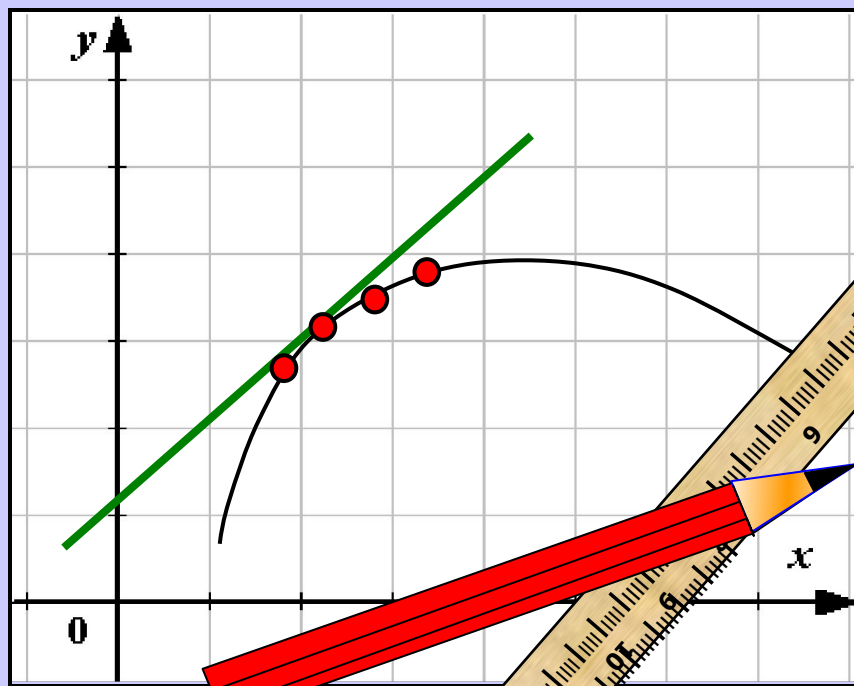


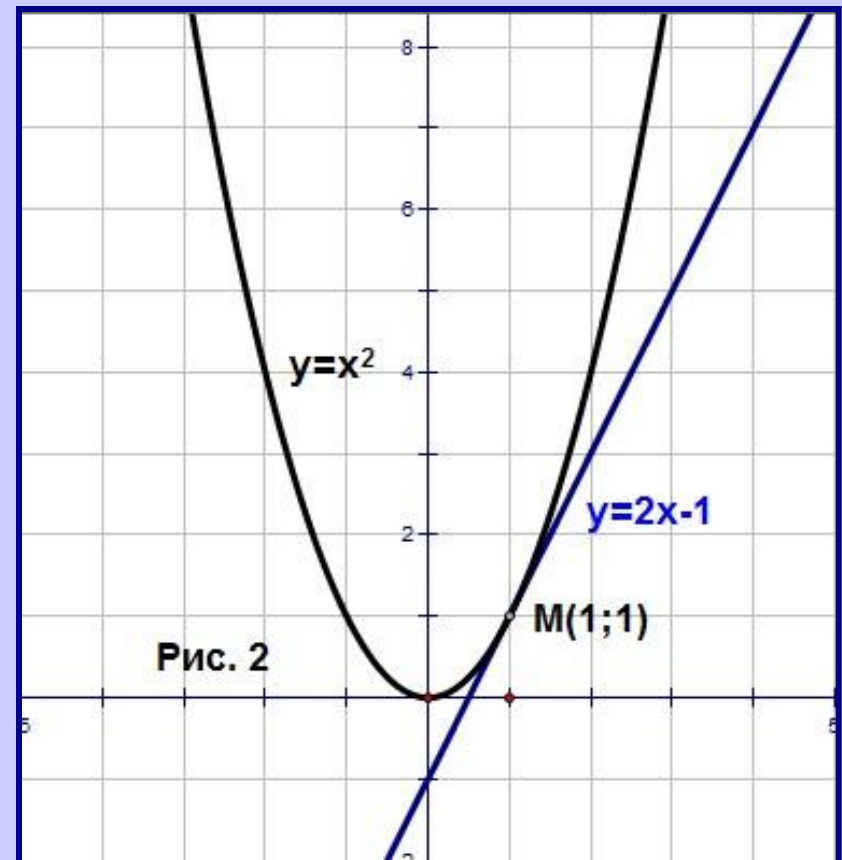
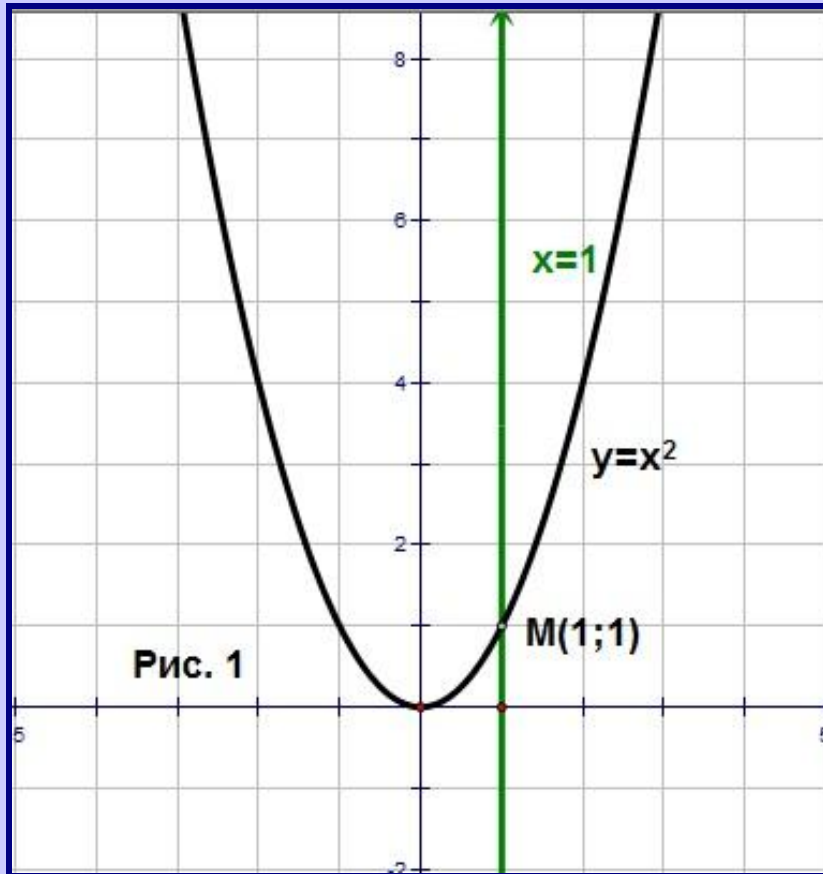
# Уравнение касательной к графику функции



