Системы массового обслуживания (СМО)

1.Основные понятия и классификация систем массового обслуживания

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок, поступающих в нее в случайные моменты времени.

Заявкой (требованием) назовем спрос на удовлетворение какой-либо потребности. Далее будем подразумевать, что все заявки однотипные. Удовлетворение спроса назовем **обслуживанием заявки.**

Устройство, непосредственно обслуживающее заявку, называется **каналом обслуживания.** СМО может содержать одно такое устройство, тогда она называется **одноканальной.** Если СМО содержит несколько обслуживающих устройств, то она называется **многоканальной.**

Поступление заявки в СМО назовем **событием.** Последовательность событий, состоящих в поступлении заявок в СМО, назовем **входящим потоком заявок.** Последовательность событий, состоящих в выходе заявок из СМО, назовем **выходящим потоком заявок.**

В зависимости от поведения заявки в СМО различают СМО **с отказами** и СМО **с очередью** (или ожиданием). **В** СМО **с отказами** заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, получает отказ и покидает СМО. В СМО с очередью (или ожиданием) заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения одного из каналов обслуживания.

Возможны СМО **смешанного типа.** Например, СМО с ограниченной очередью. В такой СМО заявка становится в очередь при занятости всех каналов, если очередь невелика, скажем, не достигла длины *m.* Если все m мест в очереди заняты, заявка покидает СМО. К СМО смешанного типа относятся СМО с ограниченным временем ожидания. Заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь, но может уйти из СМО необслуженной, если время ожидания слишком велико.

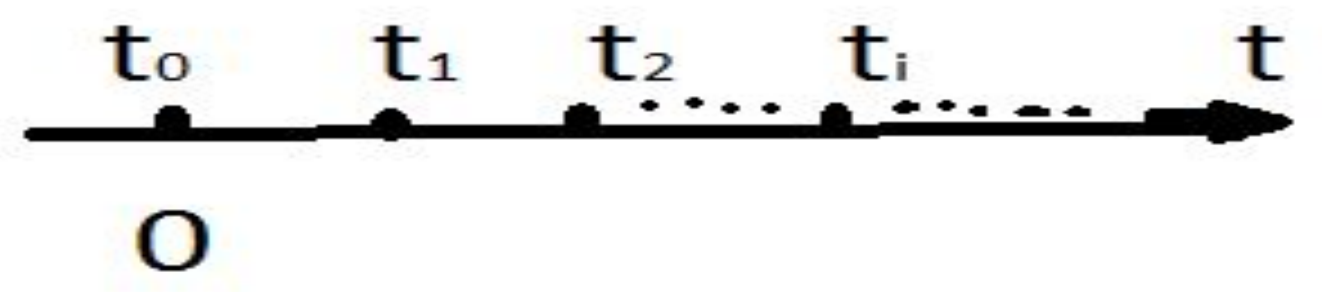
СМО могут быть открытого и замкнутого типа. В **открытых** СМО интенсивность поступающего на нее потока заявок не зависит от состояния самой СМО, так как круг «клиентов» (поступающих заявок) практически не ограничен.

Примерами таких СМО являются вокзальные кассы, метрополитен, телевизионные ателье больших городов и т. д.

В СМО **замкнутого** типа обслуживается ограниченный круг «клиентов», поэтому интенсивность потока заявок существенно зависит от состояния системы. Примерами таких СМО являются различные ремонтные системы в автопарках, цехах и т. д.

2.Простейший поток и его свойства

Рассмотрим входящий поток заявок в СМО как последовательность точек t_1 t_2, ..t_i,... — моментов поступления заявок на оси времени Ot . Здесь t_0 — начальный момент.



Поток заявок назовем **простейшим,** если он удовлетворяет трем условиям:

1) ***Отсутствие последействия***. Это условие означает, что заявки поступают в СМО независимо друг от друга, т. е. поступление заявки после момента времени *t* не зависит от того, когда и в каком количестве появлялись заявки до момента *t*.

2) ***Стационарность.*** Это условие означает, что вероятность поступления некоторого числа заявок в СМО за время Δt зависит лишь от длины интервала $\Delta t=(t+\Delta t)—t$ и не зависит от точки t отсчета этого интервала на оси времени *Ot.* Если выполнено условие стационарности, то можно говорить о среднем числе заявок, поступающих в СМО за единицу времени, например за один час, не указывая за какой именно час.

3)*Ординарность*. Это условие означает, что одновременное поступление в СМО двух и более заявок маловероятно, т. е. вероятность появления за бесконечно малое время Δt более чем одной заявки есть бесконечно малая высшего порядка малости, чем Δt.

Таким образом, если поток простейший, то случайные моменты времени *ti* (i=1, 2, . . .) поступления заявок в СМО распределены на оси времени со средней плотностью λ (стационарность); эти точки попадают в непересекающиеся интервалы независимо друг от друга (нет последействия); заявки поступают в СМО поодиночке (ординарность).

