Тема 6

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов

ЛЕКЦИЯ

Калабухова Галина Валентиновна

кандидат социологических наук, доцент

Вопросы темы

- Понятие первообразной.
- Неопределенный интеграл и его свойства.
- Таблица основных интегралов.

ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Определение

Функция ***F(x)*** называется ***первообразной*** функцией для функции ***f***(***x***) на промежутке ***X***, если в каждой точке этого промежутка

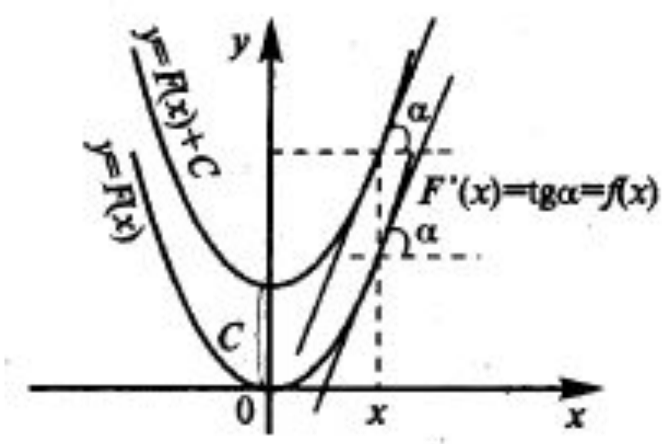
$$F'(x) = f(x)$$

Геометрический смысл первообразной

Геометрический смысл производной: ***F'(x)*** – угловой коэффициент касательной к кривой ***y=F(x)*** в точке x.

Геометрически найти первообразную для ***f(x)***, значит, найти такую кривую ***F(x)***, что угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точке ***x*** равен значению ***f(x)*** заданной функции в этой точке

Если найдена одна кривая ***y=F(x)***, удовлетворяющая условию ***F'(x)=tgα***, то сдвигая ее вдоль оси ординат, мы получим кривые, отвечающие указанному условию



Теорема

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для функции $f(x)$ на промежутке X, то найдется такое число C, что будет справедливо равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение

Совокупность всех первообразных для функции ***f***(***x***) на промежутке ***X***, называется ***неопределенным интегралом*** от функции ***f(x)***

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

f(x) – подынтегральная функция

f(x)dx – подынтегральное выражение

F(x) – некоторая первообразная для f(x)

C – произвольная константа

Свойства неопределенного интеграла

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Свойства неопределенного интеграла

Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла

Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg \frac{x}{2} \right\rvert + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + c$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int shx dx = chx + c$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int chx = shx + c$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2 + a} \rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

$$\int f(b+ax)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$,

тогда: $\int f(t(x))t'(x)dx = F(t(x)) + C$

где ***t***(***x***) - дифференцируемая монотонная функция

Методы замены переменной

1. Если в подынтегральной функции удаётся сразу заметить оба сомножителя, и ***f(t(x))***, и ***t'(x)***, то замена переменной осуществляется подведением множителя ***t'(x)*** под знак дифференциала:
   t'(x)dx = dt, и задача сводится к вычислению интеграла $\int f(t)dt$

Методы замены переменной

2. Замену переменной можно осуществлять формальным сведением подынтегрального выражения к новой переменной

Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - функции, имеющие непрерывные частные производные.
Тогда по формуле дифференцирования произведения

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du.$$

Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом $\int d(uv) = uv + C$):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Или:

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx$$

Сведение интеграла «к самому себе»

С помощью интегрирования по частям (возможно, неоднократного) интеграл выражается через такой же интеграл; в результате получается уравнение относительно этого интеграла, решая которое, находим значение интеграла

Рекуррентные соотношения

Если подынтегральная функция зависит от некоторого параметра ***n***, и получено соотношение, которое выражает интеграл через аналогичный интеграл с меньшим значением ***n***, то это соотношение и называется рекуррентным соотношением

«Неберущиеся» интегралы

Производная элементарной функции также является элементарной функцией. При нахождении первообразной существуют функции, первообразные для которых элементарными функциями не являются.

Соответствующие интегралы называются ***неберущимися в элементарных функциях***, в сами функции – ***неинтегрируемыми в конечном виде***

$$\int e^{-x^2}dx$$

$$\int \sin x^2 dx$$

$$\int \cos x^2 dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x}dx$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$