# Верно ли определение?

Касательная - это прямая,  
имеющая с данной кривой  
одну общую точку.

Пусть дана  $y = x^2$  и две прямые  $x = 1$  и  $y = 2x - 1$ ,  
имеющая с данной параболой одну общую точку  $M$   
 $(1; 1)$ .



# На данном уроке:

1. выясним, что же такое касательная к графику функции в точке, как составить уравнение касательной;
2. рассмотрим основные задачи на составление уравнения касательной.

Для этого:

- вспомним общий вид уравнения прямой
- условия параллельности прямых
- определение производной
- правила дифференцирования
- Формулы дифференцирования

# Определение производной

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку  $x_0$ . Дадим аргументу  $\Delta x$  приращение такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение  $\Delta y$  функции и составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Если существует предел отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то указанный предел называют **производной функции**  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначают  $f'(x_0)$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

# Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной.

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

# Основные формулы дифференцирования

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$x^\alpha$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\operatorname{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

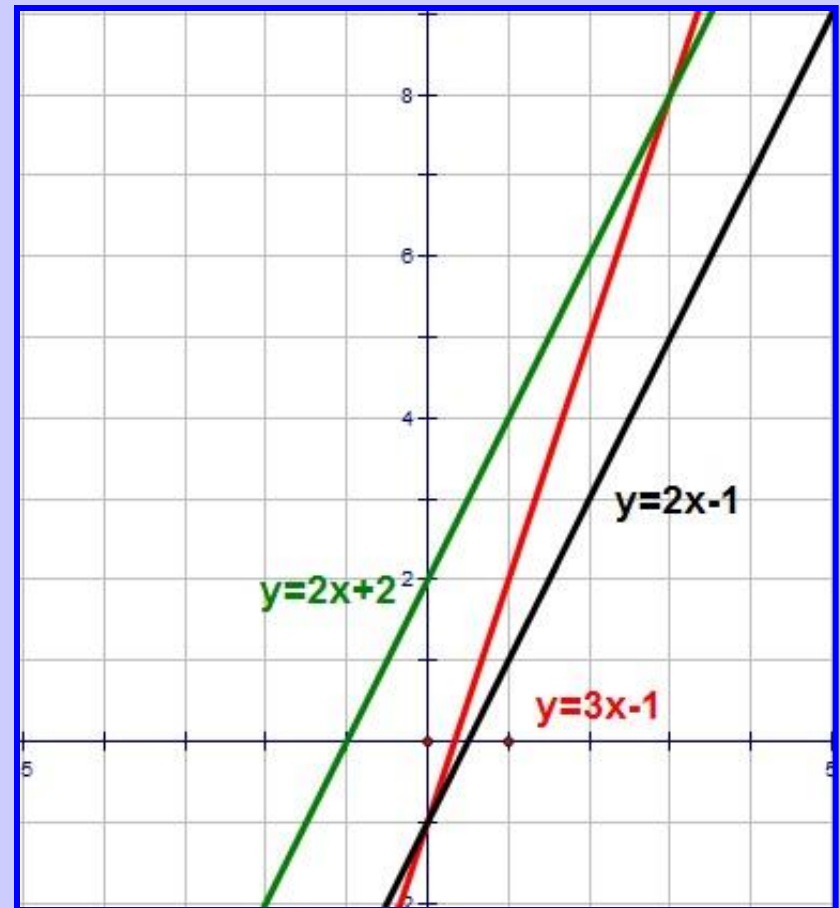
Две **прямые параллельны** тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны

