Импульсные сигналы и переходные процессы.

Общие сведения об импульсных сигналах.

- В электрических цепях наряду с непрерывными сигналами, которые описываются непрерывными функциями времени, часто применяются и импульсные сигналы. Они существуют не на всей временной оси, и или их величина не произвольна.
- Названия импульсным сигналам дают в соответствии с их формой.
- Основными простейшими импульсными сигналами являются сигналы, представленные на рис. 6.1:
- 1′ – положительный перепад амплитуды *E*;
- 2′ – отрицательный перепад амплитуды *E*, задержанный на *tu*;
- 3′ – одиночный прямоугольный импульс, есть сумма двух предыдущих сигналов.
- Кроме перечисленных сигналов в импульсной технике широко применяются сигналы, показанные на рис. 6.2:
- 1 – треугольный импульс,
- 2 – пилообразный импульс,
- 3 – экспоненциальный импульс.

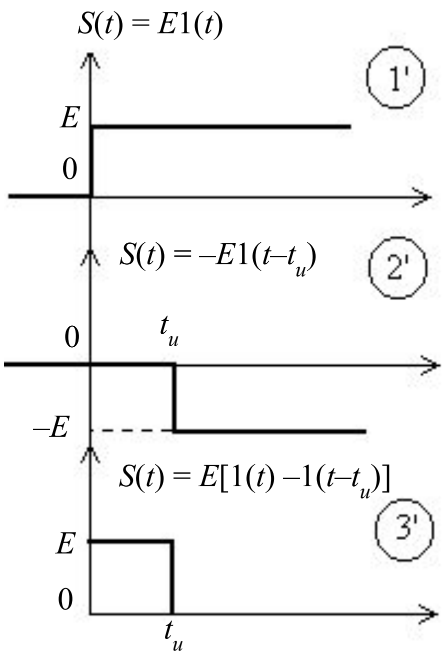


Рис. 6.1

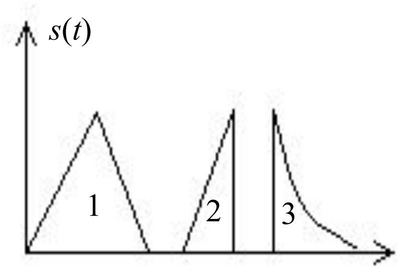


Рис. 6.2

Переходная и импульсная характеристика цепи

- **1. Переходной характеристикой *h*(*t*)** линейной цепи называют отклик $y(t) = h(t)$ (выходной сигнал) цепи на единичное ступенчатое воздействие $x(t)=1(t)$ напряжения или тока, при нулевых начальных условиях.
- Если ступенчатое воздействие имеет амплитуду X_0, то ПХ находится так $\boldsymbol{h(t) = y(t)/X_0}$
- Вид переходной характеристики цепи зависит от схемы цепи.

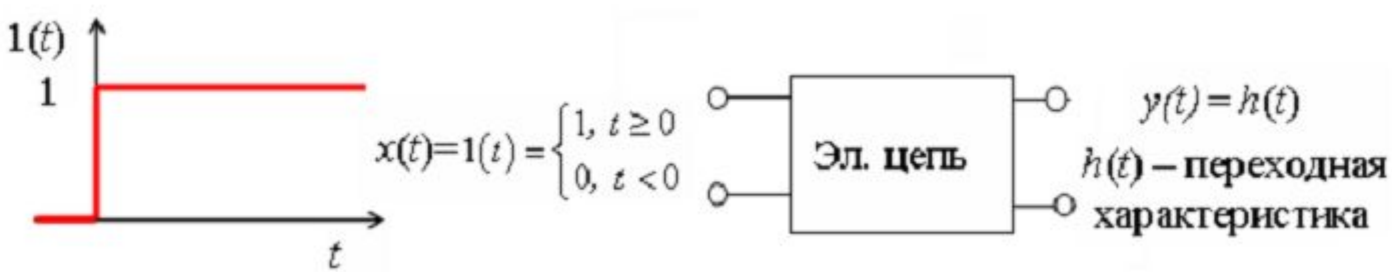
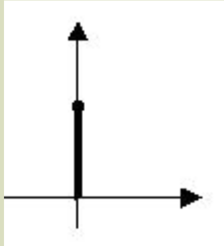


Рис. 1.3. К определению переходной характеристики цепи

2. Импульсная характеристика g(t)– это отклик цепи на воздействие сигнала в виде дельта-функции δ(t) при нулевых начальных условиях.

