

РАЗДЕЛ 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

ТЕМА 5.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

План

- 1. Случайные величины**
- 2. Числовые характеристики случайных величин**
- 3. Нормальный закон распределения.
Закон больших чисел**

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

- **Опр.** Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.
- **Дискретной** называют такую случайную величину, которая принимает счётное множество значений, т. е. такое множество, элементы которого можно посчитать.
- **Непрерывной** называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определённом интервале.
- Случайная величина считается заданной, если известен закон распределения случайной величины.



- **Опр.** Распределением (законом распределения) случайной величины называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Значение случайной величины x_i	x_1	x_2	$\dots$ $\dots$	x_n
Вероятность значений p_i	p_1	p_2	$\dots$ $\dots$	p_n

Табличную форму задания называют также **рядом распределения**.



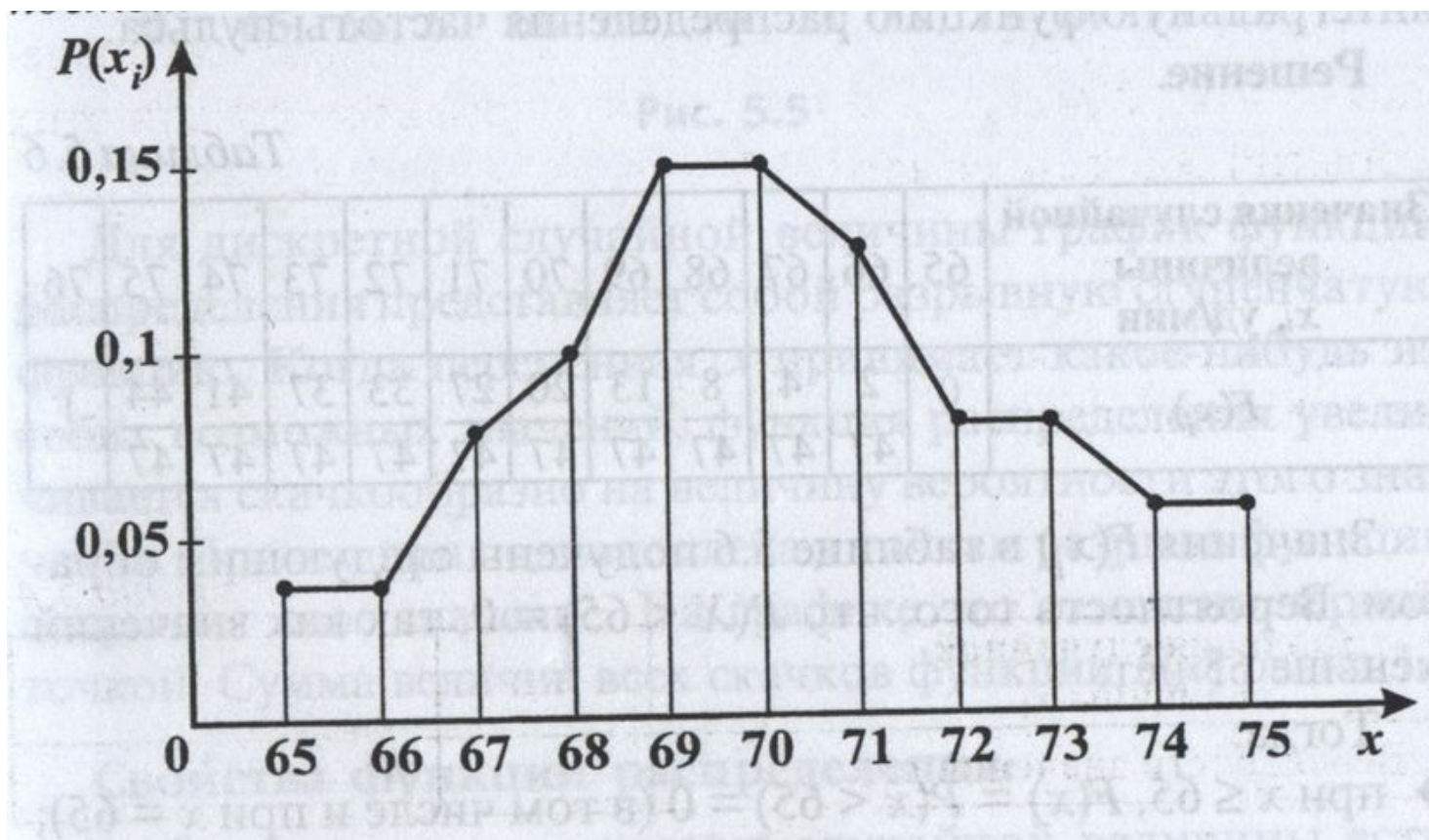
ПРИМЕР 1

- Построить график ряда распределения значений частоты пульса в гипотетической группе из 47 человек.

