

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Основные понятия теории множеств

Понятие множества является одним из исходных (аксиоматических) понятий математики, то есть не сводимое к другим понятиям, а значит и не имеющее определения. Однако, можно дать описание множества.



Множество – некоторая совокупность объектов, называемых элементами этого множества.

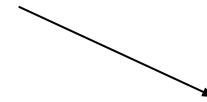
Основатель теории множеств - Георг Кантор, немецкий математик, 1845-1918.

Множества

по числу содержащихся в них
элементов делятся на 2 вида



конечные, содержат
конечное число элементов



бесконечные, содержат
конечное число элементов

В данном курсе рассматриваются конечные множества и бесконечные счетные множества, т.е. такие множества элементы которых можно пересчитать с помощью натуральных чисел.

1.1 Способы задания множеств

Множества обозначают большими латинскими буквами:

A, B, C, \dots

Элементы множеств обозначают малыми латинскими буквами:

a, b, c, \dots

Если элемент a *принадлежит* множеству A , то пишут:

$a \in A$

Если элемент a *не принадлежит* множеству A , то пишут:

$a \notin A$

Способы задания множеств:

1. Множество A определяется перечислением всех своих элементов:

Пример:

$$V = \{a, e, i, o, u, \tilde{o}, \ddot{a}, \ddot{o}, \ddot{u}\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2. Множество A определяется частичным перечислением своих элементов, которое выражает какую-то определенную закономерность:

Пример:

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$ – множество целых чисел

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – множество натуральных чисел

3. Множество A определяется как совокупность элементов из множества T , которые обладают свойством α :

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством α .

Пример:

$B = \{x \in N \mid x \bmod 2 = 0\}$ – множество четных натуральных чисел

$C = \{a \in N \mid a \text{ – простое число}\}$ – множество простых чисел

$D = \{n \in N \mid n > 1000 \ \& \ n < 2000\}$ – множество натуральных чисел больших 1000, но меньших 2000

1.2 Операции над множествами (теоретико-множественные операции)

Равенство множеств:

Множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов:

$$\{1, 3, 5\} = \{5, 1, 3\}$$

Подмножество:

Множество A является *подмножеством* множества B ,
 $A \subset B$,

если каждый элемент множества A принадлежит в то же время и множеству B :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

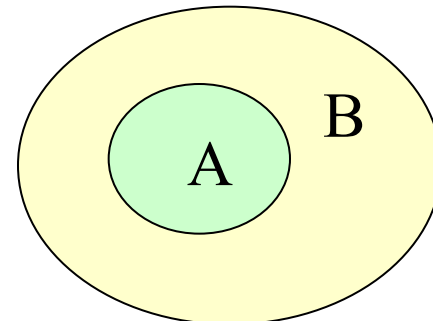


диаграмма Эйлера - Венна

Свойства:

1. $\forall A (A \subset A)$
2. $(A \subset B) \& (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

по определению равенства множеств:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \ \& \ \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Пустое множество:

Множество, которое не содержит ни одного элемента называется *пустым множеством* и обозначается символом \emptyset

$$\emptyset = \{ \}.$$

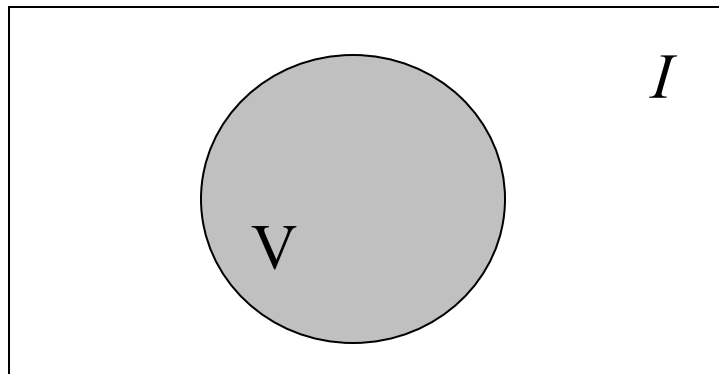
Свойство:

Пустое множество является подмножеством любого множества: $\forall A (\emptyset \subset A)$

Универсальное множество I :

Множество, которое содержит все возможные элементы, рассматриваемые в данном контексте.