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \infty, & t=0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$



Свойства $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = s(t_0)$

Связь между импульсной и переходной характеристикой:т.к. $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$ То $\quad g(t) = dh(t)/dt$

Общие сведения о переходных процессах в линейных цепях

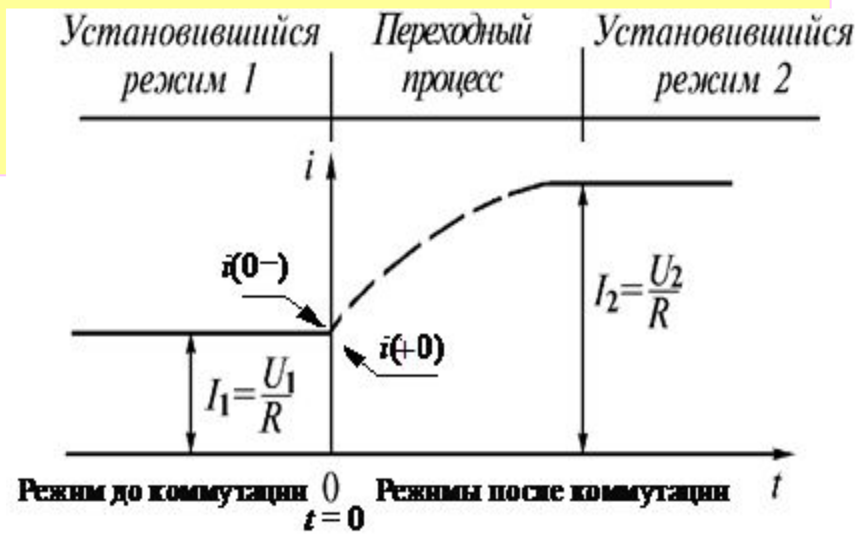
- Различают два режима работы цепи :

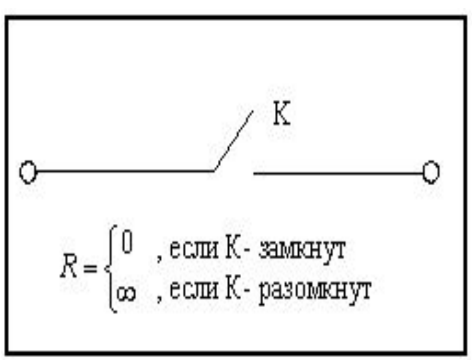
  1. установившейся, когда параметры сигналов постоянны во времени;

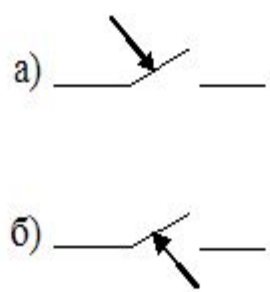
  2. неустановившейся - параметры сигналов во времени изменяются.

- ***Переходным процессом*** **(режимом)** называется процесс изменения токов и напряжений в цепи при ее переходе от одного установившегося режима к другому. Причина переходного процесса различные **коммутации в цепи**.
- ***Коммутацией*** принято называть мгновенное изменение схемы соединения или параметров ее элементов. Принято считать, что коммутация происходит мгновенно, в момент времени *t*=0, с помощью идеального ключа, ключ это двухполюсник с двумя состояниями с : 0 –ключ замкнут и ∞ - ключ разомкнут, или ступенчатого сигнала.
- Переходные процессы возникают в цепях, содержащих энергоемкие элементы (индуктивные и емкостные элементы), и обусловлены тем, что энергия магнитного и электрического полей не может изменяться мгновенно т.к. в этом случае создается бесконечная мощность.

  В резистивных цепях переходные процессы протекаю мгновенно.



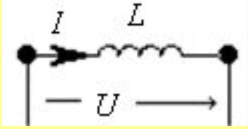




Законы коммутации

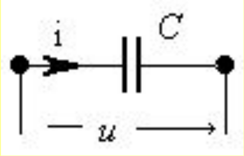
- В основе анализа переходных процессов лежат законы коммутации:

- ***Первый закон коммутации:*** в начальный момент времени после коммутации (при *t*=+0), ток через индуктивность сохраняет такое же значение, как и перед коммутацией (при *t*= - 0), т.е.:



$$i_L(+0) = i_L(-0) \qquad W_L = \frac{LI^2}{2}$$

- ***Второй закон коммутации:*** в начальный момент времени после коммутации (при *t*= +0), напряжение на емкости сохраняет такое же значение, как и перед коммутацией (при *t*= -0), т.е.:



$$u_C(+0) = u_C(-0) \qquad W_c = \frac{CU^2}{2}$$

- Характер переходного процесса зависит от числа реактивных элементов, от формы токов и напряжений источников, от схемы цепи, от начальных условий и от анализируемой величины (ток или напряжение).

Начальные условия переходного процесса

- **Под начальными условиями** понимают значения тока и напряжения на элементах схемы непосредственно в момент коммутации.

