Информационные характеристики каналов связи

1. Структура канала связи
2. Модель источника информации
3. Пропускная способность канала связи
4. Канал связи с помехами
5. Объем канала

Структура канала связи

Модель источника информации

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$1. H_0(A) = \log n$$

$$2. H_1(A) = -\sum_{i=1}^{n} p(a_i) \log p(a_i)$$

$$3. H_2(A) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p(a_i, a_j) \log p(a_j / a_i)$$

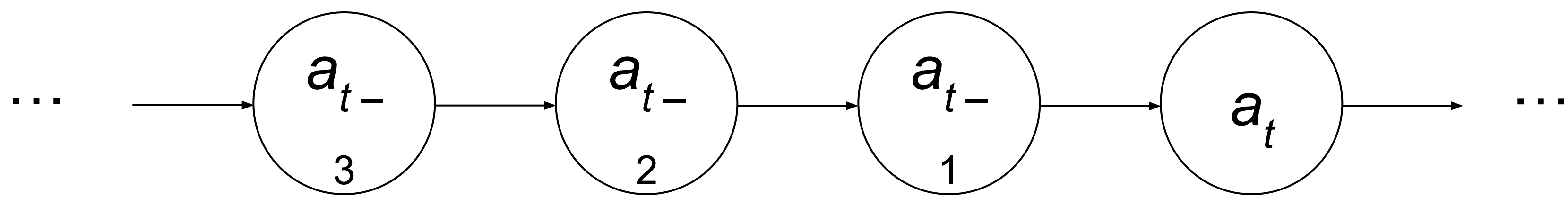
$$4. H_3(A) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k}^{n} p(a_i, a_j, a_k) \log p(a_k / a_i a_j)$$

$$\ldots$$

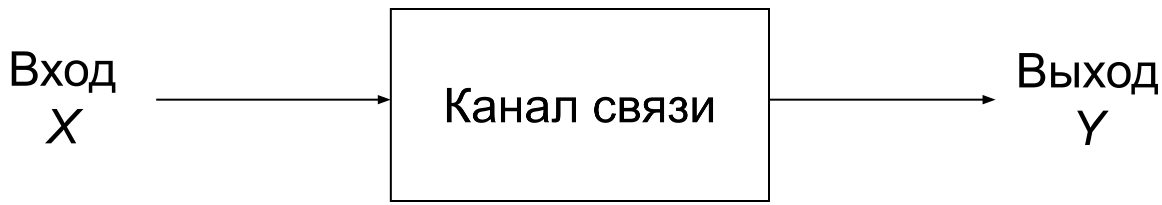
$$H_0(A) \geq H_1(A) \geq H_2(A) \geq H_3(A) \geq \ldots \geq H(A)$$

