

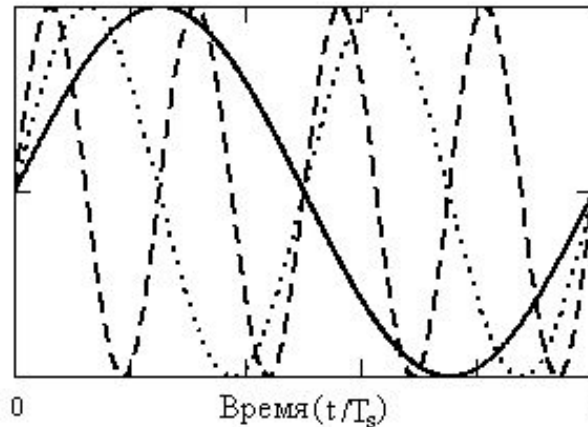
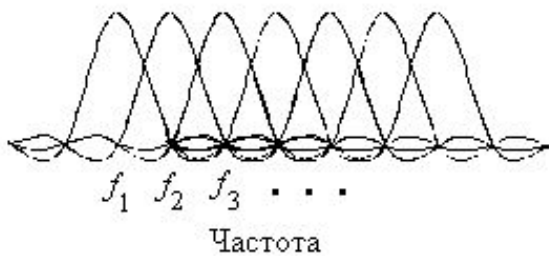
# Лекции 7-8. OFDM-системы связи

## 1. Ортогональные многомерные сигналы с частотным сдвигом

$$s_m(t) = \text{Re} \left[ \overline{s_{0m}(t) \exp(j2\pi f_c t)} \right] = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t] \quad 0 \leq t \leq T_s, m=1, 2, \dots, M.$$

$$s_{0m}(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \exp(j2\pi m \Delta f t)$$

$$\rho_{km} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt = \frac{\sin \pi T_s (m-k)\Delta f}{\pi T_s (m-k)\Delta f} e^{j\pi T_s (m-k)\Delta f} \quad |\rho_{km}| = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{T_s}$$



$\Delta f$  – минимальный частотный разнос между поднесущими,

Спектры и временная зависимость синусоид с ортогональными частотами



## 2. Формирование OFDM-сигнала

$d_k$  – информационный символ, передаваемый на  $k$ -й поднесущей,  
 $n$  – дискретное время,  $N_F$  – число точек БПФ.

Передаваемый узкополосный сигнал  
( $n$  – дискретное время,  $N_F$  – размерность БПФ)

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp(-j2\pi f_k n \Delta t)$$

$$f_k = k\Delta f, \quad \Delta f = \frac{1}{T_s}, \quad N_F = \frac{T_s}{\Delta t}$$

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N_F}\right)$$

## 3. Прием OFDM-сигнала

Принятый низкочастотный сигнал  $x(n) = \sum_{l=0} h(l)s(n-l) + z(n)$

$z(n)$  – гауссов собственный шум приемника с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$

Приемник выполняет прямое БПФ

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$



$$g_m = g_m^{(1)} + g_m^{(2)}$$

$$g_m^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{l=0}^{N_F} d_k h(l) \exp\left(\frac{j2\pi kl}{N_F}\right) \sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{N_F} \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right)$$


---

$$\sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{N_F} \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right) = \delta_{km} \quad g_m^{(1)} = \sqrt{N_F} H_m d_m$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{l=0}^{N_F} h(l) \exp\left(\frac{j2\pi ml}{N_F}\right)$$

$H_m$  – коэффициент передачи многолучевого канала на  $m$ -й поднесущей

$$g_m^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} z(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$

$$\langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{n=1}^{N_F} \sum_{q=1}^{N_F} \langle z(n) z^*(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right) \exp\left(\frac{-j2\pi mq}{N_F}\right)$$

$$\langle z(n) z^*(q) \rangle = \sigma_0^2 \delta_{nq} \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

$$\gamma_m = N_F \frac{\langle |H_m|^2 \rangle |d_m|^2}{\sigma_0^2} \quad \langle |H_m|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{l=0} \sum_{q=0} \langle h(l)h^*(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi m(l-q)}{N_F}\right)$$

$$\langle h(l)h^*(q) \rangle = P(l)\delta_{lq} \quad \sum_l P(l) = 1 \quad \langle |H_m|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \quad \gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\sigma_0^2}$$

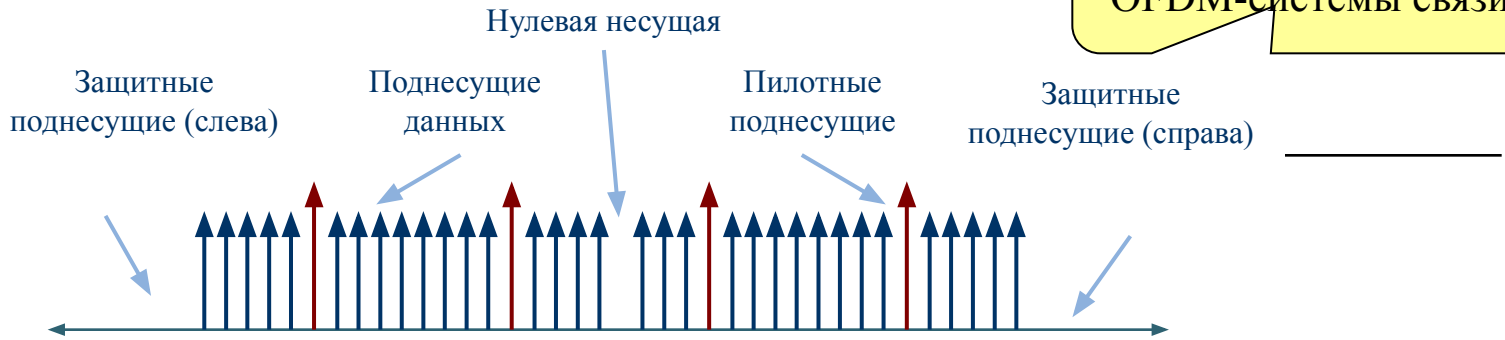
$$P_0 = \langle |s(n)|^2 \rangle = \frac{1}{N_F} \sum_{k=1}^{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \langle d_k d_m \rangle \exp\left(\frac{-j2\pi(k-m)n}{N_F}\right)$$

$$\langle d_k d_m \rangle = \langle |d_k|^2 \rangle \delta_{km}$$

$$P_0 = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_F} \langle |d_m|^2 \rangle = \langle |d_m|^2 \rangle$$

$$\gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\langle |d_m|^2 \rangle \sigma_0^2} \quad \langle \gamma_m \rangle = P_0 / \sigma_0^2$$