- Различают два вида начальных условий: ***независимыми*** **или** ***зависимыми***.

- ***Независимыми*** называют начальные условия, подчиняющиеся законам коммутации, они не зависят от коммутаций в схеме. Это напряжение на емкости $u_C(0)$ и ток индуктивности $i_L(0)$ в момент коммутации. Если в момент коммутации они равны нулю, то начальные условия называют *нулевыми*. В противном случае – *ненулевыми*.

- Остальные начальные условия: напряжение и ток в ветви с сопротивлением $u_R(0)$ и $i_R(0)$, напряжение на индуктивности $u_L(0)$, ток в ветви с емкостью $i_C(0)$ - **это** ***зависимые*** начальные условия. Они не подчиняются законам коммутации и могут изменяться скачком.

Схемы замещения реактивных элементов при коммутации

- Из законов коммутации следует

1. Сразу после коммутации (при t=+0) индуктивный элемент эквивалентен независимому источнику тока, т.к $i_L(+0) = i_L(-0)$. При нулевых начальных условиях индуктивный элемент эквивалентен разрыву цепи (холостой ход - ХХ).,
2. емкостной элемент эквивалентен источнику напряжения, т.к. $u_C(+0) = u_C(-0)$ а при нулевых начальных условиях - короткому замыканию (КЗ).

- При постоянном токе, когда t= - 0 и t=∞, т.к. ω=0, индуктивность эквивалентна КЗ, а емкость – ХХ (рис.1.2),.

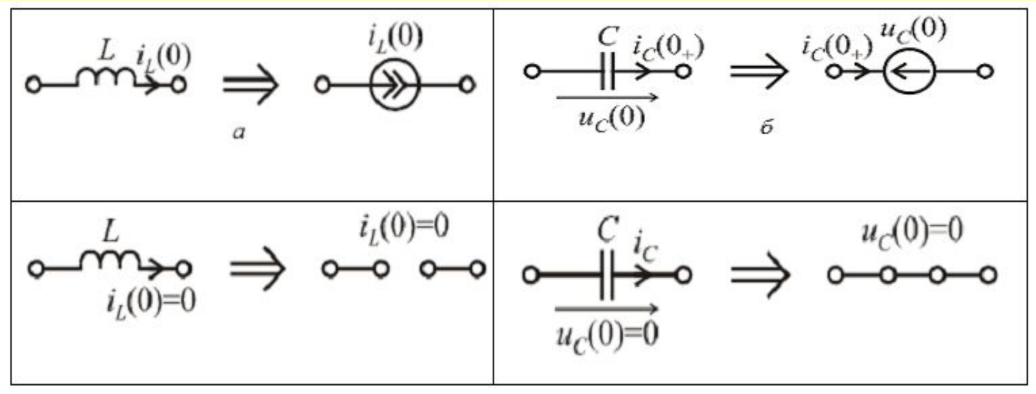


Рис. 1.1. Эквивалентные схемы реактивных элементов при t=+0 (ω→∞).

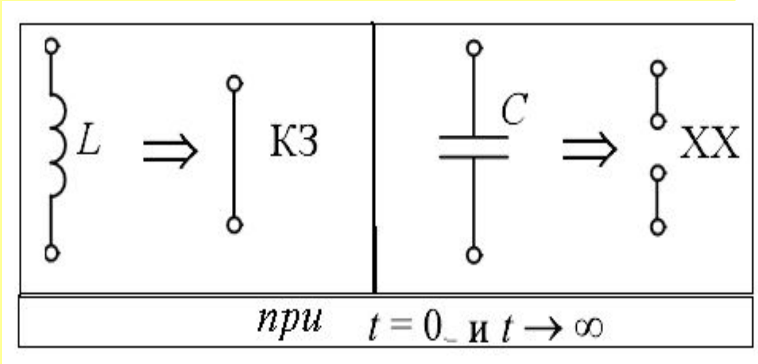


Рис.1.2. Эквивалентные схемы реактивных элементов *L* и *C* по постоянному току

6.3. Методы анализа линейных цепей при импульсном воздействии

•Задача анализа цепи заключается в отыскании отклика при известном входном сигнале (воздействии).

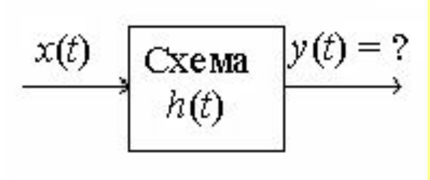


Рис. 6.8

•При импульсном воздействии, когда $x(t)$ – произвольная функция времени, основными методами анализа цепей являются:

•1) классический метод;

•2) спектральный метод;

•3) операторный метод;

•4) временной (метод интеграла Дюамеля).