Параллельны ли прямые:

а)  $y = 2x - 1$ ;

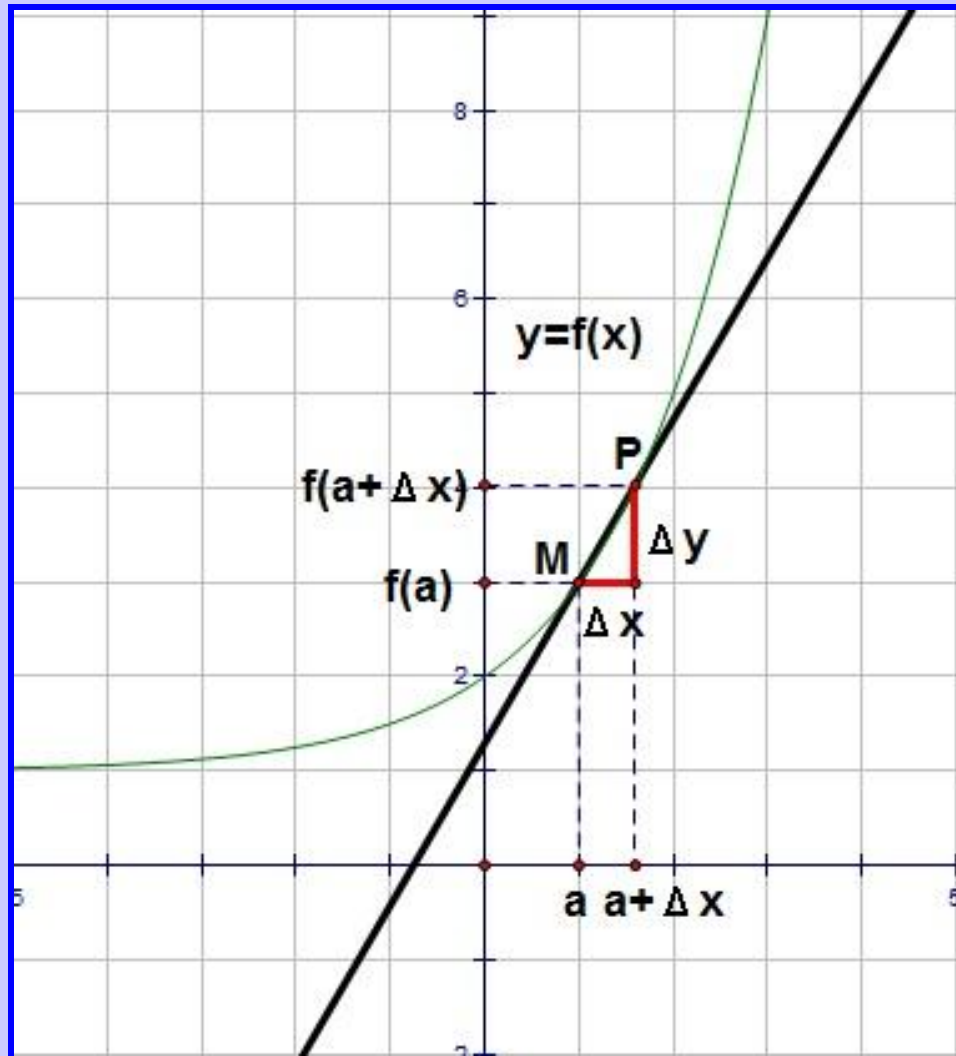
б)  $y = 2x + 2$ ;

в)  $y = 3x - 1$ .