Величина λ называется **интенсивностью** потока заявок и представляет собой среднее число (математическое ожидание числа) заявок, поступающих в единицу времени.

Можно показать, что для простейшего потока вероятность Pi(t) поступления в СМО ровно *i* заявок за время *t* вычисляется по формуле:

$$p_i = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, (i \geq 0), \quad \textbf{(1)}$$

т. е. вероятности $p_i(t)$ распределены по закону Пуассона с параметром λt. Этим вызвано другое название простейшего потока — **пуассоновский** поток.

Обозначим через Т интервал времени между поступлениями двух последовательных заявок. Найдем функцию распределения случайной величины *T*

$$F(t) = P(T<t)=1—Po(t),$$

где $P(T<1)$—вероятность того, что случайная величина *T* примет значение, меньшее, чем *t*; P_0 — вероятность противоположного события (т. е за время *t* в СМО не поступила ни одна заявка).

В силу формулы (1) имеем:

$$p_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

откуда

$$F(t) = 1 - e^{\lambda t}, (t > 0) \quad \textbf{(2)}$$

Плотность распределения случайной величины *T:*

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t > 0)$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины *T,*
получим:

$$M[T] = \frac{1}{\lambda}, D[T] = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma = \sqrt{D[T]} = \frac{1}{\lambda} \qquad \textbf{(3)}$$

Таким образом, интервал времени T между двумя последовательными заявками в простейшем потоке имеет показательное распределение с математическим ожиданием $\frac{1}{\lambda}$

где λ—интенсивность потока.

3.Марковские системы массового обслуживания

Для задания СМО необходимо задать вероятностные характеристики времени обслуживания одной заявки. Обозначим это время через $T_{обсл}$. Величина $T_{обсл}$ является случайной. Во многих задачах теории массового обслуживания закон распределения времени обслуживания предполагается показательным, т. е.

$$F(t) = P(T_{обл} < t) = 1 - e^{-\mu t}$$

(4)

Параметр этого распределения μ есть величина, обратная среднему времени обслуживания, т. е.

$$\mu = \frac{1}{M[T_{обл}]}$$

(5)

Часто μ называют **интенсивностью потока обслуживания**. При этом под потоком обслуживания понимается поток заявок, обслуживаемых одна за другой одним непрерывно занятым каналом. Если $\mathbf{T}_{\mathbf{обсл}}$ представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение, то поток обслуживания является **простейшим**.

Если входящий поток и все потоки обслуживания простейшие, то процесс, протекающий в СМО, является **марковским случайным процессом (цепью) с дискретными состояниями и непрерывным временем.** Поэтому СМО, в которой все потоки простейшие, называют **марковской СМО.**

Задача 1. Автоматизированная система управления АСУ продажей железнодорожных билетов состоит из двух параллельно работающих ЭВМ. При выходе из строя одной ЭВМ, АСУ продолжает нормально функционировать за счет работы другой ЭВМ. Поток отказов каждой ЭВМ простейший.

Среднее время безотказной работы одной ЭВМ равно 10 суткам. При выходе из строя отказавшую ЭВМ начинают ремонтировать. Время ремонта ЭВМ распределено но показательному закону и в среднем составляет 2 суток. В начальный момент обе ЭВМ исправны.

Найти среднюю производительность АСУ, если при исправности хотя бы одной ЭВМ ее производительность равна 100%, а при отказе обеих ЭВМ продажа билетов производится вручную, обеспечивая 30% общей производительности АСУ.

Решение. Обозначим состояния АСУ по числу вышедших из строя ЭВМ: A_0—обе ЭВМ исправны; A_1—одна исправна, одна ремонтируется; A_2—обе ЭВМ ремонтируются. Так как потоки отказов и восстановления ЭВМ являются простейшими, то их интенсивности вычисляются по формулам (4) и (5):

$$\lambda = \frac{1}{M[T]} = \frac{1}{10}; \mu = \frac{1}{M[T_{обл}]} = \frac{1}{2}$$