Пример: $V = \{a, e, i, o, u, \tilde{o}, \tilde{a}, \tilde{o}, \ddot{u}\}$ – множество гласных букв



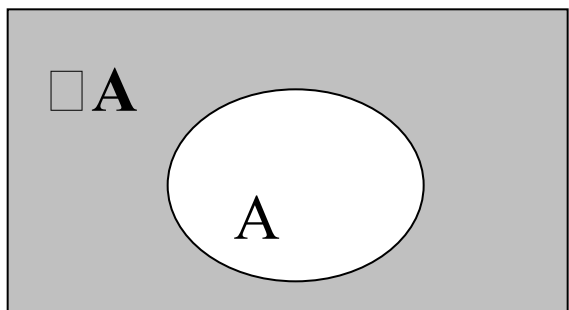
$I = \{\text{множество всех букв}\}$

Каждое множество A является подмножеством универсального множества:

$$\forall A (A \subset I)$$

Дополнение множества:

Элементы универсального множества I , не принадлежащие к множеству A , образуют *дополнение* множества A относительно универсального множества I , которое обозначают $\square A$



I

$$\square A = \{x \in I \mid x \notin A\}$$

Пример: дни недели делятся на будничные и выходные дни

$$I = \{E, T, K, N, R, L, P\}$$

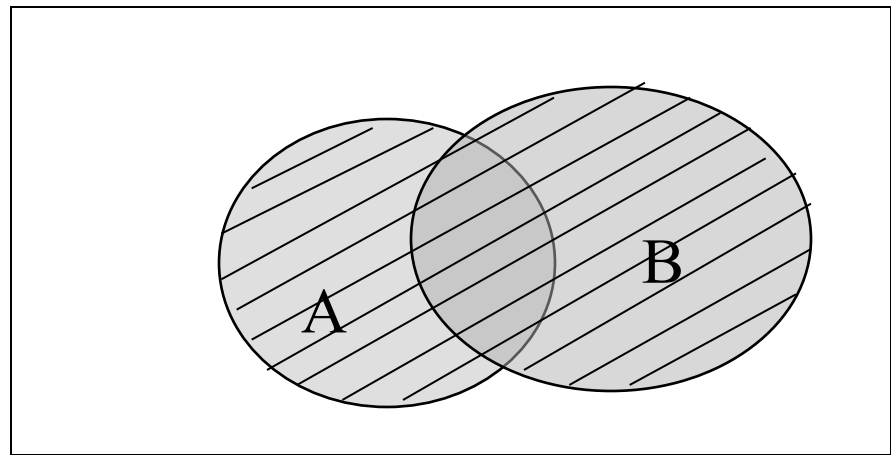
$$A = \{L, P\}$$

$$\square A = \{E, T, K, N, R\}$$

Объединение (сумма) множеств:

Объединение множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B :

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \} = A + B$$



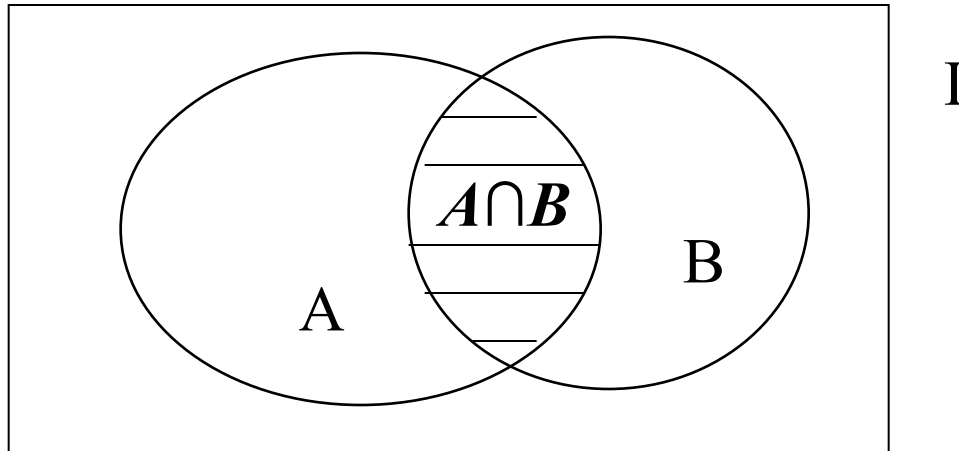
Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

Пересечение (общая часть, умножение) множеств:

Пересечение множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих одновременно множеству A и множеству B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} = AB$$



Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 7\}$$

Непересекающиеся множества:

Если $A \cap B = \emptyset$, то множества A и B *непересекающиеся* множества.