Последовательность символов

$$\ldots a_{t-3} a_{t-2} a_{t-1} a_t \ldots$$



Пропускная способность канала связи



$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

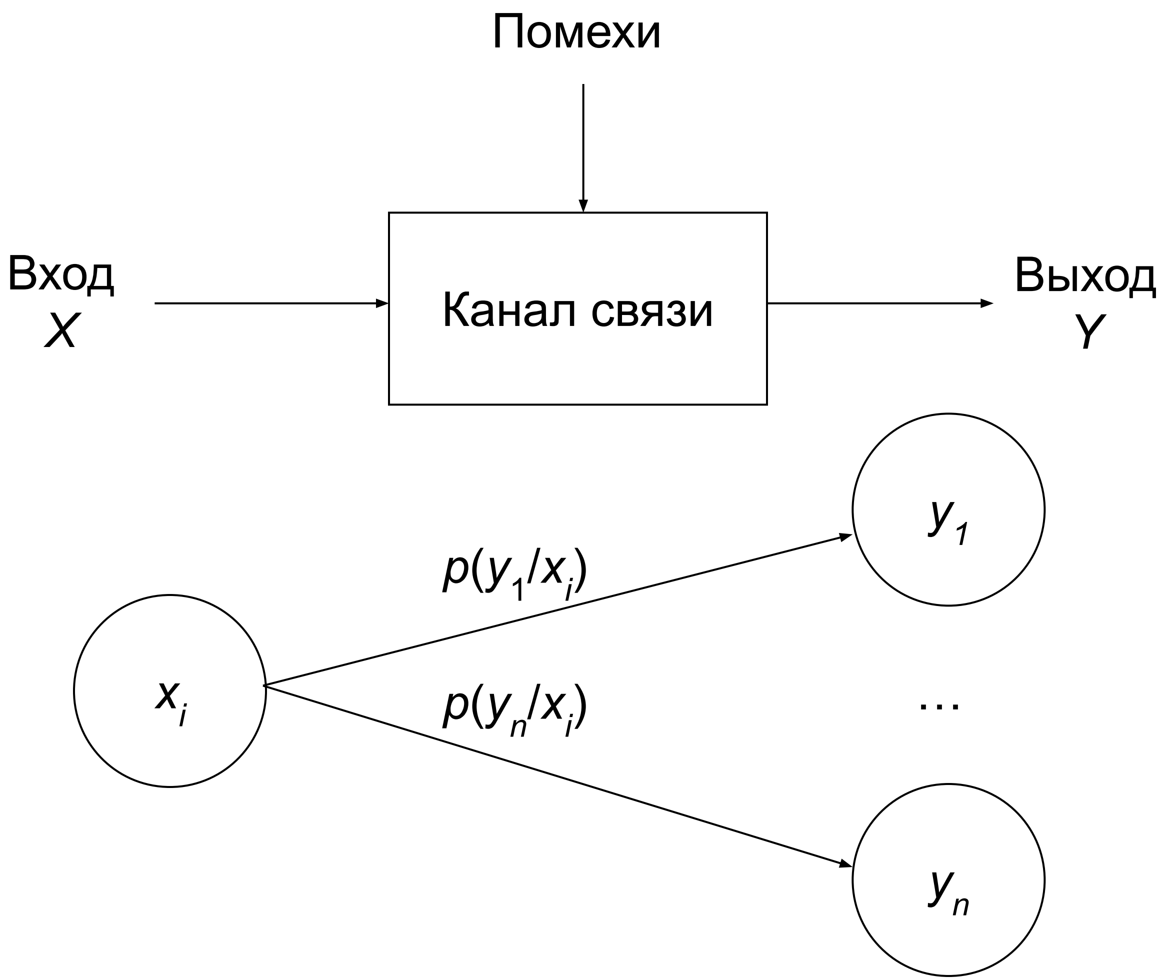
$$R = \frac{I(X;Y)}{T}$$

$$C = R_{\max}$$

Теорема Шеннона I

Дан канал связи без помех с пропускной способностью C и источник информации с энтропией за единицу времени H. Передача информации от данного источника по данному каналу без задержек возможна тогда и только тогда, когда $H \leq C$.

Канал связи с помехами



Бинарный симметричный канал связи с помехами

$$X=\{0,1\}, Y=\{0,1\}, I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

$$\max\{H(Y)\}=\log 2=1$$

$$H_{Y/X}(0/0)=-p_X(0)p_{Y/X}(0/0)\log p_{Y/X}(0/0)$$

$$H_{Y/X}(1/0)=-p_X(0)p_{Y/X}(1/0)\log p_{Y/X}(1/0)$$

$$H_{Y/X}(0/1)=-p_X(1)p_{Y/X}(0/1)\log p_{Y/X}(0/1)$$

$$H_{Y/X}(1/1)=-p_X(1)p_{Y/X}(1/1)\log p_{Y/X}(1/1)$$

$$p_{Y/X}(0/1)=p_{Y/X}(1/0)=p$$

$$p_{Y/X}(0/0)=p_{Y/X}(1/1)=1-p$$

$$H(Y/X)=-p\log p-(1-p)\log(1-p)$$

$$C=\frac{1+p\log p+(1-p)\log(1-p)}{T}$$

m-ичный симметричный канал связи с помехами

$$X = \{0, 1, \ldots, m-1\}, Y = \{0, 1, \ldots, m-1\}, I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$\max\{H(Y)\} = \log m$$

$$H_{Y/X}(0/0) = -p_X(0) p_{Y/X}(0/0) \log p_{Y/X}(0/0)$$

$$H_{Y/X}(1/0) = -p_X(0) p_{Y/X}(1/0) \log p_{Y/X}(1/0)$$

$$\ldots$$

$$H_{Y/X}(m-1/0) = -p_X(0) p_{Y/X}(m-1/0) \log p_{Y/X}(m-1/0)$$

$$\ldots$$

$$p_{Y/X}(1/0) = \ldots = p_{Y/X}(m-1/0) = \ldots = p_{Y/X}(m-2/m-1) = p/(m-1)$$

$$p_{Y/X}(0/0) = \ldots = p_{Y/X}(1/1) = \ldots = p_{Y/X}(m-1/m-1) = 1-p$$

$$H(Y/X) = -(m-1)(p/(m-1)) \log(p/(m-1)) - (1-p)\log(1-p)$$

$$C = \frac{\log m + (m-1)(p/(m-1)) \log(p/(m-1)) + (1-p)\log(1-p)}{T}$$

Теорема Шеннона II

Дан канал связи с помехами с пропускной способностью R и источник информации с энтропией за единицу времени H. Передача информации от данного источника по данному каналу без задержек и искажений возможна тогда и только тогда, когда $H \leq R$.