Частотная структура OFDM-системы связи



$$P_0 = \frac{1}{N_F} \sum_{m=1}^{N_{used}} \langle |d_m|^2 \rangle = \frac{N_{used}}{N_F} \langle |d_m|^2 \rangle$$

$$\langle \gamma_m \rangle = \frac{N_F}{N_{used}} \frac{P_0}{\sigma_0^2}$$

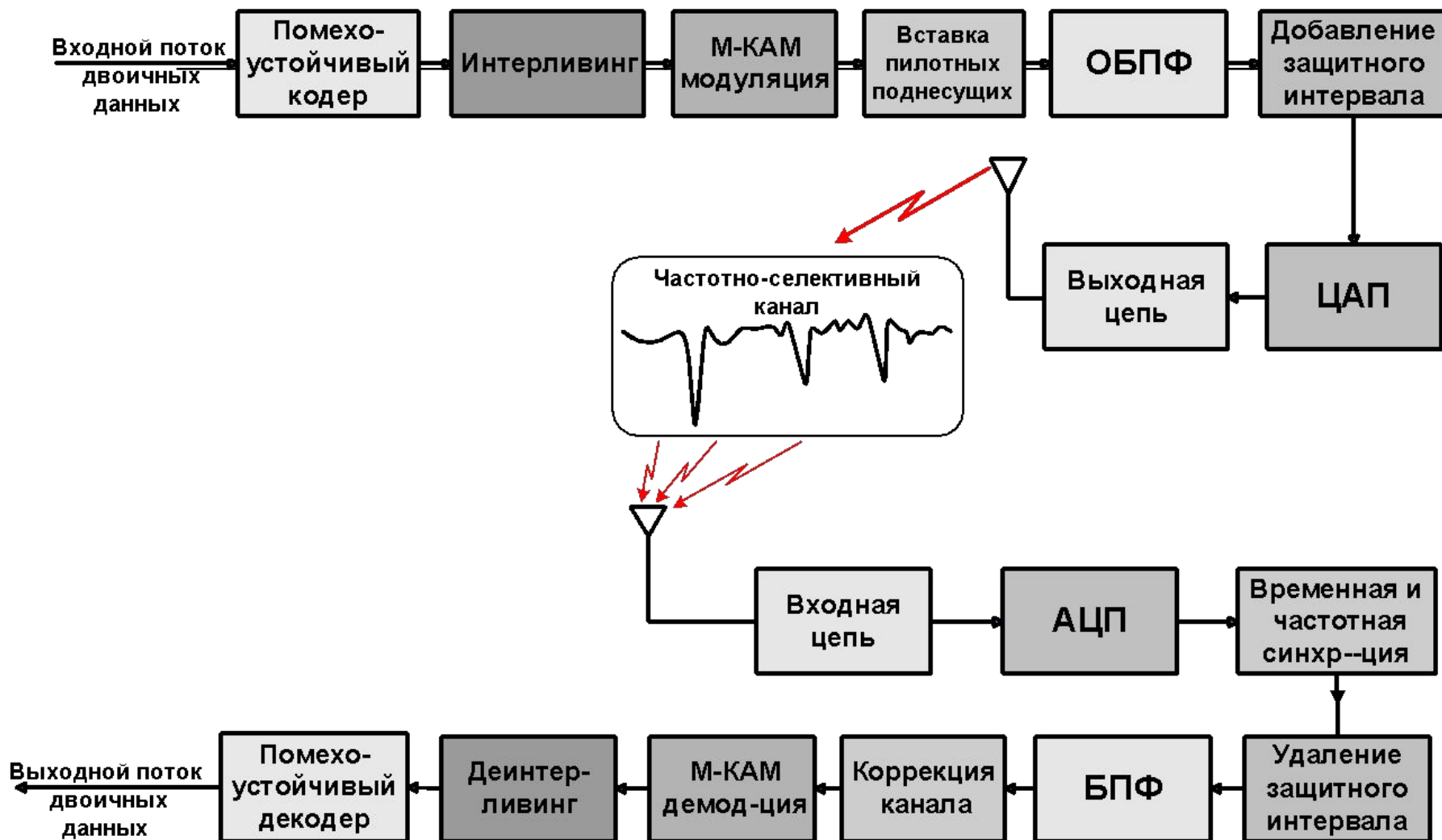
Информация из конца символа переносится в защитный интервал (циклический префикс).

Иначе возникнет помеха между поднесущими.

Длительность защитного интервала должна быть больше максимальной задержки в канале связи



## 4. Структурная схема OFDM-системы связи





# Коррекция канала или эквализация

Вход эквалайзера – выход блока БПФ

$$g_m = \sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)} \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

Задача эквалайзера – восстановить спектр переданного сигнала, искаженного в частотно-селективном пространственном канале

Выход эквалайзера

$$\hat{d}_m = f_m \cdot g_m; \quad f_m = ?$$

$f_m$  – коэффициент передачи эквалайзера на  $m$ -ой частоте

1. Простейший эквалайзер

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N_F} H_m} \quad \hat{d}_m = \frac{g_m}{\sqrt{N_F} H_m} = d_m + \frac{g_m^{(2)}}{\sqrt{N_F} H_m}$$

Если на некоторых частотах коэффициент передачи канала неограниченно уменьшается (например, на  $m$ -й поднесущей  $H_m \ll 1$ ), то дисперсия шумовой составляющей на этой частоте может неограниченно увеличиваться. Это плохо.

2. Эквализация по минимуму среднеквадратической ошибки

Функционал среднеквадратической ошибки  $J = \langle | \hat{d}_m - d_m |^2 \rangle = \langle | f_m g_m - d_m |^2 \rangle$

$$\min_{f_m} J = \min_{f_m} \langle | f_m g_m - d_m |^2 \rangle$$

\*



$$\frac{dJ}{df_m^*} = \frac{d}{df_m^*} \langle (f_m^* g_m^* - d_m^*)(f_m g_m - d_m) \rangle = \langle g_m^* (f_m g_m - d_m) \rangle = 0$$

Т.о. сигнал ошибки эквалайзера ортогонален входному сигналу

Коэффициент передачи эквалайзера на  $m$ -ой частоте  $f_m = \frac{\langle g_m d_m \rangle}{\langle |g_m|^2 \rangle}$

$$f_m = \frac{\langle (\sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)})^* d_m \rangle}{\langle |\sqrt{N_F} H_m d_m + g_m^{(2)}|^2 \rangle} = \frac{\sqrt{N_F} H_m^* |d_m|^2}{N_F |H_m|^2 |d_m|^2 + \sigma_0^2}$$

$N_F |H_m|^2 |d_m|^2 \gg \sigma_0^2; \quad f_m \approx \frac{1}{\sqrt{N_F} H_m}$  - совпадение с простейшим эквалайзером

$N_F |H_m|^2 |d_m|^2 \ll \sigma_0^2; \quad f_m \approx \frac{\sqrt{N_F} H_m^* |d_m|^2}{\sigma_0^2}$

Если на некоторых частотах коэффициент передачи канала неограниченно уменьшается (например, на  $m$ -й поднесущей  $H_m \ll 1$ ), то дисперсия шумовой составляющей на этой частоте не может неограниченно увеличиваться. Это хорошо.