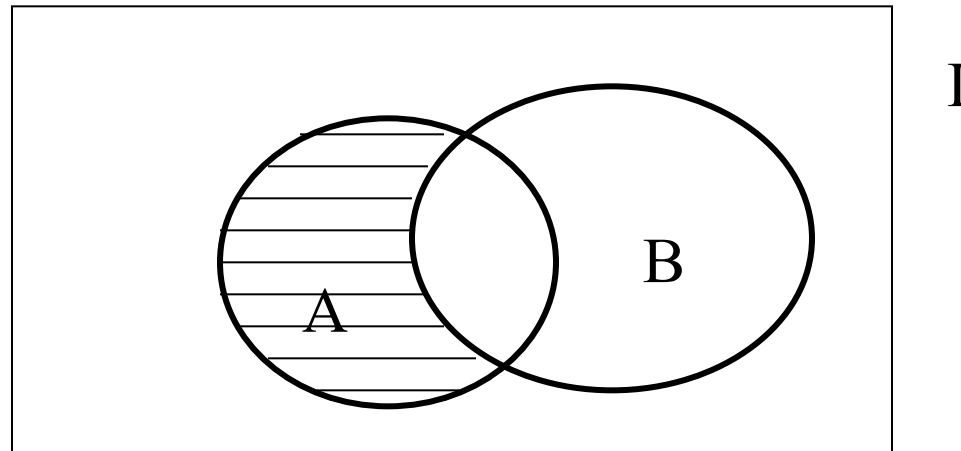
Пример:

$$\{1, 4, 7\} \cap \{2, 3, 6\} = \emptyset$$

Разность множеств:

Разность множеств A и B состоит из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B :

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$$



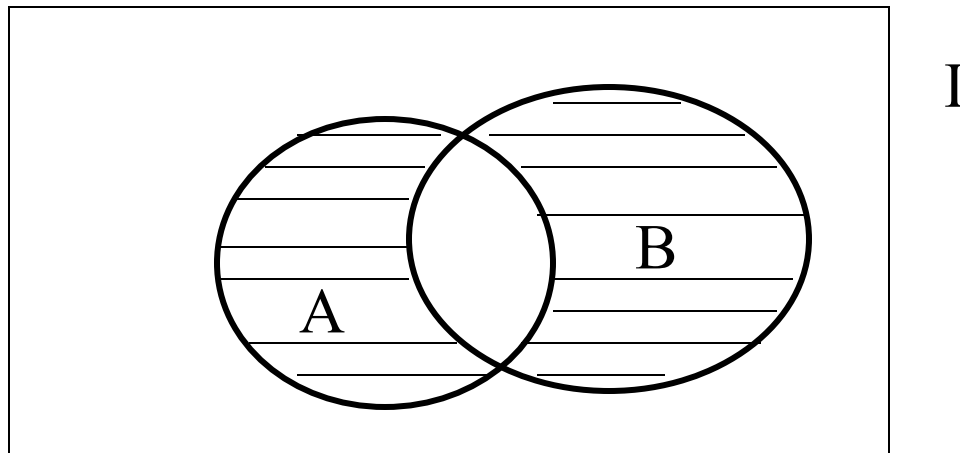
Пример:

$$\{1, 4, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1\}$$

Симметрическая разность множеств:

Симметрическая разность множеств A и B состоит из элементов принадлежащих множеству A или множеству B , но не принадлежащих множествам A и B одновременно:

$$A \nabla B = \{ x \mid (x \in A) \& (x \notin B) \vee (x \notin A) \& (x \in B) \}$$



Пример:

$$\{1, 4, 7\} \nabla \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 6\}$$

Приоритет выполнения операций

Сначала выполняются операции **дополнения**, затем **пересечения**, **объединения**, **разности** и **симметрической разности** которые имеют одинаковый приоритет.

Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения и нет скобок, то сначала выполняется операция **пересечения**, а потом – операция **объединения** (аналог сложению и умножению в арифметике).

1.3 Выражение теории множеств

При помощи теоретико-множественных операций из множеств образуют *выражения*.

Определение 1.3.1 выражение теории множеств определяется следующим образом:

1. Все множества A, B, \dots - выражения теории множеств;
2. Пустое множество \emptyset и универсальное множество I - выражения (константы) теории множеств;
3. Если A – выражение теории множеств, то $\neg A$ – тоже выражение теории множеств;
4. Если A и B - выражения теории множеств, то $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \nabla B$ – тоже выражения теории множеств.

Свойства теоретико-множественных операций

1. $\overline{\overline{A}} = A$

2. Коммутативность:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

3. Ассоциативность:

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. Дистрибутивность:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Идемпотентность:

a) $A \cap A = A$

b) $A \cup A = A$

6. Действия с константами:

$$\text{a) } A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{b) } A \cup \emptyset = A$$

$$\text{d) } A \cup I = I$$

$$\text{e) } A \cap I = A$$

7. Законы де Моргана:

$$\text{c) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\text{a) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\text{b) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

8. Преобразование разности:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

9. Преобразования симметрической разности:

$$\text{a) } A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\text{b) } A \nabla B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

10. Законы склеивания:

$$\text{a) } (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

$$\text{b) } (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$$

11. Законы поглощения:

$$\text{a) } A \cap (A \cup B) = A$$

$$\text{b) } A \cup (A \cap B) = A$$

1.4 Нормальные формы Кантора (НФК)

Нормальной формой Кантора (НФК) выражения теории множеств называют выражение, которое представляет собой пересечение объединений или объединение пересечений.

Пересечение объединений в теории множеств аналогично КНФ в мат. логике.

$$(A \cup B) \cap (\neg A \cup C)$$

Объединение пересечений в теории множеств аналогично ДНФ в мат. логике.

$$(A \cap B) \cup (\neg A \cap C)$$

Дополнение в нормальной форме может быть применено только к **отдельным множествам**, не к их объединению или пересечению.

Совершенной нормальной формой Кантора (СНФК)

выражения теории множеств называют такое пересечение объединений или объединение пересечений, где в каждом пересечении/объединении присутствует каждое множество выражения и точно один раз.

Задача 1. Доказать равенство выражений теории множеств:

$$A) \quad \overline{(A \cup B)} \cap (A \setminus B) = A \setminus B$$

$$B) \quad A \setminus ((\overline{A} \setminus B) \cap \overline{(A \cup B)}) = A$$

$$C) \quad (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cap \overline{C}) = \overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C})$$

$$D) \quad A \setminus (A \cap B) = \overline{B} \setminus \overline{A}$$

Задача 2. Найти СНФК:

A) $[(A \setminus B) \cup (A \nabla B) \cup (A \setminus C)] \cap \bar{A}$

B) $(A \nabla C) \cup (A \cap B \cap C)$

C) $(\bar{A} \setminus \bar{C}) \cup (B \boxtimes C) \cup (A \nabla B)$

D) $\overline{[(\overline{A \setminus B}) \cap (\overline{B \setminus C})]} \cup \overline{C \setminus A}$

Задача 3. Найти МНФК:

A) $H(A,B,C)=(0,2,3,4,6)$

B) $H(A,B,C,D)=(0,1,4,5,8,9,14)$

C) $H(A,B,C,D)=(1,3,4,5,7,8,9,11,12,15)$

1.5. Мощность множеств. Формулы Грассмана

Мощностью конечного множества A называют количество (число) элементов этого множества и обозначают $|A|$.

Формулы Грассмана позволяют найти мощность объединения множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Задача 4.

В группе 25 студентов. Для допуска к экзамену необходимо получить зачет по двум контрольным работам. По первой контрольной работе зачет получили 20 студентов, по второй 21. Сколько студентов (минимум и максимум) будет допущено к сдаче экзамена.

Задача 5.

Множество A состоит из натуральных чисел от 1 до 1000. Сколько элементов множества A не делится ни на 3, ни на 5.