•Расчет переходной характеристики есть частный случай расчета переходного процесса.

1.3. Расчет переходных процессов в линейных цепях

- В простых цепях расчет переходных процессов и анализ **проводят классическим методом**. Он обладает физической наглядностью. В сложных цепей применяют **операторный метод. Класс. метод состоит в следующем**
- 1. Составляют систему уравнений на основании законов Кирхгофа для мгновенных значений напряжения и тока для состояния цепи после коммутации. Для простых цепей эту систему уравнений можно исключением переменных свести к одному в общем случае неоднородному дифференциальному уравнению относительно какой-либо величины $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$
- (4.4.1)

где a_n, ., a_0 – постоянные коэффициенты; t – время; $f(t)$ – внешнее воздействие (ЭДС, ток); y – искомая функция (ток, напряжение, .); n – порядок уравнения (цепи) обычно равен числу реактивных элементов в схеме.

В качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на ёмкости.

2. Записывают общее решение линейного дифференциального уравнения. Оно. состоит их двух составляющих

$$\boldsymbol{y(t) = y_1(t) + y_2(t),} \qquad (4.4.3)$$

- где $y_2(t)$ – это частное решение неоднородного уравнения, оно зависит от источников и полученные при этом токи и напряжения называют установившимися или принужденными. Частое решение находят в стационарном режиме в послекоммутационной цепи, когда переходной процесс закончен , т.е. когда $t \to \infty$, т.к., $\lim\limits_{x\to\infty} y_{cв}(t) = 0$
- **y1(*t*)** – общее решение однородного линейного дифференциального уравнения, когда $\boldsymbol{f = 0}$. Это решение не зависит от воздействия (x) и называется свободной составляющей общего решения. Оно известно: $y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t}$

где *pi* – корни характеристического уравнения, *Ai* – постоянные интегрирования.

- 3. Находят вынужденную составляющую, по схеме замещения когда $t \to \infty$, **y2(t)= y(t→∞)**
- 4. Корни *pi* находят из решения характеристического уравнения: $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_0 = 0$
- 5. Постоянные интегрирования *Ai* уравнений для свободных составляющих определяют из начальных условий, используя два закона коммутации: - для индуктивности и - для емкости, по схеме замещения при $t \to 0$.
- 6. Проводят анализ корней и записывают общее решение.

Этапы расчета переходного процесса в цепи классическим методом

- Этапы расчета переходного процесса в цепи классическим методом:
- 1. Найти независимые начальные условия, то есть, напряжения на ёмкостях и токи на индуктивностях в момент начала переходного процесса Uc(-0) и IL(-0).
- 2. Составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа2. Составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и т.д., описывающих состояние цепи после коммутации, и методом исключением переменных получить одно дифференциальное уравнение, в общем случае неоднородное относительно искомого тока *i* или напряжения *u*. Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на емкостном элементе.
- 3. Составить общее решение полученного неоднородного дифференциального уравнения цепи в виде суммы частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.
- 4. Найти для общего решении постоянные интегрирования из начальных условий, т. е. условий в цепи в начальный момент времени после коммутации.
- Применительно к электрическим цепям в качестве частного решения неоднородного дифференциального уравнения выбирают установившийся режим в рассматриваемой цепи (если он существует), т. е. постоянные токи и напряжения, если в цепи действуют источники постоянных ЭДС и токов, или синусоидальные напряжения и токи при действии источников синусоидальных ЭДС и токов. Токи и напряжения установившегося режима называют *установившимися*.
- Общее решение однородного дифференциального уравнения описывает процесс в цепи без источников ЭДС и тока, который поэтому называют *свободным процессом*. Токи и напряжения свободного процесса называют *свободными*, а их выражения должны содержать постоянные интегрирования, число которых равно порядку однородного уравнения.

6.3.2. Спектральный метод анализа

- Спектральный метод применяется в тех случаях, когда входной сигнал может быть представлен спектром. Сигнал имеет спектр, когда он обладает конечной энергией, т.е. удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S^2(t)dt < \infty$$

Этапы применения метода (рис. 6.3):

1) по известному сигналу находится его спектр:

$$S_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t)e^{-j\omega t}dt$$

– прямое преобразование Фурье;