Поскольку в состоянии A_0 работают две ЭВМ, каждая из которых может

отказать с интенсивностью $\lambda = \frac{1}{10}$

то АСУ переходит из состояния A_0 в

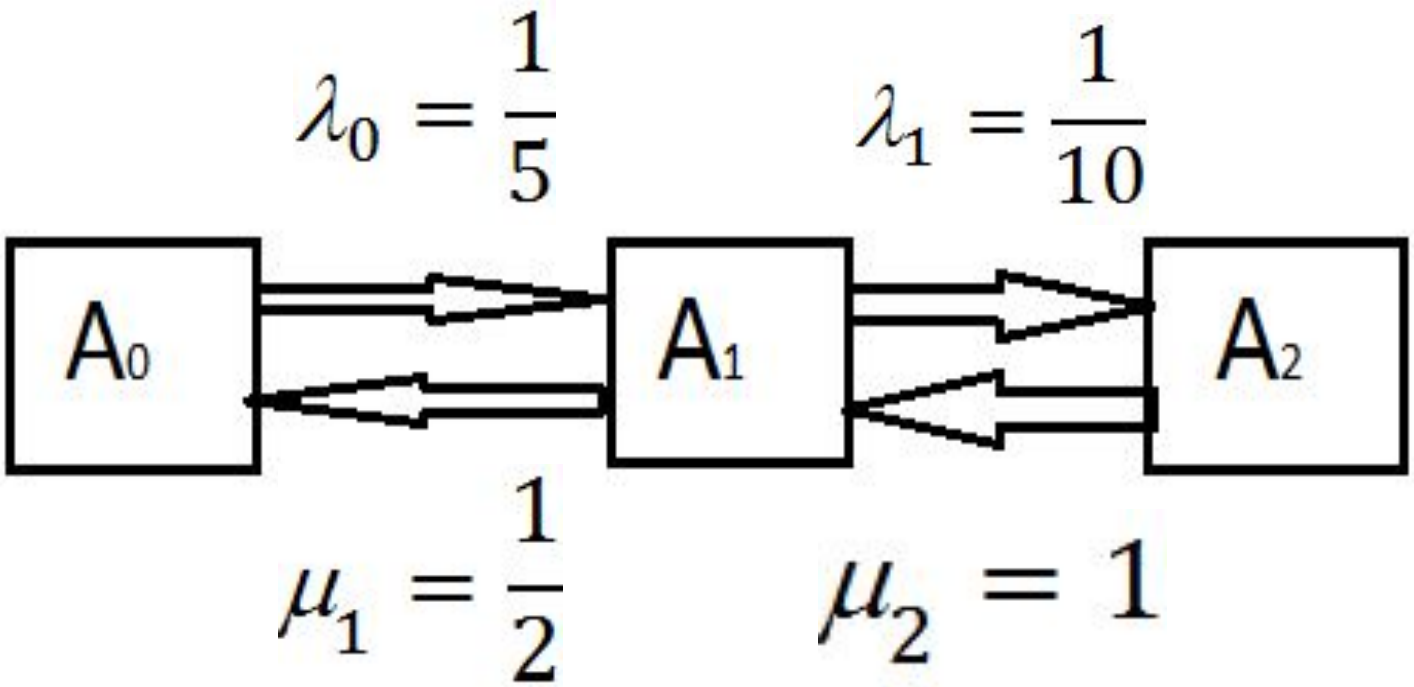
состояние A_1 с интенсивностью

$$\lambda = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

переход $A_0 \rightarrow A_2$ происходит с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda = 0{,}1$; Из состояния A_2 в состояние A_1 система переходит с интенсивностью $\mu_2 = 2 * \mu = 2 * 0{,}5 = 1$, так как восстанавливаются две ЭВМ; переход $A_1 \rightarrow A_2$ происходит с интенсивностью

$$\mu_1 = \mu = \frac{1}{2}$$

Получим граф состояний:


$\lambda_0 = \frac{1}{5}$
$\lambda_1 = \frac{1}{10}$
A_0
A_1
A_2
$\mu_1 = \frac{1}{2}$
$\mu_2 = 1$

Следовательно, в описанной СМО происходит процесс гибели и размножения с числом состояний K+1=3, так как K=2. Воспользуемся формулами для вычисления предельного распределения вероятностей

$$p_0 = [1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}]^{-1}$$

$$= [1 + \frac{0,2}{0,5} + \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,5 \cdot 1}]^{-1} = 0,694.$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = 0{,}278;$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0 \ \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 = 0{,}028;$$

Вычислим $Po+P_1+P_2=0,694+0,278+0,028=1$, что и следовало ожидать, так как система может находиться в одном из трех возможных состояний A_0, A_1, A_2. Средняя производительность АСУ в установившемся режиме составит:

$100\%\ (Po+P_1,)+30\% p_2=$
$=100\%(0,694+0,278)+30\%*0,028=98,04\%.$

Вывод: Расчет показывает, что параллельная работа всего двух ЭВМ обеспечивает достаточно высокую (98,04% от номинальной) производительность АСУ. *Следовательно*, нет необходимости повышать производительность системы за счет, например, присоединения третьей ЭВМ.

4.Показатели эффективности систем массового обслуживания

Обычно в теории массового обслуживания интересуются предельными средними характеристиками системы, которые называют показателями эффективности СМО. В качестве показателей эффективности могут рассматриваться следующие:

A — среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени. Эту характеристику называют **абсолютной пропускной способностью СМО**.