Непрерывные каналы связи

Каналы, используемые для передачи непрерывных сигналов, принято называть непрерывными. Реальные непрерывные каналы представляют собой сложные инерционные нелинейные объекты, характеристики которых случайным образом изменяются во времени. Для анализа таких каналов разработаны математические модели различных уровней сложности и степени адекватности реальным каналам. Наиболее широко получили распространение модели, являющиеся разновидностями гауссова канала.

Гауссов канал

Под гауссовым каналом понимают математическую модель реального канала, построенную при следующих допущениях:

1. Основные физические параметры канала являются известными детерминированными величинами;
2. Полоса пропускания канала ограничена частотой $F_к$, герц;
3. В канале действует аддитивный гауссовый белый шум – аддитивная флюктуационная помеха ограниченной мощности с равномерным частотным спектром и нормальным распределением амплитуд.

Предполагается также, что по каналу передаются сигналы с постоянной средней мощностью, статистические связи между сигналами и шумом отсутствуют, ширина спектра сигнала и помехи ограничена полосой пропускания канала.

Преобразование Фурье

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$X(j\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Полоса пропускания канала

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X(\omega_i)\cos(\omega_i t - \varphi(\omega_i))$$

Ограничение на полосу пропускание канала показывает, что гармонические составляющие с частотами, значения которых превышают $2\pi F_к$, будут искажены при прохождении через этот канал.

Погрешность представления сигнала

Реальные сигналы являются ограниченными во времени. Это означает, что они имеют бесконечный спектр частот. Поэтому вводится некоторая частота $F_{ср} = \omega_{ср}/2\pi$, такая, что

$$\left|\hat{x}(t) - x(t)\right| \le \varepsilon,$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{cp}}^{\omega_{cp}} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

ε – заданная погрешность представления сигнала $x(t)$.

Помеха

При прохождении через канал связи к сигналу $x(t)$ добавляется (на него накладывается) помеха $n(t)$, представляющая сумму гармонических составляющих, амплитуды которых распределены по нормальному закону с нулевым средним. При этом все гармонические составляющие помехи имеют одинаковую мощность и любые две выборки помехи некоррелированы между собой, как бы близко по времени они не располагались.

Дискретные отсчеты сигнала

Непрерывные сигналы, имеющие спектр частот $F_{ср}$ могут быть переданы в виде дискретных отсчетов через интервалы времени $\Delta t = 1 / (2F_{ср})$.

Количество информации в непрерывном канале

Пусть в канале связи на передаваемое сообщение $x(t)$ накладывается помеха $n(t)$, а длительность сообщения составляет T.

Количество информации, содержащееся в принятых сообщениях Y относительно переданных X, определяется равенством $I(X;Y) = H(Y) – H(Y|X)$.

Значение $H(Y/X)$ обусловлено только шумами и может быть заменено на энтропию шума $H(N)$. Тогда $I(X;Y) = H(Y) – H(N)$. При этом

$H(Y) = H(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $H(N) = H(n_1, n_2, \ldots, n_m)$,

где $m = 2F_{\text{ср}}T$.

Пропускная способность непрерывного канала

$$R = \lim_{T\to\infty} \frac{I(X;Y)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{H(Y) - H(N)}{T}$$

$$C = R_{\max} = \lim_{T\to\infty} \frac{I(X;Y)_{\max}}{T}$$

$$I(X;Y)_{\max} = F_{cp} T \log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \approx F_{cp} T D$$

$$D = \log \frac{P}{N}$$

$$C = F_{cp} \log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \approx F_{cp} D$$

Объем канала

$$V_к = T_к \Delta F_к D_к$$

$$V_c = T_c \Delta F_c D_c$$

$$1. V_к \geq V_c$$

$$2. T_к \geq T_c, \Delta F_к \geq \Delta F_c, D_к \geq D_c$$

Теоремы Шеннона для непрерывных каналов связи

В заключение отметим, что для непрерывных каналов связи также справедливы теоремы Шеннона о кодировании (предполагается, что кодируются выборки непрерывного сигнала, взятые с интервалом дискретизации, величина которого не больше значения определяемого теоремой Котельникова).