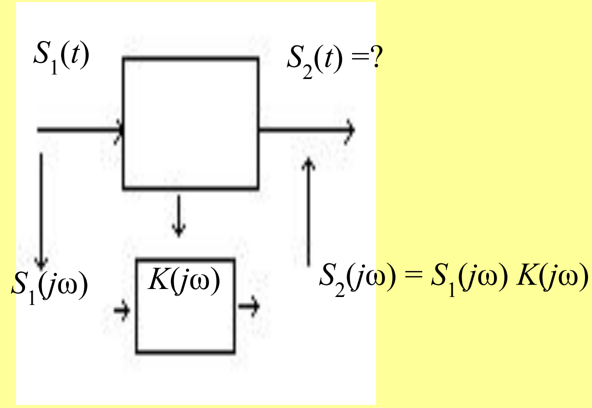


Рис. 6.3

2) по известной схеме электрической цепи
определяется ее частотная передаточная характеристика:

$$H(j\omega) = \frac{Y_m}{X_m}$$

;

3) находится спектральная плотность выходного сигнала:

$$S_2(j\omega) = H(;j\omega)S_1(i\omega)$$

4) по известному спектру выходного сигнала находится сам выходной сигнал

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- обратное преобразование Фурье

6.3.3. Операторный метод анализа

- Операторный метод расчета переходных процессов применим при любых входных сигналах. Метод основан на том, что функции $s(t)$ вещественной переменной t, которую называют *оригиналом*, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = \alpha + j\omega$, которую называют *изображением*. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p, а интегрирование – делением на него), что, в свою очередь, определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. Соответствие между изображением $F(p)$ и оригиналом $s(t)$ в сокращенной записи обозначается: $F(p) = s(t)$ или $F(p) = L\{s(t)\}$.

  Порядок расчета переходных характеристик заключается в следующем (рис. 6.4):

  1) находим операторное представление входного сигнала:

$$S_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t) e^{-pt} dt$$

– прямое преобразование Лапласа;

  2) находим операторную передаточную функцию цепи:

$$H(p) = H(j\omega)\Big|_{j\omega = p}$$;

  3) находим операторное представление отклика:

$$S_t(p) = H(p) S_t(p)$$;

  4) с помощью обратного преобразования Лапласа находим отклик цепи:

.

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(p) e^{pt} dp$$

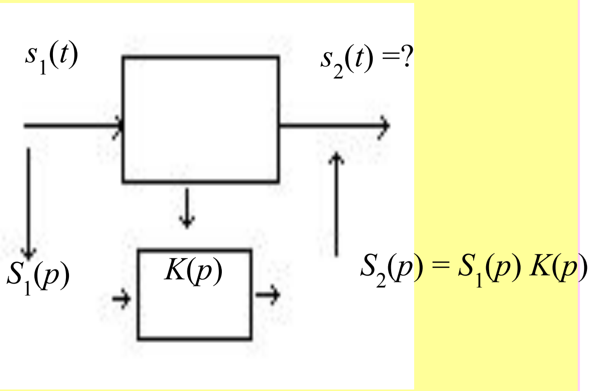


Рис. 6.4

6.3.4. Метод интеграла Дюамеля

- Метод позволяет находить отклик цепи при нулевых начальных условиях при произвольном входном сигнале и известной переходной (импульсной) характеристике цепи $h(t)$ (рис. 6.8).
- Произвольный импульсный сигнал $x(t)$ (рис. 6.9) заменим совокупностью элементарных ступенчатых сигналов с амплитудами Δx, возникающими в моменты времени $\tau_к$ со сдвигом по времени на $\Delta\tau$.

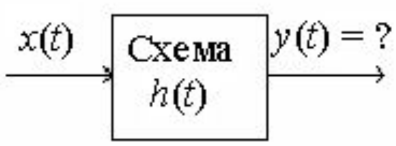


Рис. 6.8

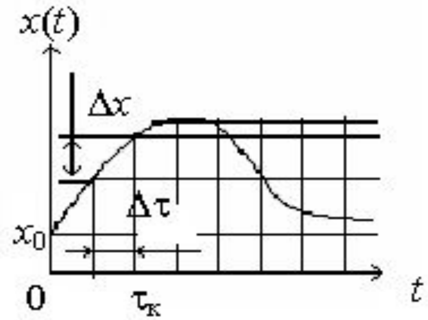


Рис. 6.9

Как следует из рис. 6.9, x_0 – амплитуда нулевого ступенчатого сигнала, при t=0.

Тогда отклик на него $y(0) = h(t)x_0$

Δx– амплитуда элементарного ступенчатого сигнала

$$\Delta x = x'_\tau(\tau_к)\Delta\tau$$

где $x'(\tau_к)$ – производная от сигнала в момент времени $\tau_к$, она равна тангенсу угла наклона сигнала в момент времени $\tau_к$.