## 6. Пропускная способность OFDM-системы

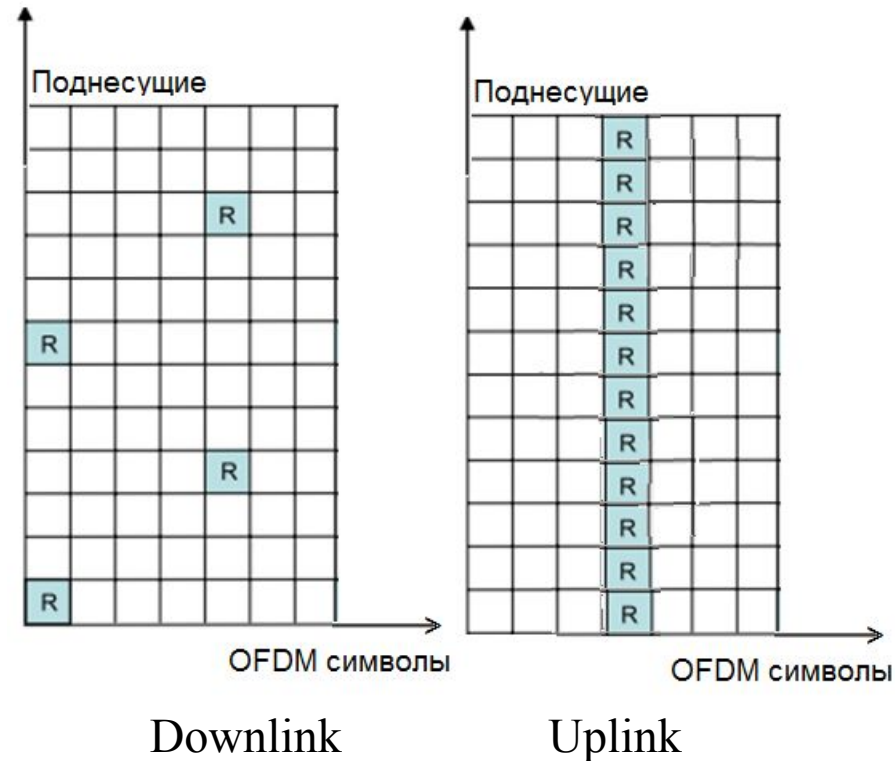
Пропускная способность – количество правильно переданной информации, (бит/сек)

Каждый кластер (фрейм) кодируется и декодируется независимо.

Каждый кластер (фрейм) характеризуется:

$N_s$  – число поднесущих;  $N_t$  – число OFDM-символов;  $N_p$  – число пилотных поднесущих,  $k_b$  – уровень модуляции (битовая загрузка символа),  $R_c$  – скорость кода.

Структура ресурсного блока (R - пилотные поднесущие)



Параметры ресурсного блока (LTE стандарт):

- число поднесущих  $N_s=12$ ,
- число OFDM символов  $N_t=7$ ,
- длительность блока – 0.5 мсек,
- ширина полосы – 180 КГц,
- число пилотных поднесущих  $N_p=4$  и  $N_p=12$

Коэффициент уменьшения пропускной способности из-за пилотных поднесущих:

**0.95** (Downlink) и **0.86** (Uplink)



$$I_{cluster} = R_c k_b (N_s N_t - N_p) \quad (\text{бит})$$

$$I = I_{cluster} / N_t T_s = I_{cluster} \Delta f / N_t \quad (\text{бит/сек})$$

$$Th = (1 - PER) I = (1 - PER) R_c k_b (N_s N_t - N_p) \Delta f / N_t \quad (\text{бит/сек})$$

PER вероятность пакетной ошибки

$$N_t = 1 \quad Th = (1 - PER) W_{data} R_c k_b$$

$$k_b = 1, R_c = 1, \text{ОСШ} \rightarrow \infty \Rightarrow PER \rightarrow 0, Th \rightarrow W_{data}$$

**ПС (ОСШ >> 1) равна ширине полосы для передачи данных**

## 7. Эффективная пропускная способность OFDM-системы

Рассмотрим передачу некодированной информации, а наличие кодера учтем, задавая максимально допустимое число  $v$  ошибочно переданных бит в блоке, которое может исправить кодер.

Блок считается переданным верно при меньшем или равном  $v$  числе ошибочных бит.

Вероятность, что в блоке из  $n$  бит имеется  $j$  ошибочно и  $(n-j)$  правильно детектированных бит

$$P_n^{(j)} = C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

$C_n^j$  - число сочетаний из  $n$  по  $j$ .

Вероятность правильной передачи блока

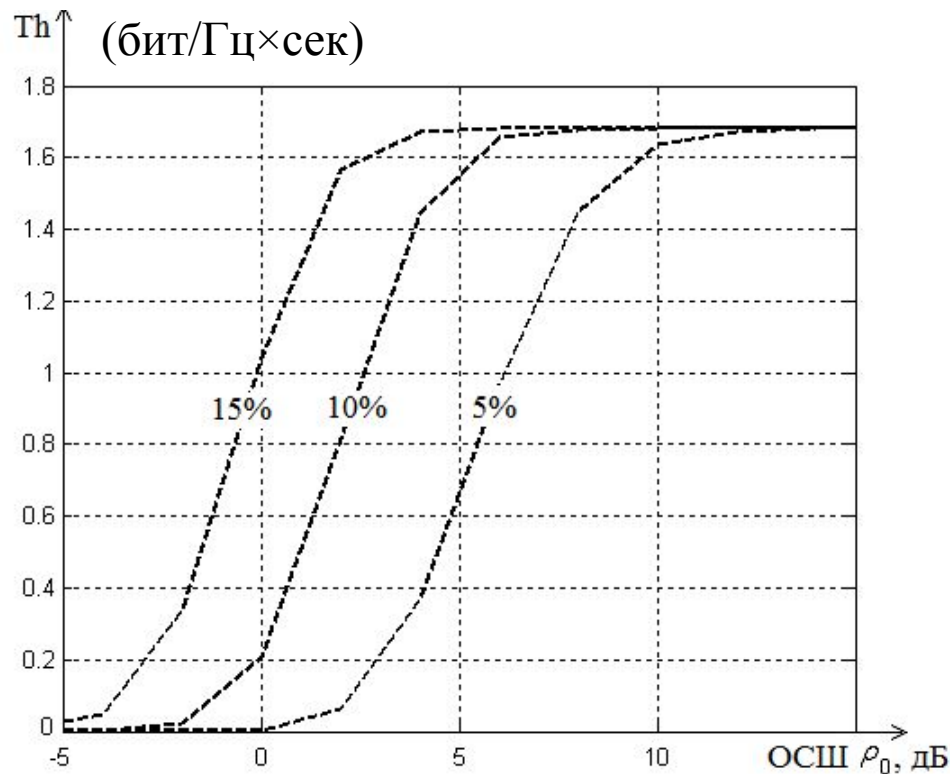
$$\sum_{j=0}^v C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

Вероятность блоковой ошибки

$$BLER = 1 - \sum_{j=0}^v C_n^j BER^j (1 - BER)^{n-j}$$

$$Th = (1 - BLER) \frac{k_b R_c (N_s N_t - N_p)}{N_s N_t}$$

(бит/Гц×сек)



