета цепи со смешанным соединением нагрузки

$$g = \frac{R}{Z^2} \quad b = \frac{X}{Z^2}$$

$$g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{3}{8,5^2} = 0,0414 \text{ СМ}$$

$$b_{C2} = \frac{X_{C2}}{Z_2^2} = \frac{8}{8,5^2} = 0,1105 \text{ СМ}$$

$$b_{C2} = \frac{X_{C2}}{Z_2^2} = \frac{8}{8,5^2} = 0,1105 \text{ СМ}$$

$$b_{L3} = \frac{X_{L3}}{Z_3^2} = \frac{15,7}{15,7^2} = 0,0637 \text{ СМ}$$

$$y_{bc} = \sqrt{(g_2 + g_3)^2 + (b_{L3} - b_{C2})^2} = \\ = \sqrt{(0,0414 + 0)^2 + (0,0637 - 0,1105)^2} = 0,0622 \text{ СМ}$$

$$R_{bc} = \frac{g_{bc}}{y_{bc}^2} = \frac{g_2 + g_3}{y_{bc}^2} = \frac{0,0414 + 0}{0,0622^2} = 10,7 \text{ Ом}$$

$$X_{bc} = \frac{b_{bc}}{y_{bc}^2} = \frac{b_{L3} - b_{C2}}{y_{bc}^2} = \frac{0,0637 - 0,1105}{0,0622^2} = -12,1 \text{ Ом}$$

$$Z_{\text{экв}} = \sqrt{(R_1 + R_{bc})^2 + (X_{L1} - X_{bc})^2} = \\ = \sqrt{(3 + 10,7)^2 + (3,14 - 12,1)^2} = 16,35 \text{ Ом}$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_{\text{экв}}} = \frac{220}{16,35} = 13,45 \text{ А}$$

$$U_{bc} = I_1 Z_{bc} = \frac{I_1}{y_{bc}} = \frac{13,45}{0,0622} = 218 \text{ В}$$

$$U_{ab} = I_1 Z_1 = 13,45 \cdot 4,34 = 58,4 \text{ В}$$

$$I_2 = \frac{U_{bc}}{Z_2} = \frac{218}{8,5} = 25,7 \text{ А} \quad I_3 = \frac{U_{bc}}{Z_3} = \frac{218}{15,7} = 13,9 \text{ А}$$

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 13,45 = 2960 \text{ ВА} = 2,96 \text{ кВА}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{R_{\text{экв}}}{Z_{\text{экв}}} = \frac{R_1 + R_{bc}}{Z_{\text{экв}}} = \frac{3 + 10,7}{16,35} = 0,84$$

$$P = 2960 \cdot 0,84 = 2490 \text{ Вт} = 2,49 \text{ кВт}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = S \cdot \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{X_{\text{экв}}}{Z_{\text{экв}}} = \frac{X_{L1} - X_{bc}}{Z_{\text{экв}}} = \frac{3,14 - 12,1}{16,35} = 0,54$$

$$Q = 2960 \cdot 0,54 = 1600 \text{ ВАр} = 1,6 \text{ кВАр}$$

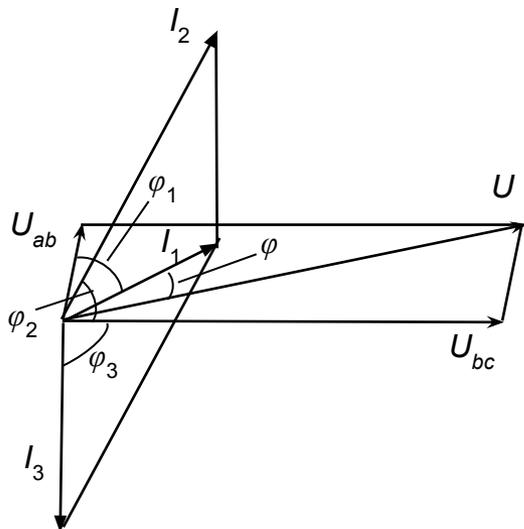


Рис. 37. Векторная диаграмма для схемы со смешанным включением нагрузки

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{3}{8,5} = 0,353 \quad \varphi_2 = 69^\circ 20'$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{R_3}{Z_3} = \frac{0}{15,7} = 0 \quad \varphi_3 = 90^\circ$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{3}{4,34} = 0,692 \quad \varphi_1 = 46^\circ 15'$$

$$\bar{U} = \bar{U}_{ab} + \bar{U}_{bc}$$

$$\cos \varphi = \frac{R_{\text{экв}}}{Z_{\text{экв}}} = \frac{13,7}{16,35} = 0,84 \quad \varphi = 32^\circ 45'$$