Тогда отклик на элементарный ступенчатый сигнал $\Delta x h(t-\tau_к) = x'_t(\tau_{ê})h(t-\tau_{ê})\Delta\dot{\tau}$

- Используя принцип суперпозиции и переходя к пределу суммы при $\Delta\tau\to 0$ ($\Delta\tau = d\tau$), можно записать

$$y(t) = h(t)x_0 + \sum x'(\tau_к)h(t-\tau_к)\Delta\tau_0 = \lim_{\Delta\tau\to\infty} = x\, h(t) + \int_0^t x'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

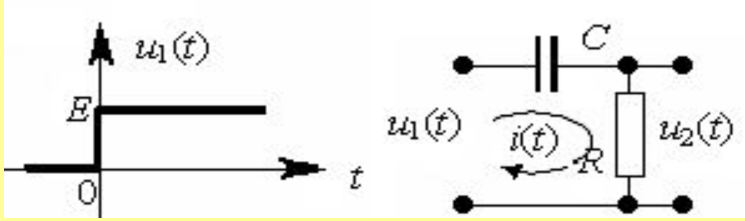
- Последнее выражение и называется интегралом Дюамеля. Оно позволяет получить отклик на заданное воздействие в любой момент времени t после коммутации. Интегрирование ведется по τ – текущее время ($0 < \tau < t$), причем выражения $x'(\tau)$ и $h(t-\tau)$ получают из выражений для $x(t)$ и $h(t)$ путем замены t на τ и $t-\tau$.

Передача импульсных сигналов через простейшие цепи

•Электрические цепи служат для связи различных устройств между собой. При этом ставится различные задачи например: неискаженная передача сигнала или преобразования сигналов одной формы в другую.

Передача импульсных сигналов через дифференцирующую цепь

•Цепь, состоящая из *RC*-элементов (рис) называется дифференцирующей *RC*-цепью.



•Установим связь между выходным *u*2 и входным *u*1 напряжениями, считая входной сигнал *u*1 произвольным.

$$u_C + u_R = u_1(t);$$

•Используя второй закон Кирхгофа и соотношения, устанавливающие связь между напряжениями и токами на элементах схемы, после дифференцирования получим.

$$u_2 = iR \Rightarrow i = \frac{u_2}{R}, \quad u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt + u_C(-0).$$

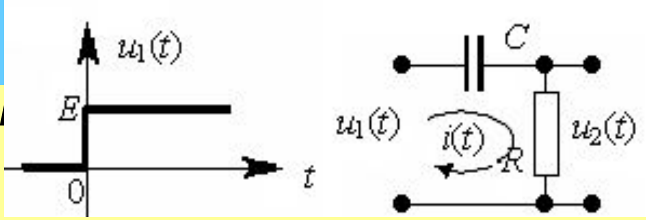
$$\text{или } u_2 + \frac{1}{RC}\int u_2\,dt = U_1,$$

$$RC\frac{du_2}{dt} + u_2 = RC\frac{du_1}{dt}.$$

•Последнее означает, что выходной сигнал есть производная от входного сигнала. Отсюда и название этой цепи – дифференцирующая цепь.

$$\textit{Если } RC \ll 1, \textit{ то } u_2 = RC\frac{du_1}{dt}.$$

Рассмотрим два частных случая.



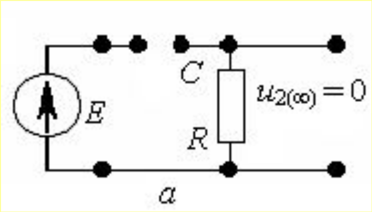
- **А. Входной сигнал – ступенчатое напряжение амплитудой**
- Используя классический метод, определим отклик цепи.
- 1) Составим дифференциальное уравнение
 и приведем его к стандартному виду:

$$RC\frac{du_2}{dt}+u_2=RC\frac{du_1}{dt}$$

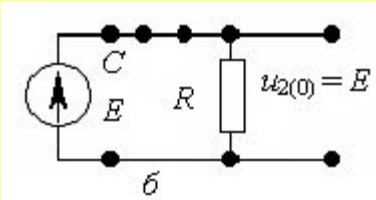
- 2) Запишем общее решение

$$u_2(t)=u_{вын}+u_{своб}=u_{2(\infty)}+Ae^{p_1t}$$

- 3) Найдем вынужденную составляющую общего решения
 в стационарном (установившемся) режиме, когда $t\to\infty$ ($\omega=0$),
 по схеме замещения исходной цепи при $\omega=0$
 Из схемы следует, что $\boldsymbol{u_2(\omega=0)=0}$.



- 4) Найдем показатель экспоненты $p1$.
 Коэффициенты p находят, как корни характеристического
 уравнения $RCp1+1=0$. Отсюда $p1=-(RC)^{-1}$.