Эффективная ПС при QPSK модуляции

$$R_c = 1, N_s = 5, N_t = 5$$

# 8. Некоторые сведения о преобразованиях Фурье

## 8.1. Дискретное преобразования Фурье (ДПФ)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad \text{- прямое ДПФ}$$

Докажем, что обратное ДПФ

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Доказательство:

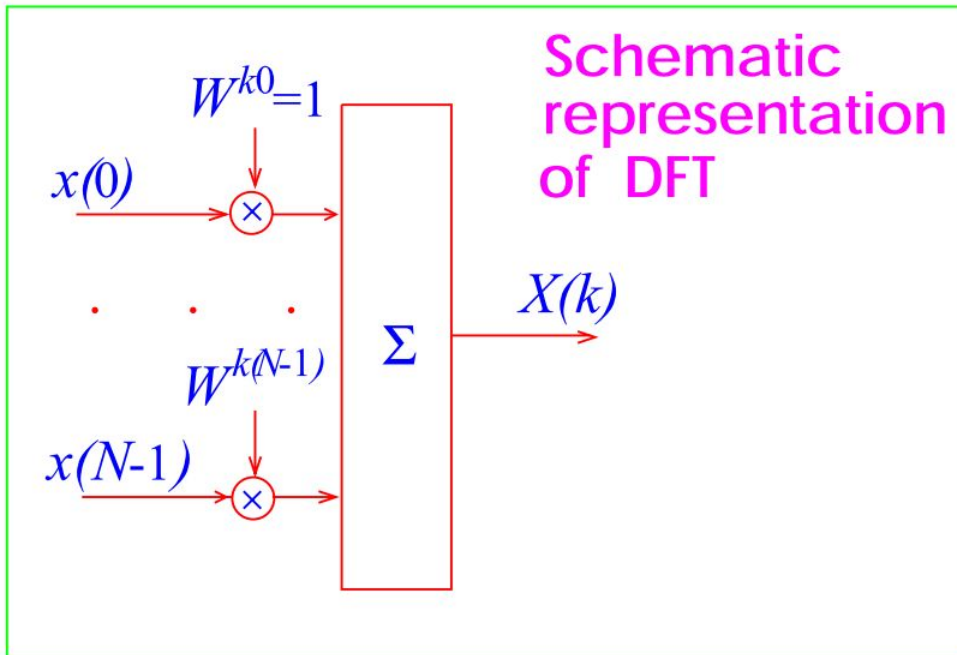
$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \right\} e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \underbrace{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k(m-n)}{N}} \right\}}_{\delta(m-n)} = x(n) \end{aligned}$$

Обозначим  $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Прямое и обратное ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}$$



## 8.2. Матричная формулировка ДПФ

Введем  $N$ -мерные векторы

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

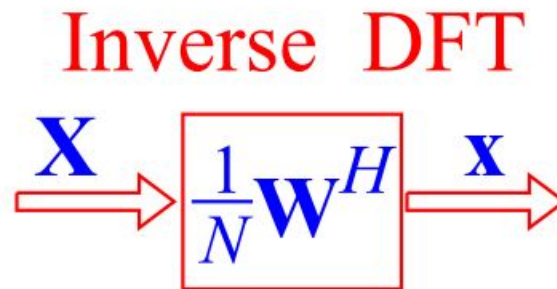
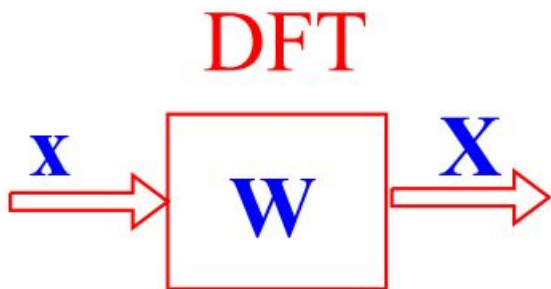
$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

Введем матрицу  
размерности  $N \times N$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Прямое и обратное ДПФ в матричной записи:  $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$        $\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X}$



### 8.3. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Введем новые обозначения:  $X_N(k) = X(k)$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ ,  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Выше мы использовали обозначения  $X(k)$  и  $W$  без нижнего индекса  $N$ , показывающего длину последовательности.

Предположим, что длина преобразуемой последовательности – целая степень 2

$$N = 2^r, \quad r = \log_2 N$$

Идея БПФ:

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \leftarrow N\text{-point DFT}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{n \text{ even} \\ N/2-1}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{\substack{n \text{ odd} \\ N/2-1}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_N^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)\underbrace{(W_N^2)^{lk}}_{W_{N/2}} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)\underbrace{(W_N^2)^{lk}}_{W_{N/2}} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_{N/2}^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_{N/2}^{lk} \quad \leftarrow \text{two } N/2\text{-point} \end{aligned}$$

DFT's!!!

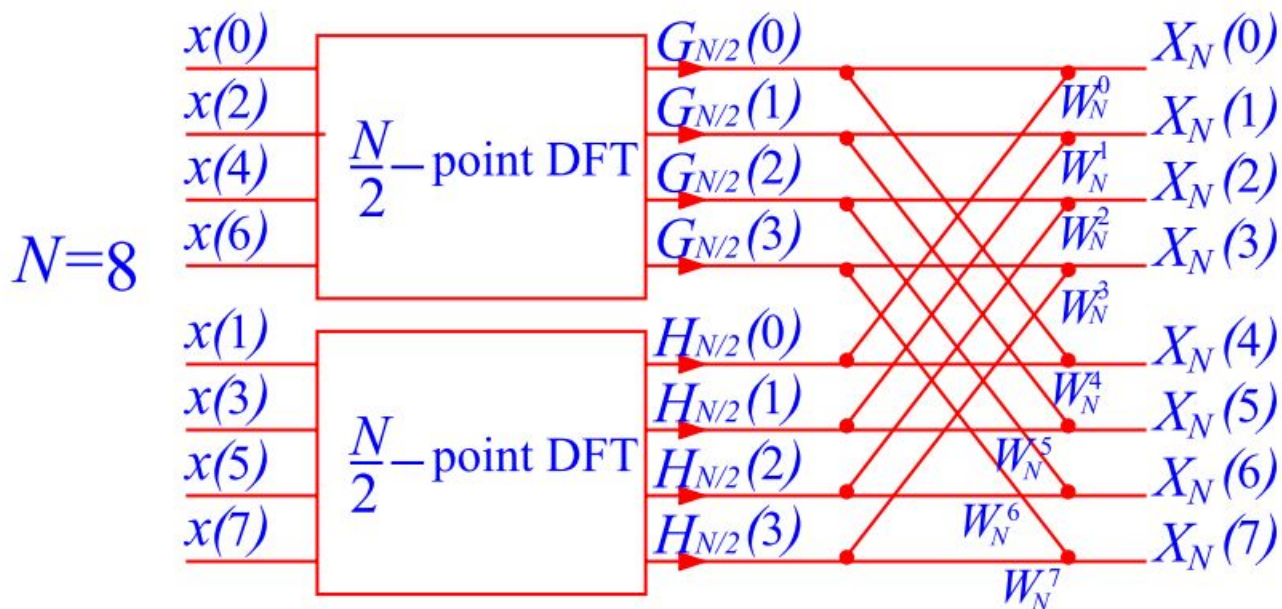


Или в краткой форме:  $X_N(k) = G_{N/2}(k) + W_N^k H_{N/2}(k)$

$G_{N/2}(k)$  и  $H_{N/2}(k)$  – ДПФ размерности  $N/2$ , включающие четные и нечетные  $n$ , соответственно