Значение случайной величины уд/мин	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Значения вероятности $p(x_i)$											

По данным таблицы построен график, который называется многоугольником распределения вероятностей.





Опр. Функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее фиксированного действительного числа x , т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключённая между нулём и единицей: $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси, и для любых $\alpha < \beta$ выполняется равенство:
$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$
3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности – единице, т.е.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$



- **Опр.** Функцию $f(x)$ называют дифференциальной функцией распределения, или плотностью распределения (плотностью вероятности), непрерывной случайной величины X .



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Для любых x дифференциальная функция распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$.
2. Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство: $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
3. Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Это свойство называется условием нормировки плотности вероятностей.



ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

▣ **Математическое ожидание** характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

○ $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i.$

○ Для непрерывных случайных величин с плотностью распределения $f(x)$ математическое ожидание равно определённомu интегралу:

$$M(X) =$$

$$\int_a^b x f(x) dx \text{ или в общем случае } M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

ПРИМЕР 2

- Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X , зная закон её распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

По формуле $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i$ находим:

$$M(X) = -1 \cdot 0,05 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,05 = 1,1.$$



ПРИМЕР 3

НАЙТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ X , ЗНАЯ ЗАКОН ЕЁ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

□

- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ x & \text{при } 0 \leq x < 1; \\ -x + 2 & \text{при } 1 \leq x < 2; \\ 0 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$

- По формуле $M(X) = \int_a^b x f(x) dx$ находим:

- $M(X) =$

$$\int_0^2 x f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2 - x) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x^2 \Big|_1^2 -$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = 1.$$



СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.
3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.
5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от её математического ожидания всегда равно нулю: $M(X - M(X)) = 0$.



ДИСПЕРСИЯ ХАРАКТЕРИЗУЕТ РАССЕЯНИЕ (ОТКЛОНЕНИЕ) СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ.

▣ $D(X) = M(X - M(X))^2.$

○ Для дисперсии случайной величины: $D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i.$

○ Для непрерывных случайных величин с плотностью вероятности $f(x)$:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx.$$



Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и её неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии - **среднее квадратическое отклонение**. Эта величина даёт представление о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания.

σ (сигма) = $\sqrt{D(X)}$.



ПРИМЕР 4

- Случайная величина задана следующим рядом распределений.

X	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Для нахождения математического ожидания воспользуемся формулой $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$, а для дисперсии - $D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i$. Результаты вычисления сведём в таблицу.



x	p_i	$x_i p_i$	$x_i - M(X)$	$(x_i - M(X))^2$	$(x_i - M(X))^2 p_i$
-1	0,1	-0,1	-1,7	2,89	0,289
0	0,3	0	-0,7	0,49	0,147
1	0,4	0,4	0,3	0,09	0,036
2	0,2	0,4	1,3	1,69	0,338
	1	0,7			0,81

Из таблицы следует, что $M(X)=0,7$; $D(X)=0,81$.



ПРИМЕР 5

▣ Случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

○ Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.



□ По формуле $M(X) = \int_a^b x f(x) dx$ находим:

○ $M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

○ Далее по формуле $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx =$

○ $\int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}\right) 2x dx =$

○ $\int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x}{9}\right) dx = 2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{9}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{18}.$



❏ Основные свойства дисперсии:

1. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$.
2. Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$.
4. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом её математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.



НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

- ▣ **Опр.** Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами a и δ , если её плотность распределения задаётся формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}},$$

- Где a – математическое ожидание случайной величины; δ^2 – дисперсия случайной величины; δ – среднее квадратическое отклонение.



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось.
2. Функция $f(x)$ может принимать только положительные значения, $f(x) > 0$.
3. Предел функции $f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ равен нулю, т.е. Ох является горизонтальной асимптотой графика функции.
4. Функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
5. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x=a$.
6. Кривая нормального распределения в точках $x = a \pm \sigma$ имеет перегиб.



ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

- Под законом больших чисел понимают совокупность теорем, в которых доказывается факт приближения средних характеристик к некоторым постоянным величинам в результате большого количества испытаний.

Теорема Чебышева

- При неограниченном возрастании числа независимых, имеющих конечную дисперсию и проводимых в одинаковых условиях опытов, средняя арифметическая наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к её математическому ожиданию.