Задача 6.

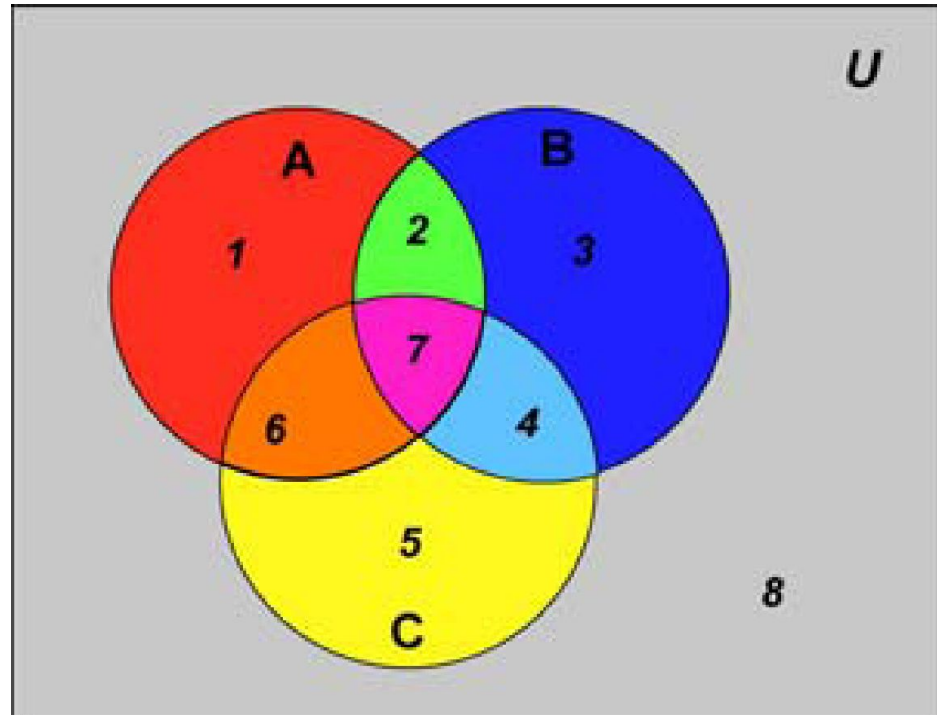
Каждый студент физико-математического факультета интересуется физикой или математикой. Сколько студентов интересуется и физикой, и математикой, если математикой интересуется 84%, а физикой 64% студентов.

Задача 7.

По результатам опроса 100 студентов 28 из них интересуется искусством, 30 музыкой, 42 спортом. 10 студентов интересуются и искусством, и спортом. 5 студентов интересуются и искусством, и музыкой. 8 студентов интересуются и спортом, и музыкой. 3 студента интересуются и искусством, и музыкой, и спортом. Сколько студентов интересуются только спортом? Только музыкой? Ничем из перечисленного?

8 возможных областей представимых
 диаграммой Венна для трёх множеств

1. $A \cap B \cap \bar{C}$
2. $A \cap B \cap C$
3. $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$
4. $\bar{A} \cap B \cap C$
5. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$
6. $A \cap \bar{B} \cap C$
7. $A \cap B \cap C$
8. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



1.6. Прямое произведение множеств

Прямое произведение множеств A и B состоит из упорядоченных пар элементов этих множеств

$$A \times B = \{ (a, b) \mid (a \in A) \& (b \in B) \}$$

Свойства:

1. $A \times B \neq B \times A$
2. $|A \times B| = |A| \times |B|$

Пример: $A = \{ a, b, c \}$ $B = \{ 1, 2 \}$

$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2) \}$

Прямое произведение нескольких множеств:

$$A \times B \times C \times D \times \dots \times Y = \{(a, b, c, d, \dots, y) \mid a \in A, b \in B, \dots, y \in Y\}$$

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k = A^k - \text{Декартова степень множества } A$$

к раз

Пример:

$$R \times R = R^2 - \text{xy-плоскость}$$

$$R \times R \times R = R^3 - \text{xyz-пространство}$$

Множество всех подмножеств множества A называется *булеаном* A или *степенью множества* A , и обозначается $P(A)$ или 2^A .