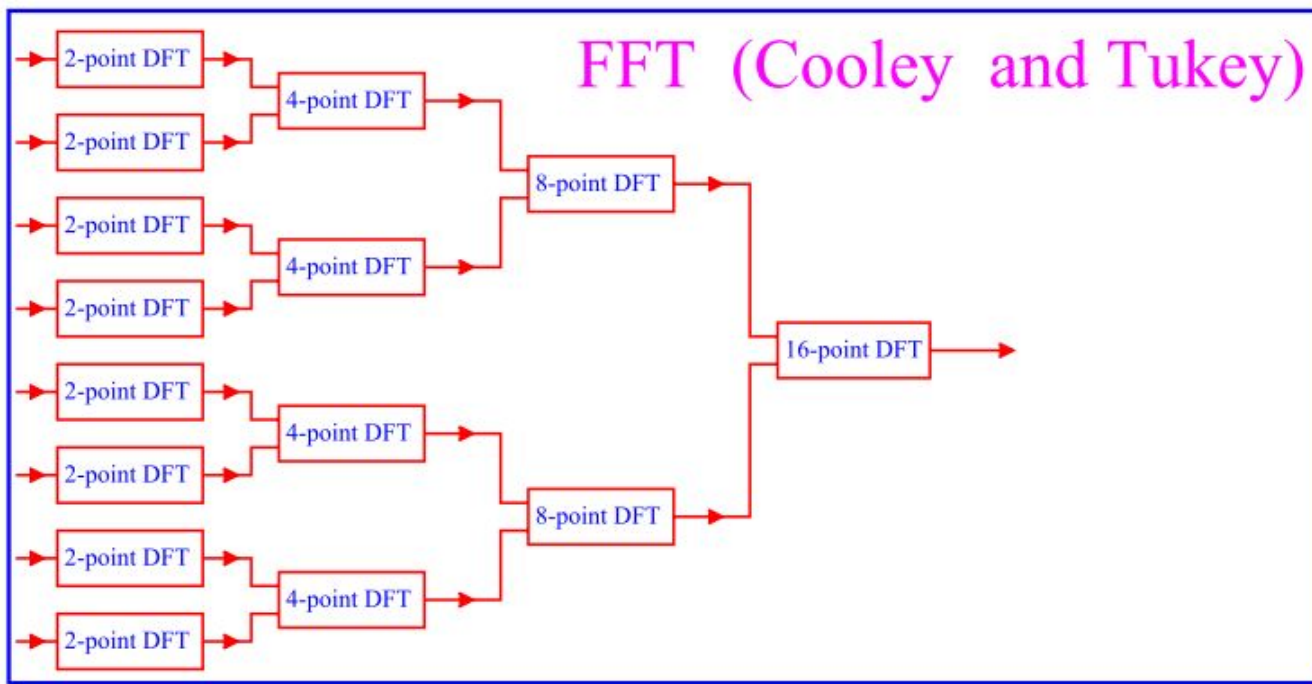
$$G_{N/2}(k) = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x(2l)W_{N/2}^{lk}$$

$$H_{N/2}(k) = \sum_{l=0}^{(N/2)-1} x(2l+1)W_{N/2}^{lk}$$



1.  $N$ -точечное ДПФ с четным  $N$  может быть вычислено через два  $N/2$ - точечных ДПФ.
2. Если  $N/2$  четное, то каждое из этих  $N/2$ - точечных ДПФ может быть вычислено через два  $N/4$ - точечных ДПФ и так далее.
3. Так как  $N=2^r$ , то  $N, N/2, N/4 \dots$  четные числа и процесс закончится 2-точечным ДПФ.





## 8.4. Вычислительная сложность дискретных преобразований Фурье

**1. БПФ** Каждая стадия имеет  $N$  комплексных умножений и  $N$  комплексных сложений. Всего имеется  $\log_2 N$  стадий. Полный объем вычислений  $C_{FFT} = N \log_2 N$

**2. ДПФ** Полный объем вычислений  $C_{DFT} = N^2$

**3. Сравнение** Использование БПФ дает выигрыш в  $\frac{N}{\log_2 N}$  раз

**4. Пример.**  $N=2^{10} = 1024$ .  $C_{DFT} = 2^{20} \approx 10^6$ .  $C_{FFT} = 10 \cdot 1024 \approx 10^4$   
Использование БПФ дает выигрыш в **≈100** раз.

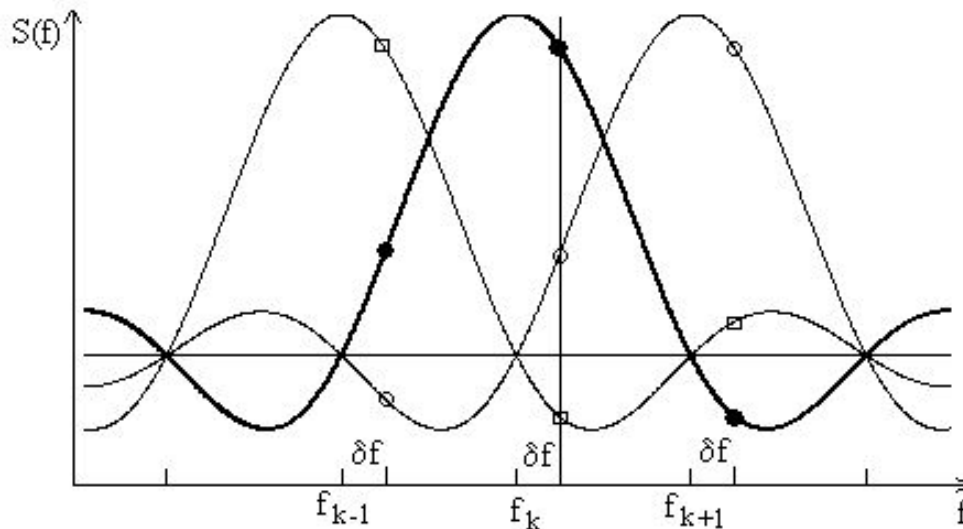
# Частотная и временная синхронизация в OFDM системе

## 1. Влияние ошибок частотной синхронизации

$$S_k(f) = \text{sinc}\left(\frac{f - f_k}{\Delta f}\right), \quad \text{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f} \quad \text{- спектр сигнала, передаваемого на } k\text{-ой поднесущей}$$

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp(j2\pi f_k n \Delta t) \quad \text{- прямое БПФ на приемнике при идеальной синхронизации поднесущих на передатчике и приемнике}$$

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp[j2\pi(f_k + \delta f)n \Delta t] \quad \text{- прямое БПФ на приемнике при ошибке } \delta f \text{ синхронизации поднесущих на передатчике и приемнике}$$



**Из-за ошибки синхронизации:**

- сигнал на  $k$ -ой поднесущей уменьшается,
- появляется помеха между поднесущими (**inter-subcarrier interference - ISI**).