Пусть дан график функции  $y=f(x)$ . На нем выбрана точка  $M(a; f(a))$ , в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.



$$y = f(x), M(a; f(a))$$

$$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

# Геометрический смысл производной

Если к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  можно провести касательную, непараллельную оси  $y$ , то  $f'(a)$  выражает угловой коэффициент касательной

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = f'(a)$$

# Геометрический смысл производной

Производная в точке

$x = x_0$  равна

угловому коэффициенту

касательной к

графику функции

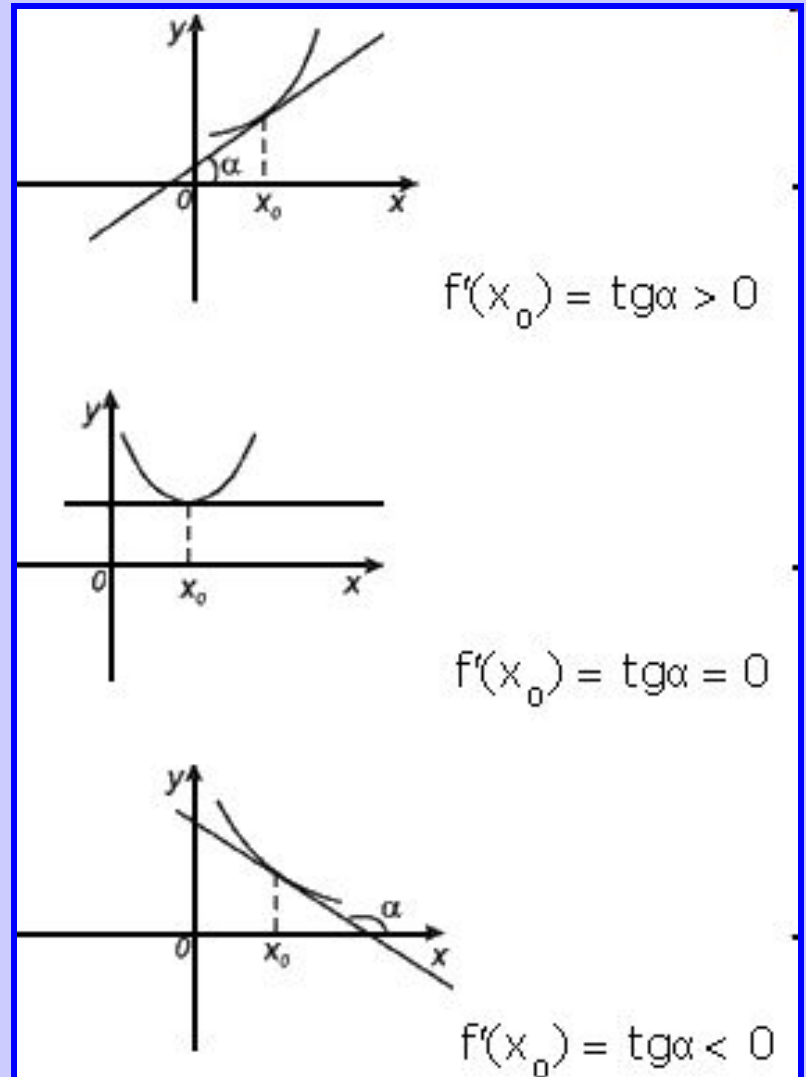
$y = f(x)$  в этой точке.

Т.е.  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$

Причем, если

:

1.  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$ , то  $\alpha$  – острый
2.  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$ , то  $\alpha$  – развернутый
3.  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$ , то  $\alpha$  – тупой



# Вывод уравнения касательной

Пусть прямая задана уравнением  $y = kx + m$ ,  $M(a; f(a))$

$$k = f'(a)$$

$$f(a) = ka + m$$

$$m = f(a) - ka$$

$$y = kx + (f(a) - ka)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

уравнение касательной к

графику функции

$$y = f(x)$$

# Составить уравнение касательной:

□ к графику функции  $f(x) = x^2$  в точке  $M(1;1)$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f'(x) = 2x$$