Q — вероятность обслуживания поступившей заявки или **относительная пропускная способность СМО.** Очевидно,

$$Q = \frac{A}{\lambda}.$$

$P_{отк}$—вероятность отказа, т. е. вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена, $P_{отк}=1-Q$.

$\bar{z}$ —среднее число заявок в СМО (имеются в виду все заявки, как обслуживаемые, так и ожидающие очереди, если она есть).

$\bar{r}$ —среднее число заявок в очереди, если она есть.

$\bar{t}_{\text{сист}}$ - среднее время пребывания заявки в СМО, как в очереди, если она есть, так и под обслуживанием.

$\bar{t}_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди.

$\bar{k}$ — среднее число занятых каналов

Выбор показателей эффективности СМО зависит от типа СМО.

Например, абсолютная пропускная способность *А*, являясь основной характеристикой обслуживания в СМО с отказами, теряет смысл для СМО с неограниченной очередью.

Для **открытых** СМО справедливы соотношения:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}, \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \bar{k} = \frac{A}{\mu} \quad \textbf{(6)}$$

где λ— интенсивность потока заявок, μ— интенсивность потока обслуживания. Формулы (6) справедливы только в том случае, когда входящий поток заявок и поток обслуживании стационарны.

5.Системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком и показательным временем обслуживания

Здесь рассматриваются СМО, у которых входящий поток пуассоновский, а время обслуживания — показательное, т. е. марковские СМО.

Многоканальная система массового обслуживания
с отказами (задача Эрланга)

Пусть СМО содержит *k* каналов, входящий поток заявок имеет интенсивность λ, поток обслуживания заявки одним каналом имеет интенсивность μ.

Будем нумеровать состояния СМО по числу занятых каналов:

A_0 — все каналы свободны;

A_1, — один канал занят; **A_i**— *i* каналов занято,

(***к*—i**) каналов свободны;

$A_к$— все каналы заняты.

Размеченный граф состояний имеет вид, представленный на рис. 6.Приходим к выводу, что граф является графом процесса гибели и размножения, для которого:

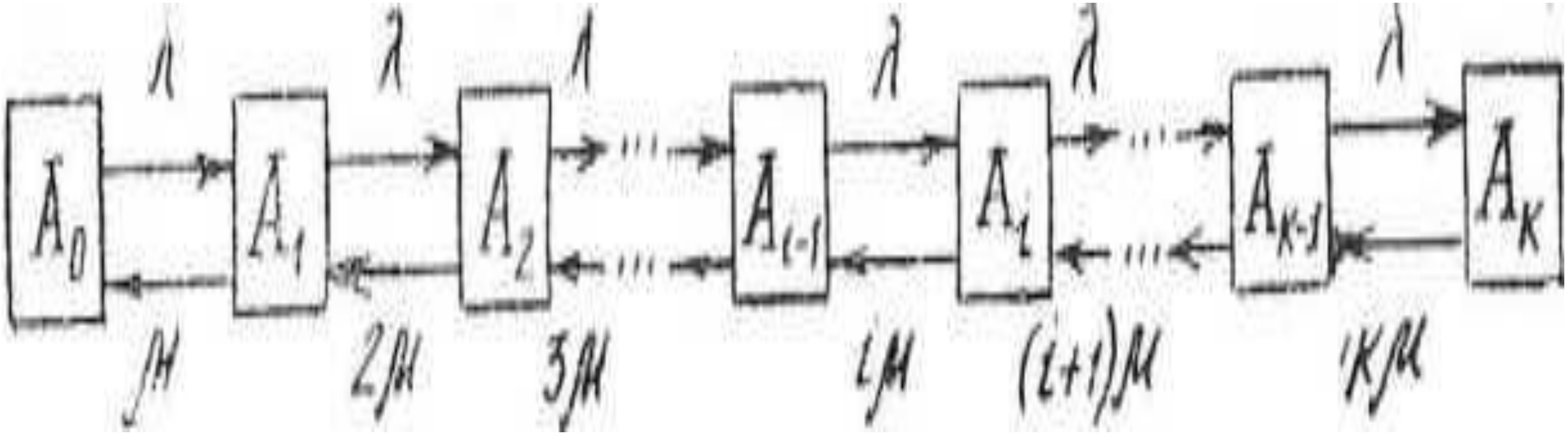


Рис 6

$$\lambda_i = \lambda \qquad \mu_i = i\mu \qquad \textbf{(7)}$$

Тогда предельное распределение вероятностей состояний можно вычислить, обозначая через $p = \frac{\lambda}{\mu}$

получим:

$$p_0 = [1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!}]^{-1}; \qquad \textbf{(8)}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0;\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0 \ldots;\ p_i = \frac{\rho^i}{i!}p_0 \ldots;\ p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0 \qquad (8)$$

Формулы (8) называются формулами Эрланга. С их помощью вычисляются показатели эффективности СМО:

$$A = \lambda(1 - pk); \qquad Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - pk$$

$$P\text{отк} = pk \qquad \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_k), \qquad \textbf{(9)}$$

, где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ эта величина называется

коэффициентом загрузки системы.