Помеха между поднесущими

$$I_k = \sum_{j=1, j \neq k} d_j S_j(f_k + \delta f)$$

Символ  $d_j$ , передаваемый на  $j$ -ой поднесущей, является случайным.

Поэтому, помеха  $I_k$  также является случайной величиной.

При достаточно большом числе поднесущих помеха  $I_k$  в соответствии с центральной предельной теоремой подчиняется гауссовой статистике (гауссов шум с нулевым средним и дисперсией)

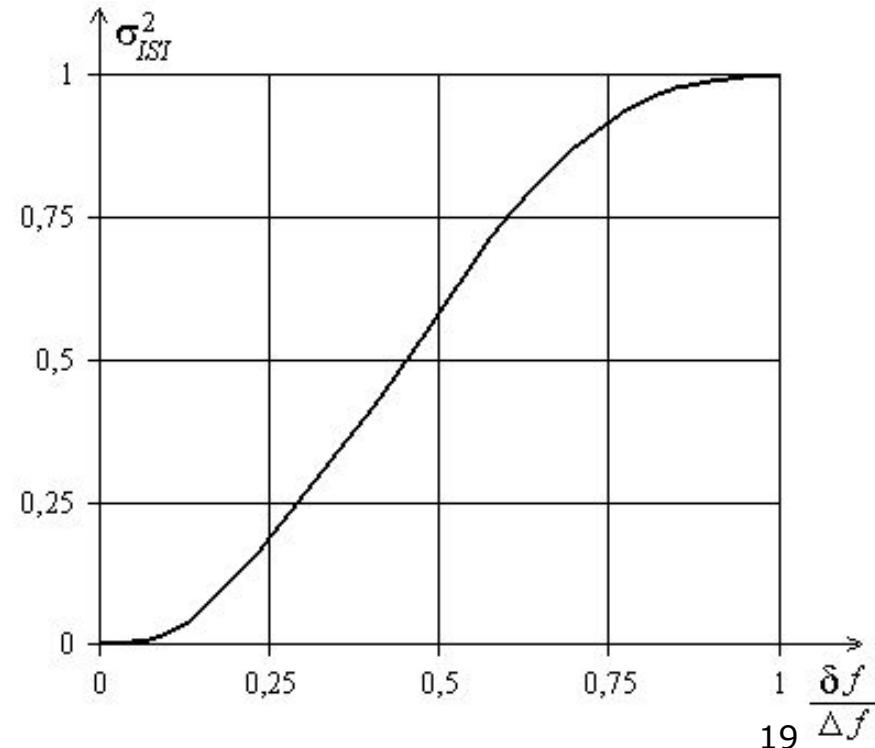
$$(\sigma_{ISI}^2)_k = \sum_{j=1, j \neq k} \sigma_j^2 |S_j(f_k + \delta f)|^2 \quad (\sigma_j^2 = \sigma^2) \quad \text{- дисперсия передаваемых символов (не зависит от номера поднесущей)}$$

Имеем  $S_j(f_k + \delta f) = \text{sinc}\left((k-j) + \frac{\delta f}{\Delta f}\right)$

Тогда  $\sigma_{ISI}^2 = \sigma^2 \sum_{j=1, j \neq k} \left| \text{sinc}\left((k-j) + \frac{\delta f}{\Delta f}\right) \right|^2$

Дисперсия помехи между поднесущими для размерности БПФ 64, 512 и 4096 (соответствующие кривые совпадают)

**Основной вклад в помеху вносят только ближние поднесущие**





Коэффициент уменьшения амплитуды сигнала из-за ошибки синхронизации  $\text{sinc}(\delta f / \Delta f)$

Эквивалентное ОСШ  $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k \frac{\text{sinc}(\delta f / \Delta f) \cdot \sigma^2}{\gamma_k \cdot \sigma_{ISI}^2 + \sigma^2}$  ( $\gamma_k$  – ОСШ при идеальной синхронизации при  $\delta f=0$ )

$\tilde{\gamma} \xrightarrow{\gamma_k \rightarrow \infty} \frac{\text{sinc}(\delta f / \Delta f) \cdot \sigma^2}{\sigma_{ISI}^2}$  При неограниченном увеличении ОСШ  $\gamma_k$ , или при неограниченном увеличении мощности передатчика, эквивалентное ОСШ стремится к конечному пределу

**Пример.** 4-ФМ сигналы единичной мощности  $d_k = \frac{(\pm 1 \pm j)}{\sqrt{2}}$

Среднее значение  $\langle d_k \rangle = 0$ , дисперсия  $\sigma^2 = 1$

Относительная ошибка синхронизации  $\delta f / \Delta f = 0.25$

Максимально достижимое ОСШ  $\approx 13.5$  дБ.

Относительная ошибка синхронизации  $\delta f / \Delta f = 0.1$

Максимально достижимое ОСШ  $\approx 32$  дБ.



## 2. Влияние ошибок временной синхронизации

Ошибка синхронизация по времени не приводит к появлению помехи между поднесущими.

Однако если область времени, на которой выполняется БПФ на приемнике, захватывает выборки из двух последовательных символов, то появляется **межсимвольная помеха**.

Свойство преобразования Фурье: сдвиг  $\delta t$  по времени приводит в спектре сигнала к дополнительному фазовому множителю  $\exp(j2\pi f\delta t)$

Фазовый сдвиг между соседними поднесущими будет составлять  $\Delta\varphi = 2\pi\Delta f\delta t$

Если  $\delta t = m\Delta t$ , где  $\Delta t$  – интервал времени между выборками, то  $\Delta\varphi = 2\pi m / N_F$

Поворот фазы происходит к соответствующему повороту диаграммы отображения бит в символы, что приводит к ошибкам при демодуляции передаваемых данных. Величина ошибки демодуляции зависит от типа модуляции

### 3. Совместное влияние ошибок синхронизации

Предположим теперь, что имеются ошибки синхронизации по частоте ( $\delta f$ ) и времени ( $\delta t$ )

Помеху между поднесущими можно учесть добавляя к дисперсии собственных шумов дисперсию помехи между поднесущими

$$\sigma_{ISI}^2 = \sigma^2 \sum_{j=1, j \neq k} \left| \text{sinc} \left( (k-j) + \frac{\delta f}{\Delta f} \right) \right|^2$$

Если ошибок синхронизации нет, то в результате прямого БПФ, выполняемого на приемной стороне, сигнал на  $m$ -ой поднесущей ( $z_m$  – гауссов шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ )

$$g_m = \sqrt{N_F} H_m d_m + z_m$$

При наличии ошибок синхронизации

$$g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)}) + z_m^{(k)},$$

$$\Psi_m^{(k)} = \vartheta_0 + 2\pi\delta f (kT_s + 0.5N_F\Delta t + \delta t) + 2\pi\delta t (m\Delta f).$$

$\vartheta_0$  смещение фазы на несущей частоте, верхний индекс  $k$  обозначает номер OFDM символа.