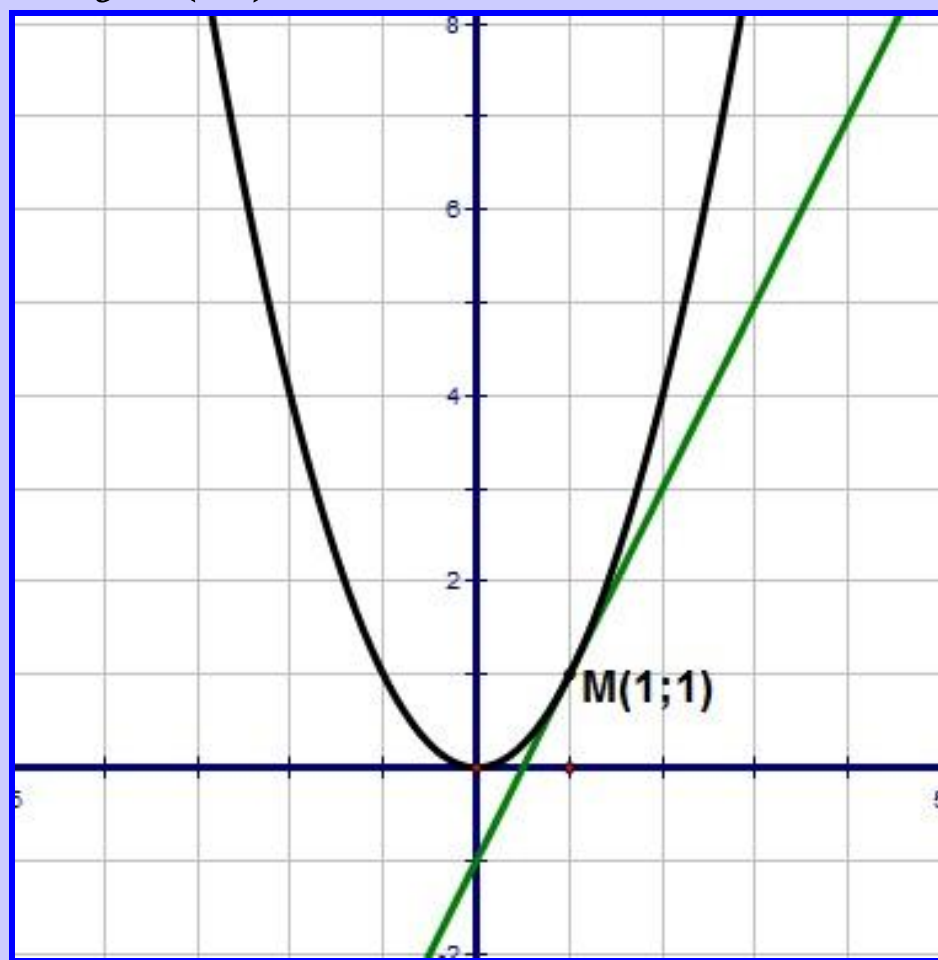
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$

$$y = 1 + 2x - 2$$

$$y = 2x - 1$$



# Составить уравнение касательной:

□ к графику функции  $y = \operatorname{tg}x$  в точке  $M(0;0)$

$$f(0) = \operatorname{tg}0 = 0$$

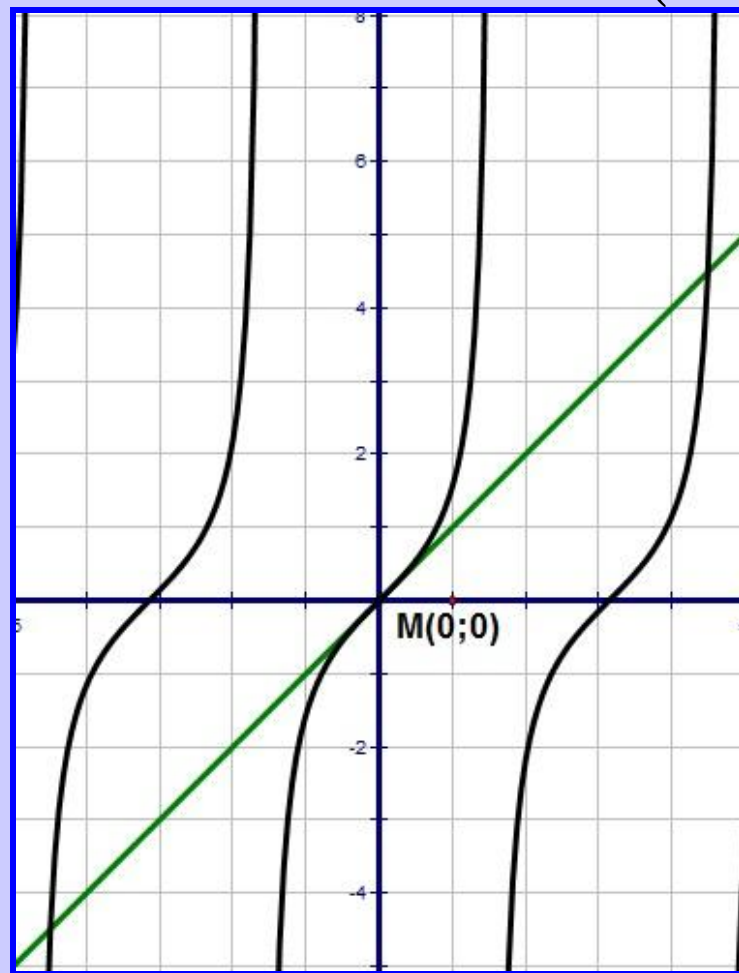
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 0 + 1 \cdot (x - 0)$$

$$y = x$$



# Алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ .

1. Обозначим абсциссу точки касания буквой  $x=a$ .
2. Вычислим  $f(a)$ .
3. Найдем  $f'(x)$  и  $f'(a)$ .
4. Подставим найденные числа  $a$ , в формулу