- 5) Найдем произвольную постоянную $A1$ из начальных условий
 $t=+0$ и законам коммутации для емкости используя схему
 замещения.(при $t=+0$, $\omega\to\infty$). **u2(0)=*A*1=*E*. Отсюда А1=Е.**
 .
- 6) Запись общего решения:

$$U_2(t)=Ee^{-\frac{t}{RC}}=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Временная диаграмма приведена на рис.- экспоненц.импульс.
 Он имеет два параметра: 1. Е – амплитуда экспоненциального импул
 2. τ=RC – постоянная времени

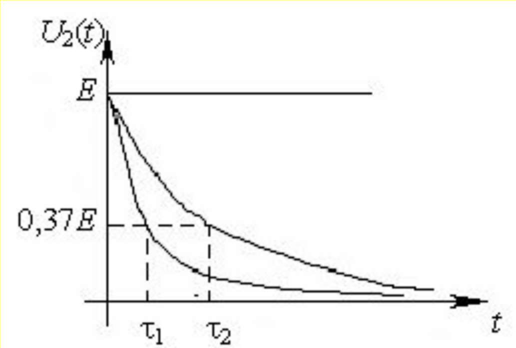


Рис. 6.1

- **Б. Пусть входной сигнал – одиночный прямоугольный импульс**

амплитудой *E* и длительностью *t*и. Такой импульс представляет собой суперпозицию двух ступенчатых сигналов и аналитически записывается как

$$U_{1}(t) = E[1(t) - 1(t - t_{и})]$$

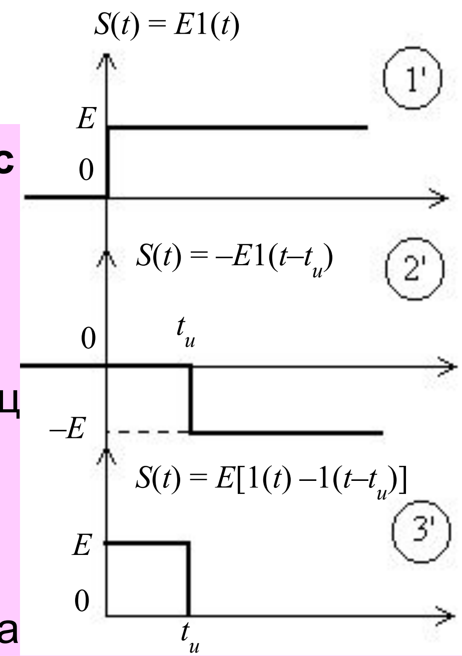


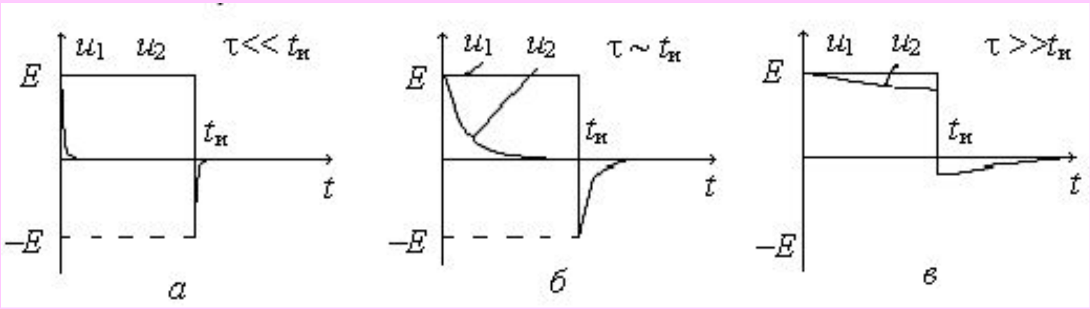
Рис. 6.1

- Зная отклик на ступенчатый сигнал и используя принцип суперпозиц аналитическое выражение для выходного сигнала:

$$U_1(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}1(t) - Ee^{-\frac{t-t_и}{\tau}}1(t - t_n)$$

- На рис 6.15 показаны три временные диаграммы выходного сигнала

при различных соотношения между т и *t*и.



В зависимости от соотношения между τ и $t_и$ эта RC -цепь имеет три названия.

Если τ << *t*и, то цепь называется дифференцирующей

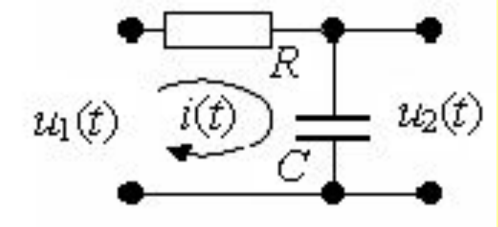
Если τ ≈ *t*и, то цепь называется укорачивающей

Если τ >> *t*и, то цепь называется разделительной

•.