Задача 2.

Диспетчерская служба имеет 5 линий связи. Поток вызовов простейший с интенсивностью $\lambda=0,8$ вызовов в минуту. Среднее время переговоров с диспетчером составляет 3 мин. Время переговоров распределено по показательному закону.

Найти абсолютную и относительную пропускные способности диспетчерской службы; вероятность отказа; среднее число занятых каналов. Определить, сколько линий связи должна иметь диспетчерская служба, чтобы вероятность отказа не превышала 0,01?

Решение. Находим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{M[T_{обл}]} = \frac{1}{3}$$ (разговора в минуту)

Коэффициент загрузки СМО составляет:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,8}{1/3} = 2,4.$$

При k=5 имеем:

$$\mathbf{p_0} = \left[\mathbf{1} + \frac{\rho}{\mathbf{1}!} + \frac{\rho^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}!} + \frac{\rho^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}!} + \frac{\rho^{\mathbf{4}}}{\mathbf{4}!} + \frac{\rho^{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}!}\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\approx \left[\mathbf{1} + \frac{\mathbf{2,4}}{\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{5,76}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{13,824}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{33,178}}{\mathbf{24}} + \frac{\mathbf{79,626}}{\mathbf{120}}\right]^{-\mathbf{1}} \approx \mathbf{0,094};$$

$$\mathbf{p_5} = \frac{\rho^5}{5!}\mathbf{p_0} \approx \frac{(2,4)^5}{5!}\mathbf{0,094} = \mathbf{0,062}.$$

Находим по формулам (9):

а)*абсолютную пропускную способность*;

$$A = \lambda(1 - p_5) \approx 0,8(1 - 0,062) \approx 0,75$$

(следовательно, СМО обслуживает в среднем 0,75 заявки в минуту);

б)*относительную пропускную способность:*

$$Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - p_5 \approx 1 - 0{,}062 \approx 0{,}938$$

(следовательно, вероятность обслуживания: вновь поступившей заявки равна 0,938);

в)*вероятность отказа*:

$$P_{отк} = p_5 \approx 0{,}062;$$

г)*среднее число занятых каналов:*

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{A}}{\mu} = \rho(\mathbf{1} - \mathbf{p_5}) \approx \mathbf{2,4} \cdot \mathbf{0,938} \approx \mathbf{2,251}$$

(следовательно, диспетчерская служба в среднем имеет половину линий связи постоянно занятыми).

Поскольку вероятность отказа данной диспетчерской службы *Pотк*≈0,062 превышает 0,01, то число линий связи следует увеличить. Допустим, что линий связи стало 6. Тогда при ***k=6*** получим:

$$\mathbf{p_0} = \left[\mathbf{1} + \frac{\rho}{\mathbf{1}!} + \cdots + \frac{\rho^{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}!} + \frac{\rho^{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}!}\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\approx \left[\mathbf{10,629} + \frac{(\mathbf{2,4})^{\mathbf{6}}}{\mathbf{720}}\right]^{-\mathbf{1}} \approx \mathbf{0,092};$$

$$\mathbf{p_6 = \frac{\rho^6}{6!} p_0 = \frac{(2,4)^6}{720} \cdot 0,092 \approx 0,024}.$$

Следовательно, при ***k* = *6*** вероятность отказов $P_{\text{отк}}$ **=** $p_6 \approx 0{,}024$ превышает 0,01. Значит, число каналов надо увеличить.

При ***k* = *7*** получим:

$$\mathbf{p_0} = \left[\mathbf{1} + \frac{\rho}{\mathbf{1}!} + \cdots + \frac{\rho^{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}!} + \frac{\rho^{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}!}\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\approx \left[\mathbf{10,894} + \frac{(\mathbf{2,4})^{7}}{\mathbf{5040}}\right]^{-\mathbf{1}} \approx \mathbf{0,091};$$

$$\mathbf{p_7} = \frac{\rho^{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}!}\mathbf{p_0} \approx \frac{(\mathbf{2,4})^{\mathbf{7}}}{\mathbf{5040}}\mathbf{0,091} \approx \mathbf{0,008}.$$

Следовательно, при $\boldsymbol{k = 7}$ вероятность отказов $P_{отк} = p_7 \approx 0{,}008$ не превышает 0,01. Таким образом, для обеспечения требуемой вероятности отказов следует увеличить количество линий связи диспетчерской службы до 7.

Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью

Пусть СМО имеет один канал обслуживания. Если заявка поступила в систему в момент занятости канала, она становится в очередь. Если поступившая заявка застала занятым канал и все $\boldsymbol{m}$ мест в очереди тоже заняты, то заявка покидает систему необслуженной.