Считается, что поднесущие частоты расположены симметрично относительно центральной частоты

$$f_m = f_0 + m\Delta f$$

$$m = -N_F/2 \dots N_F/2$$

$$m \neq 0$$

$$g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)}) + z_m^{(k)},$$

$$\Psi_m^{(k)} = \vartheta_0 + 2\pi\delta f (kT_s + 0.5N_F\Delta t + \delta t) + 2\pi\delta t(m\Delta f).$$

Имеем из формулы, что

- имеется общий поворот фазы сигнала на всех поднесущих из-за частотного смещения  $\delta f$  и смещения  $\theta_0$  фазы на несущей частоте (первые два слагаемых)
- общий поворот фазы увеличивается с увеличением номера  $k$  OFDM символа (слагаемое  $2\pi\delta f k T_s$ )
- частотное смещение  $\delta f$  приводит к ослаблению сигнала на всех поднесущих (множитель  $\text{sinc}(\delta f / \Delta f)$ ), а также к появлению помехи между поднесущими
- ошибка  $\delta t$  синхронизации по времени (то есть ошибка определения стартового положения OFDM символа) приводит к прогрессивно нарастающему фазовому повороту, пропорциональному номеру  $m$  поднесущей (последнее слагаемое)

Обозначим  $\delta t' = \delta t / \Delta t$  ( $\Delta t$  – временное расстояние между выборками)

Фазовый поворот (например, на  $90^\circ$ ) будет достигаться, если  $\frac{2\pi}{N_F} m \delta t' = \frac{\pi}{2}$        $\delta t' = \frac{N_F}{4m}$

Т.о. фазовый сдвиг  $90^\circ$  на первой поднесущей соответствует ошибке синхронизации по времени равной 32 выборкам при использовании 128 поднесущих.

На поднесущих с большими номерами фазовый сдвиг увеличивается пропорционально номеру поднесущей.

Если ограничить  $90^\circ$  фазовый сдвиг крайних поднесущих ( $m=0.5N_F$ ), то ошибка синхронизации  $\delta t$  не должна превышать величины  $0.5\Delta t$ .

#### 4. Символьная синхронизация «вслепую»

Защитный интервал (циклический префикс) в последовательности передаваемых OFDM сигналов дает возможность выполнять символьную синхронизацию без специальных синхросигналов (синхронизация «вслепую»).

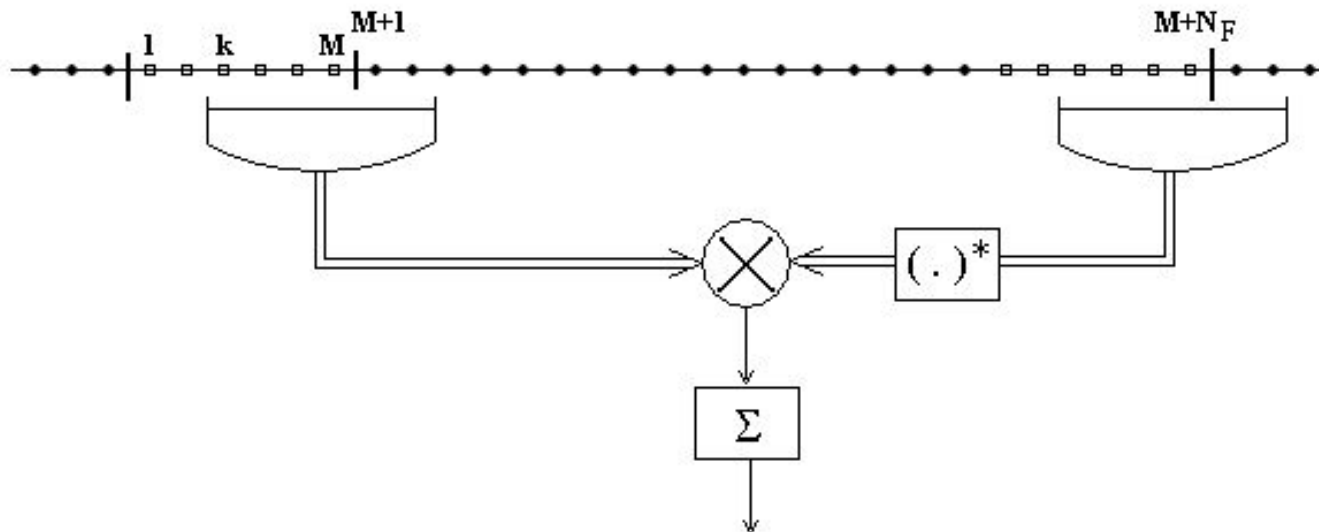


Схема  
символьной  
синхронизации

Пусть  $x(n)$  –  $n$ -ая выборка принятого сигнала. OFDM-символ состоит из  $N+M$  выборок. Часть выборок ( $M$  выборок) из хвостовой части каждого символа переставляется вперед для образования защитного интервала. Две последовательности выборок, показанных прямоугольниками, являются одинаковыми.

Процедура синхронизации представляет собой корреляционную обработку сигналов

$$y_k = \frac{1}{M} \sum_{n=k+1}^{k+M} x(n)x^*(n + N_F)$$

Индекс  $k$  означает сдвиг начала окна относительно начала OFDM-символа.



## А) В канале нет задержанных сигналов (однолучевой канал).

Считаем коэффициент  $h$  передачи канала постоянным на рассматриваемом интервале двух OFDM-символов.

Пусть  $s(n)$  –  $n$ -ая выборка передаваемого сигнала.

Тогда  $n$ -ая выборка комплексной амплитуды принятого сигнала  $x(n)=hs(n)+z(n)$ , где  $z(n)$  – гауссов собственный шум приемника с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$

**Начало окна совпадает с началом OFDM-символа ( $k=0$ ).**

Пренебрегаем собственным шумом.

В левую часть окна попадают  $1, 2, \dots, M$  выборки, а в правую часть окна –  $N_F+1, N_F+2, \dots, N_F+M$  выборки.

Сигнал на выходе схемы синхронизации

$$y_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M hs(n) \cdot h^* s^*(n + N_F)$$

Учтем, что  $s(n + N_F) = s(n)$  ( $n=1, 2, \dots, M$ )

Получим

$$y_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |hs(n)|^2$$

**Начало окна сдвинуто на  $k$ -выборок вправо.**

В левую часть окна попадают  $k+1, k+2, \dots, k+M$  выборки, а в правую часть окна –  $k+N_F+1, k+N_F+2, \dots, k+N_F+M$  выборки.