Передача импульсных сигналов через интегрирующую цепь

•Цепь, состоящая из *RC*-элементов (рис) называется интегрирующей *RC*-цепью.



•Установим связь между выходным *u*2=F(u1), считая входной сигнал *u*1 произвольным.

$$u_C + u_R = u_1(t);$$

•Используя второй закон Кирхгофа и соотношения, устанавливающие связь между напряжениями и токами на элементах схемы, после подстановки в первое уравнение получим.

$$u_2 = u_C, \quad i = C\frac{du_2}{dt}, \quad u_R = Ri = RC\frac{du_2}{dt}.$$

$$RC\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

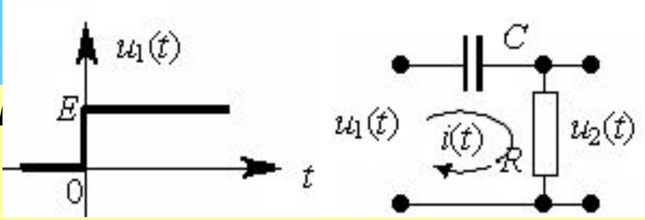
•Последнее означает, что выходной сигнал есть интеграл от входного сигнала.

Отсюда и название этой цепи – интегрирующая цепь

$$\textit{Если } RC\frac{du_2}{dt} >> u_2, \textit{ то } RC\frac{du_2}{dt} = u_1$$

$$\textit{отсюда, } u_2 = \frac{1}{RC}\int u_1 dt$$

Рассмотрим два частных случая



•А. Входной сигнал – ступенчатое напряжение амплитудой

•Используя классический метод, определим отклик цепи.

•1) Составим дифференциальное уравнение и приведем его к стандартному виду:

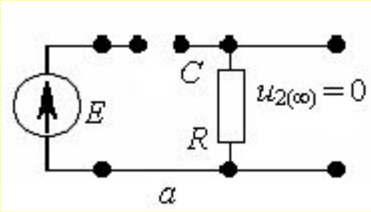
$$RC\frac{du_2}{dt} + u_2 = RC\frac{du_1}{dt}$$

•2) Запишем общее решение

$$u_2(t) = u_{вын} + u_{своб} = u_{2(\infty)} + A e^{p_1 t}$$

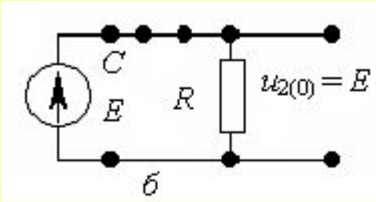
•3) Найдем вынужденную составляющую общего решения в стационарном (установившемся) режиме, когда $t \to \infty$ ($\omega = 0$), по схеме замещения исходной цепи при $\omega = 0$

Из схемы следует, что $\boldsymbol{u_2(\omega=0)=0}$.



•4) Найдем показатель экспоненты $p1$.

Коэффициенты p находят, как корни характеристического уравнения $RCp1 + 1 = 0$. Отсюда $p1 = -(RC)^{-1}$.

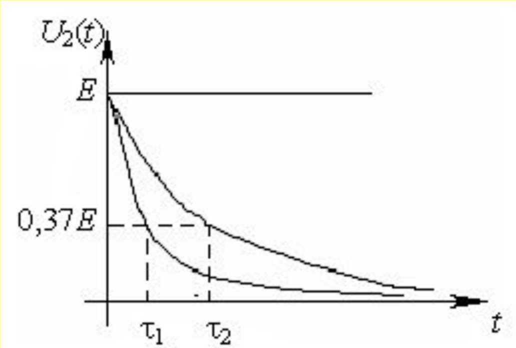


•5) Найдем произвольную постоянную $A1$ из начальных условий $t = +0$ и законам коммутации для емкости используя схему замещения.(при $t = +0$, $\omega \to \infty$). **u2(0)=*A*1=*E*. Отсюда А1=Е.**

.

•6) Запись общего решения:

$$U_2(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$



•Временная диаграмма приведена на рис.- экспоненц.импульс.

Он имеет два параметра: 1. Е – амплитуда экспоненциального импул

2. τ=RC – постоянная времени

Связь между дифференциальным уравнением и характеристиками электрической цепи

1. В общем случае связь между входным сигналом и выходным сигналами устанавливается ДУ

$$Y(t) = f(X(t)) \rightarrow a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0$$

2. Связь дифференциального уравнения с частотной передаточной функцией.

Дисциплина:
Электротехника и электроника

Лектор: Погодин Дмитрий Вадимович
Кандидат технических наук,
доцент кафедры РИИТ
(кафедра Радиоэлектроники и информационно-измерительной техники)