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Составить уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $x = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1)  $a = 1$

2)  $f(a) = f(1) = 1$

3)  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

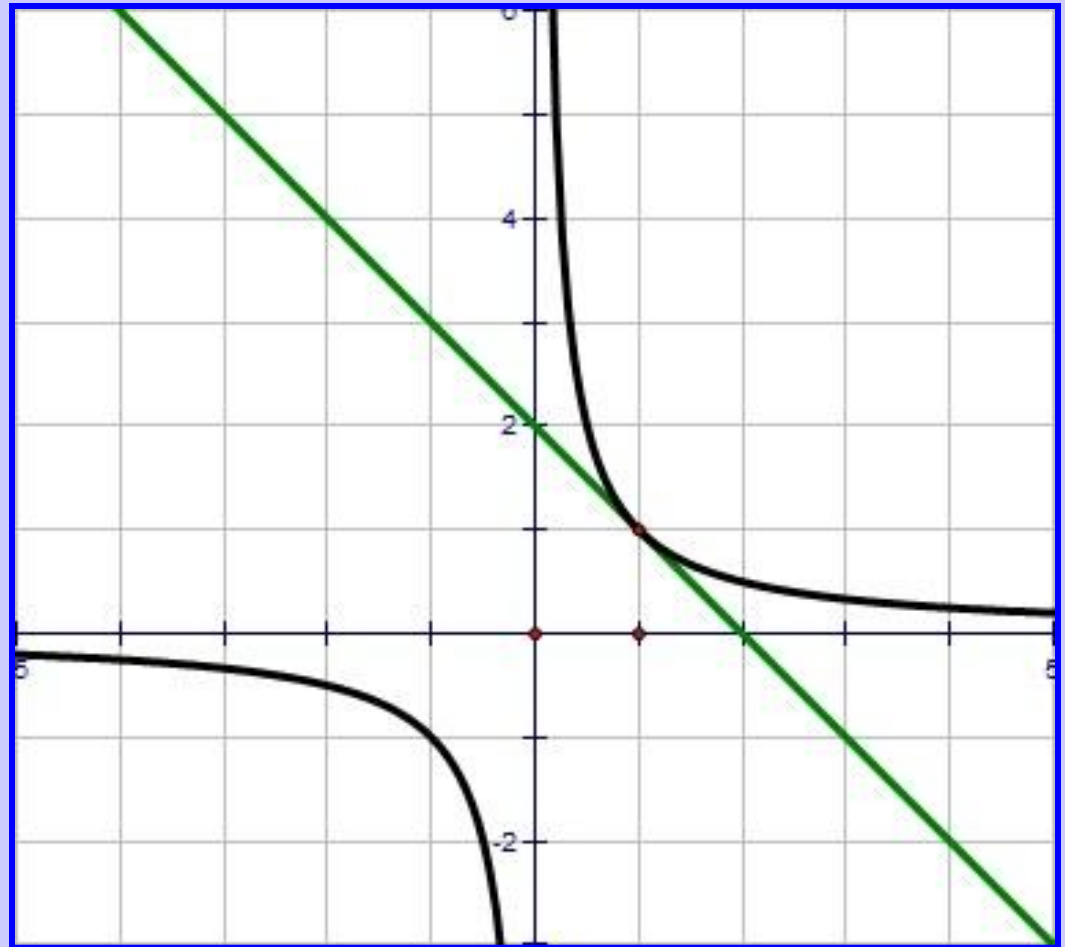
4)  $y = 1 - (x - 1)$

$$y = 2 - x$$

Ответ

$y = 2 - x$

∴





К графику функции  $y = \frac{x^3}{3}$  провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой  $y = 4x - 5$ .

$$k_{\text{кас}} = 4, k_{\text{кас}} = f'(x) \quad f'(x) = 4$$

$$f'(x) = \left( \frac{x^3}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2$$