Пусть поток заявок в СМО простейший с интенсивностью λ и время обслуживания одной заявки распределено по показательному закону с параметром μ, тогда граф состояний системы является графом процесса гибели и размножения.

Состояния СМО пронумерованы следующим образом:

$\mathbf{A_0}$ — канал свободен;

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}$ — канал занят;

$\mathbf{A_2}$—канал занят, одна заявка стоит в очереди;

$\boldsymbol{A_i}$ —канал занят, ($\boldsymbol{i}$—1) заявка в очереди;

A_{m+1}- канал занят, *m* заявок в очереди.

Очевидно, что $\lambda_i = \lambda$ $\mu_i = \mu$ **(10)**

Тогда предельное распределение вероятностей состояний вычисляется по

формулам, обозначая через $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

получим:

$$p_0 = [1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{m+1}]^{-1}; \quad \textbf{(11)}$$

$$\mathbf{p_1} = \rho \cdot \mathbf{p_0};\ \mathbf{p_2} = \rho^2 \cdot \mathbf{p_0}; \dots ;\ \mathbf{p_i} = \rho^{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{p_0} \dots ;\ \mathbf{p_{m+1}} = \rho^{\mathbf{m+1}} \cdot \mathbf{p_0} \quad \mathbf{(11)}$$

Первая из (11) формул содержит геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Суммируя *(m+2)* ее члена, получим:

$$\boldsymbol{p_0} = \frac{\mathbf{1} - \rho}{\mathbf{1} - \rho^{\boldsymbol{m+2}}};\ \boldsymbol{p_i} = \rho^{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{p_0},\ \ \mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{m} + \mathbf{1} \quad \mathbf{(11')}$$

С помощью формул (11′), рассчитываются показатели эффективности СМО.

Из формул (9) имеем:

$$A = \lambda(1 - p_{m+1}) \ ; \qquad Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - p_{m+1} \ ;$$

$$p_{\text{отк}} = p_{m+1} \ .$$

Далее…

$$\bar{k} = 1 - p_0; \ \bar{r} = \frac{\rho^2[1 - \rho^m(m + 1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \ ;$$

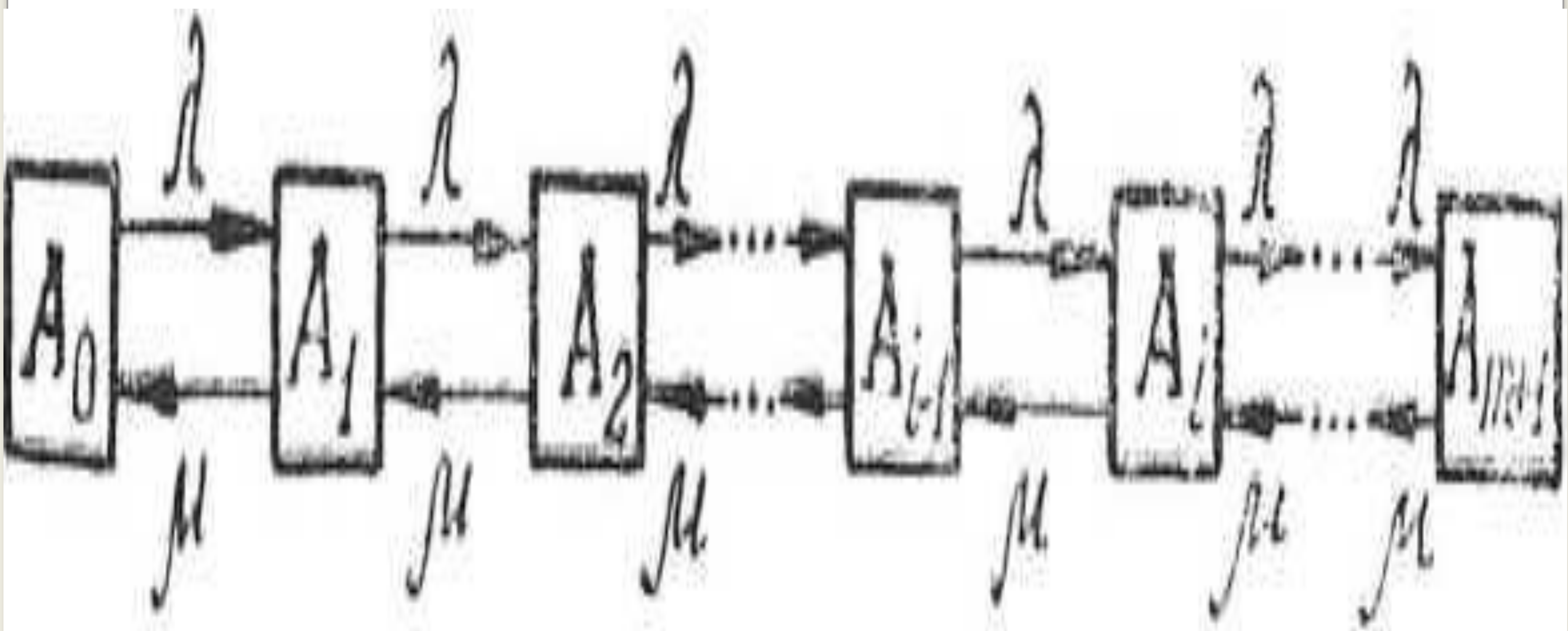
$$t_{\text{сист}} = \frac{\bar{z}}{\lambda} \ ; \qquad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \ . \qquad (12)$$

Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью

Пусть СМО имеет один канал обслуживания, на который поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ. Если заявка поступает в СМО в момент занятости канала, то она становится в очередь.

Число мест в очереди не ограничено. Следовательно, каждая заявка рано или поздно будет обслужена, т. е:

$$P_{отк}=0; \; Q=1 - P_{отк} = 1; \; A=Q\lambda=\lambda. \qquad \textbf{(13)}$$



Вычислим коэффициент загрузки СМО:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Предельное распределение вероятностей состояний данной СМО существует только при $\rho<1$. Этот факт легко объяснить, если рассматривать данную СМО как предельный случай одноканальной СМО с ограниченной очередью при стремлении длины очереди к бесконечности.

Тогда предельное распределение вероятностей состояний можно вычислить как предел при m—>∞ предельных вероятностей. При этом возникает бесконечный числовой ряд, состоящий из членов геометрической прогрессии, который сходится, если знаменатель прогрессии меньше 1, т. е. ρ< 1, и имеет сумму:

$$\frac{1}{1-\rho}$$

Таким образом, предельные вероятности состояний вычисляются по формулам:

$$\mathbf{p_0} = \mathbf{1} - \rho;\ \mathbf{p_i}(\mathbf{1} - \rho), \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \qquad \mathbf{(14)}$$

где p_0 — предельная вероятность того, что канал свободен; p_i —предельная вероятность того, что канал занят и $(i—1)$ заявка в очереди.

Переходя к пределу при $m \to \infty$ из формул (12) и (14), получим показатели эффективности СМО с неограниченной очередью;

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho};\ \bar{k} = \rho;\ \bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho};\ \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)};\ \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}\ . \tag{15}$$

Задача 3.

В приёмо-отправочный парк станции поступает простейший поток поездов со средней интенсивностью 3 состава в час. Одна бригада осмотрщиков обрабатывает состав со средней продолжительностью 15 мин. Время обработки распределено по показательному закону. Определить среднее число составов, ожидающих обслуживания; среднее время пребывания состава в парке; среднее время простоя поезда в ожидании обработки; среднее число составов в парке.

Решение.
Приёмо-отправочный парк можно рассматривать как одноканальную СМО с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок λ=3 состава в час.
Интенсивность потока обслуживаний

$$\mu = \frac{60}{15} = 4$$ состава в час.

Коэффициент загрузки

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

По формулам (15) находим:
среднее число составов, ожидающих обслуживания:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0,75)^2}{1-0,75} = 2,25 \text{ состава};$$

среднее время пребывания состава в парке:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0,75}{3 \cdot (1-0,75)} = 1 \text{ ч};$$

среднее время простоя поезда в ожидании обработки:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2,25}{3} = 0,75 \text{ ч};$$

среднее число составов в парке:

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,75}{1-0,75} = 3 \text{ состава}.$$

Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью

Пусть СМО имеет *k* каналов обслуживания. Все потоки простейшие.

Интенсивность потока заявок λ, потока обслуживания одной заявки — μ. Коэффициент загрузки СМО

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Обозначим отношение коэффициента загрузки к числу каналов в системе через.

$$\chi = \frac{\rho}{k}$$

Предельное распределение вероятностей состояний в описываемой СМО существует только при X< 1 Обозначим через p_i, предельную вероятность того, что в системе занято i каналов (0≤i≤k), а через — p_{k+1} предельную вероятность того, что в системе заняты все k каналов и r заявок стоят в очереди.

При χ<1 предельное распределение вероятностей состояний имеет вид:

$$p_0 = [1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{kk!} \cdot \frac{1}{1-\chi}]^{-1}$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_{0,} (1 \leq i \leq k);\ p_{k+r} = \frac{\rho^{k+r}}{k^r k!} p_o (r \geq 1). \quad \textbf{(16)}$$

Так как очередь в СМО не ограничена, то каждая заявка рано или поздно будет обслужена.