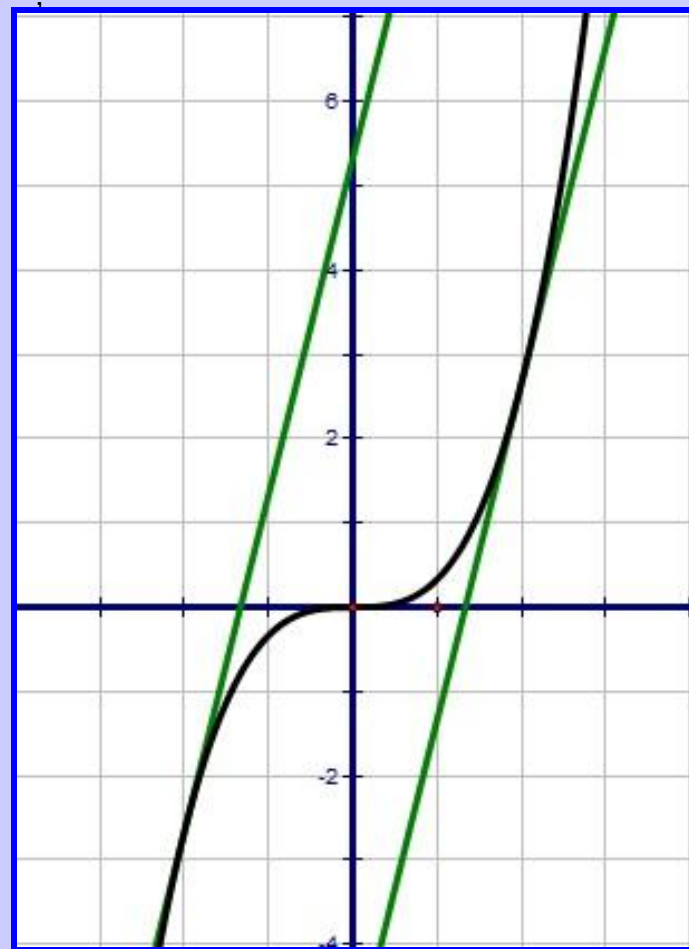
$$f'(a) = a^2 \Rightarrow a^2 = 4,$$

$$1) \quad a_1 = 2, a_2 = -2$$

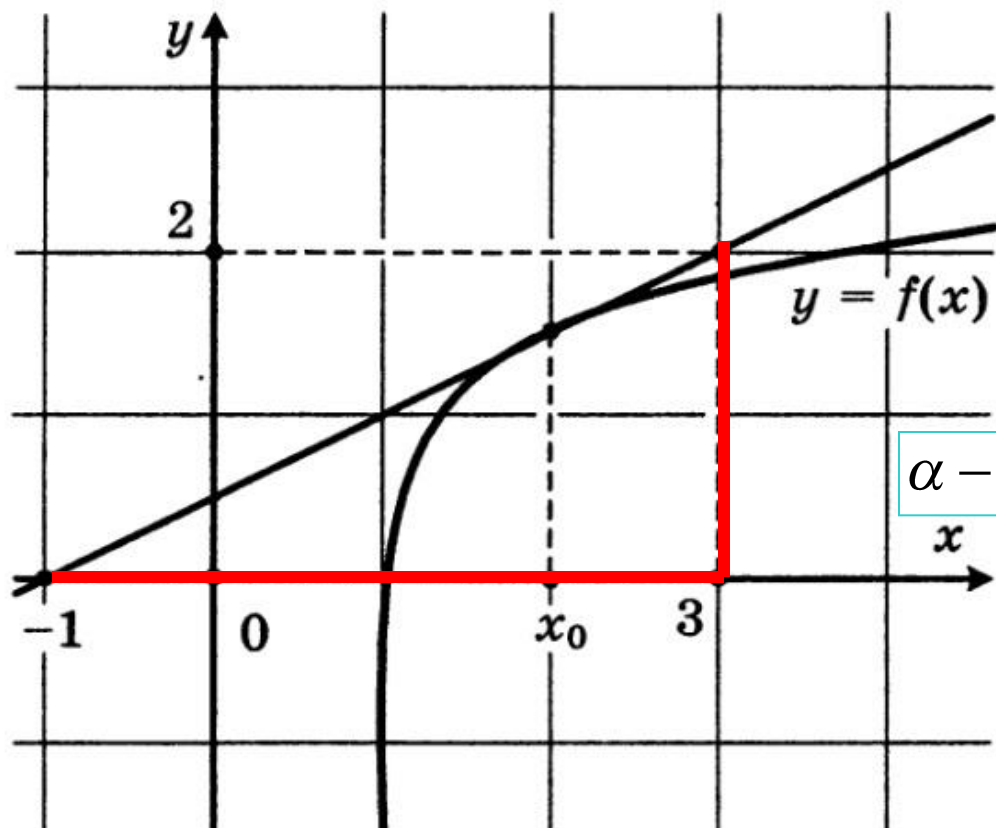
$$2) \quad f(a_1) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}, \quad f(a_2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$3) \quad f'(a_1) = f'(a_2) = 4$$

$$4) \quad y = 4x + \frac{16}{3}, \quad y = 4x - \frac{16}{3}$$



На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой 2. Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 2$ .



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

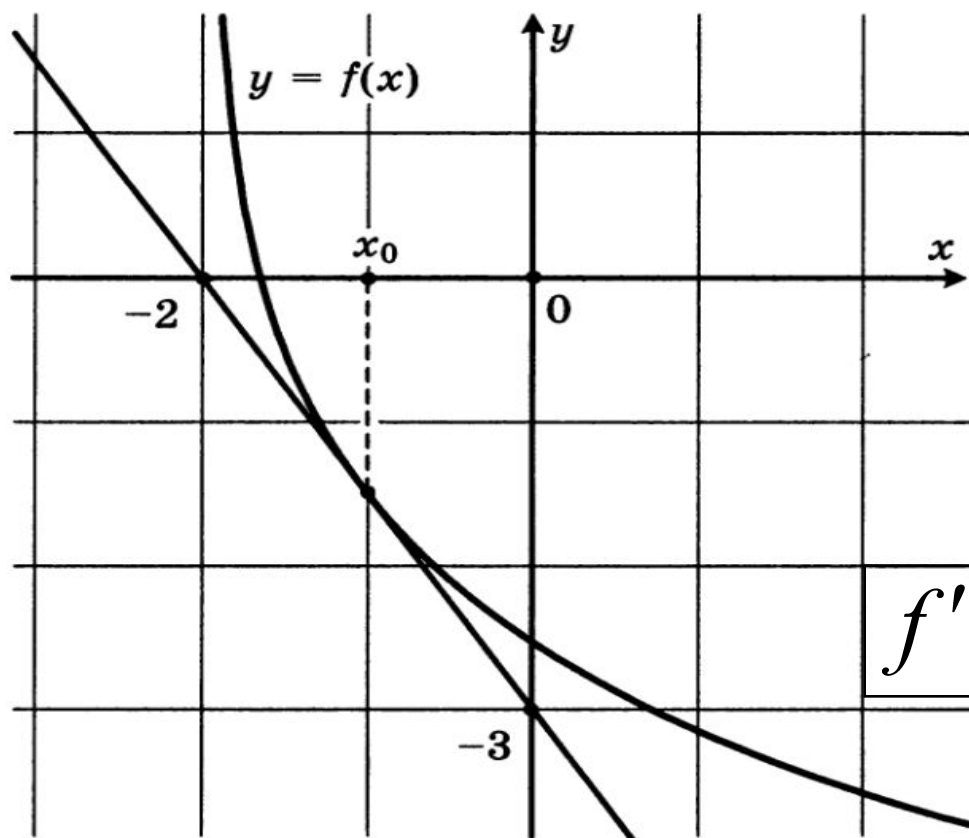
$\alpha$  – острый  $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0$

$$f'(x_0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ:  $f'(2) = 0,5$

# Самостоятельная работа

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой  $-1$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = -1$ .



$$f'(-1) = -1,5$$

# Номера из учебника

- № 29.3 (а,в)

а) Ответ:  $f'(2) > 0 \Rightarrow \alpha$  – острый; в) Ответ:  $f'(-3) < 0 \Rightarrow \alpha$  – тупой

- № 29.12 (б,г)

б) Ответ:  $y = 2 - x$ ; г) Ответ:  $y = 7$

- № 29.18

Ответ:  $y = -5x - 16$ ,  $y = -5x - 1$ ,

- № 29.23 (а)

а) Ответ:  $y = x - \frac{8}{3}$ ,  $y = x - \frac{4}{3}$ ,

# Ответьте на вопросы:

1. Что называется касательной к графику функции в точке?
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. Сформулируйте алгоритм нахождения уравнения касательной?

# Домашняя работа

№ 29.3 (б,г)

№ 29.12 (а,в)

№ 29.19

№ 29.23 (б)

# Литература

1. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
2. Алгебра и начала математического анализа: Задачник, Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
3. Алгебра и начала анализа. Самостоятельные и контрольные работы для 10-11 классов. / Ершова А.П., Голобородько В.В. – М.: ИЛЕКСА, 2010
4. ЕГЭ 2010. Математика. Задача В8. Рабочая тетрадь / Под редакцией А.Л.Семенова и И.В.Ященко – М.: Издательство МЦНМО, 2010