Остальные показатели эффективности СМО вычисляются по формулам:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{k+1}}{kk!\,(1-\chi)^2};\ \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho;\ \bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho;$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\bar{z}}{\lambda};\ \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \qquad \textbf{(17)}$$

Задача4.

На сортировочной станции имеются две сортировочных горки. Входящий поток поездов является простейшим. Среднее число составов, прибывающих на станцию в переработку за сутки, равно 140. Горочный технологический интервал составляет 12 минут, время обслуживания подчинено показательному распределению. Найти показатели эффективности работы сортировочной станции.

Решение.
Будем рассматривать сортировочную станцию как СМО: поступающие составы – заявки на обслуживание; процесс расформирования составов – обслуживание. Тогда

$$\boldsymbol{k = 2};\ \boldsymbol{\lambda = \frac{1}{M[T]}} \quad \text{где } \boldsymbol{M[T] = \frac{24}{140} \approx 0,171} \text{ ч.}$$

$$\boldsymbol{\lambda \approx \frac{1}{0,171} \approx 5,848} \text{ состава в час,}$$

$$\mu = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}[\boldsymbol{T}\text{обсл}]} \quad \text{где } \boldsymbol{M}[\boldsymbol{T}\text{обсл}] = \mathbf{12} \text{ мин} = \mathbf{0,2} \text{ ч},$$

$$\text{т. е.} \qquad \mu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,2}} = \mathbf{5} \text{ составов в час.}$$

Вычислим коэффициент загрузки СМО:

$$\rho = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mu} \approx \frac{\mathbf{5,848}}{\mathbf{5}} \approx \mathbf{1,17}, \text{откуда } \boldsymbol{\chi} = \frac{\rho}{\boldsymbol{k}} \approx \frac{\mathbf{1,17}}{\mathbf{2}} \approx \mathbf{0,585}.$$

Так как $\boldsymbol{\chi}$<1, для данной СМО существует предельное распределение вероятностей состояний, вычисляемое по формулам (16):

$$\mathbf{p_0} = \left[\mathbf{1} + \frac{\rho}{\mathbf{1}!} + \frac{\rho^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}!} + \frac{\rho^{\mathbf{3}}}{\mathbf{2} \cdot \mathbf{2}!} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \chi}\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\approx [\mathbf{1} + \mathbf{1{,}17} + \mathbf{0{,}684} + \mathbf{0{,}965}]^{-\mathbf{1}}$$

$$\approx \mathbf{0{,}262}.$$

Следовательно, с вероятностью 0,262 состав застанет сортировочную станцию пустой (обе горки будут свободны). Вычислим вероятность $\mathbf{P}_*$ того, что вновь прибывший состав застанет обе горки занятыми. Очевидно, она равна сумме вероятностей таких событий**:** *обе горки заняты, очереди нет* (p_2)**;** *обе горки заняты, один состав в очереди* (p_3)**;** *обе горки заняты, два состава в очереди* (p_4) и т.д. Тогда

$$\boldsymbol{P_* = p_2 + p_3 + p_4 + \cdots = 1 - p_0 - p_1}$$

$$\boldsymbol{\approx 1 - 0,262 - \frac{1,17}{1!} 0,262 \approx 0,431}.$$

По формулам (17) находим показатели эффективности работы СМО:

Среднее число составов в очереди на расформирование:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{\rho^3 \boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{2 \cdot 2!\,(1-\chi)^2}} \approx \frac{\boldsymbol{(1,17)^3 \cdot 0,262}}{\boldsymbol{4 \cdot (0,415)^2}} \approx \boldsymbol{0,609} \text{ состава;}$$

Среднее число поездов на сортировочной станции:

$$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\boldsymbol{r}} + \rho \approx \mathbf{0,609} + \mathbf{1,170} = \mathbf{1,779}\ \text{состава};$$

Среднее время пребывания состава на сортировочной станции:

$$\bar{\boldsymbol{t}}_{\text{сист}} = \frac{\bar{\mathbf{z}}}{\boldsymbol{\lambda}} \approx \frac{\mathbf{1,779}}{\mathbf{5,848}} \approx \mathbf{0,304}\ \text{ч} \approx \mathbf{18}\ \text{мин};$$

Среднее время ожидания составом расформирования:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx \frac{0,609}{5,848} \approx 0,104 \text{ ч} \approx 6 \text{ мин.}$$

6. Понятие о методе статистического моделирования систем массового обслуживания (методе Монте-Карло)

Приведенные в пп. 1—5 формулы дают возможность рассчитать показатели эффективности для марковских СМО.

В более сложных случаях СМО, когда обслуживание ведется с некоторыми особенностями или потоки событий не являются простейшими, получить простых аналитических выражений зависимости показателей эффективности от параметров СМО не удается. Тогда прибегают к методу моделирования случайных процессов в СМО — методу статистических испытаний (Монте-Карло).

Спасибо за внимание