Учтем, что  $s(n+N_F) = s(n)$  ( $n=1, 2, \dots, M$ )

---

Получим

$$y_k = \frac{1}{M} \sum_{n=k+1}^{M+k} hs(n) \cdot h^* s^*(n+N_F) = \frac{1}{M} \sum_{n=k+1}^M |hs(n)|^2 + \frac{1}{M} \sum_{n=M+1}^{M+k} |h|^2 s(n) s^*(n+N_F)$$

$$(k=1, 2, \dots, M-1)$$

Приближенно имеем:

$$y_k \approx \begin{cases} \langle |s(n)|^2 \rangle > |h|^2 \left(1 - \frac{k}{M}\right), & k = 0, 1, 2, \dots, M-1, \\ 0, & k \geq M, \end{cases}$$

**Отклик на выходе схемы синхронизации имеет треугольный вид.**

Величину  $\langle |s(n)|^2 \rangle$  можно трактовать как среднюю мощность на входе приемной антенны, которая пропорциональна мощности передатчика.

Поэтому высота треугольника пропорциональна мощности передатчика.

Ширина треугольника (по нулевому уровню) равна удвоенному числу выборок в защитном интервале.

## Результаты моделирования (однолучевой канал)

### Выходной сигнал процедуры синхронизации с учетом собственных шумов

Защитный интервал состоит из  $M=16$  символов,

размерность БПФ  $N_F=64$ ,

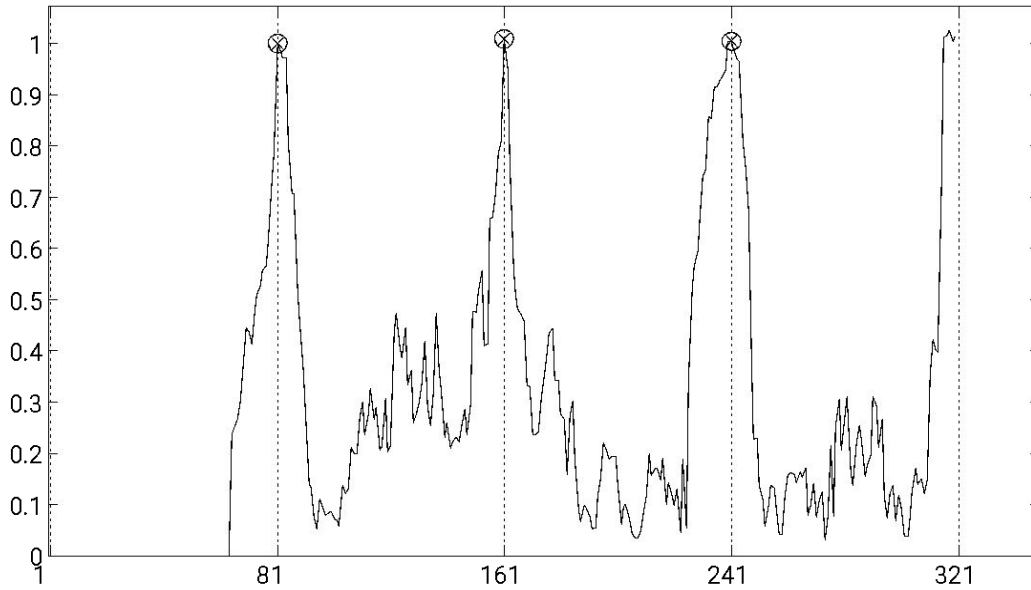
ОСШ=30 дБ,

кружки – истинное начало символов,

крестики – полученная оценка,

ось  $x$  – номер выборки

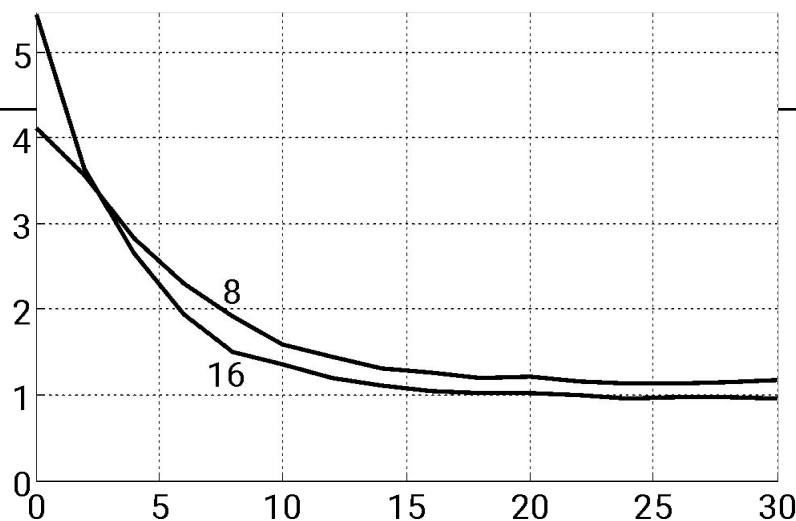
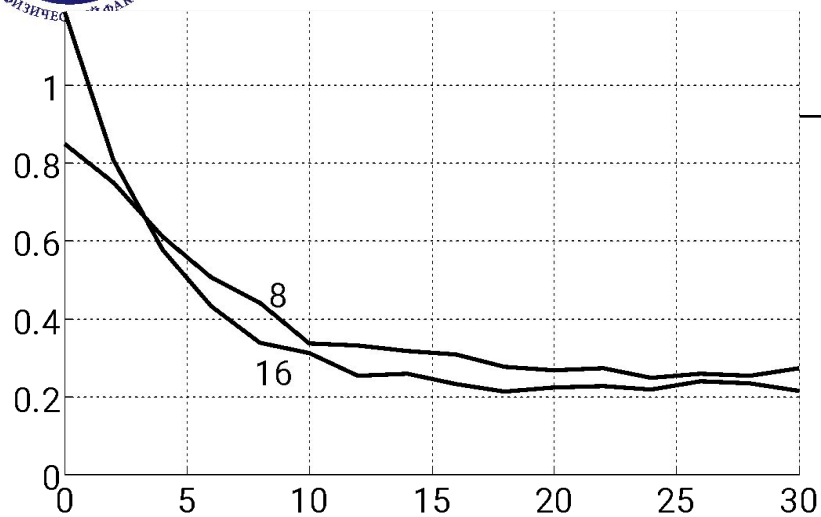
вертикальные линии – начало защитного интервала



Пики функции корреляции  
точно указывают начало  
защитного интервала



## Средняя ошибка (слева) и СКО синхронизации (справа) в зависимости от ОСШ (дБ)



Защитный интервал состоит из  $M=8$  или  $M=16$  символов

Ошибки уменьшаются с увеличением ОСШ и длины защитного интервала.  
При ОСШ больше 12 дБ средняя ошибка – 0.3 выборки, а СКО – 1.5 выборки.



Приемник выполняет прямое БПФ, которое принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=n_0+1}^{N+n_0} x(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right) \quad n_0 - \text{ошибка синхронизации,}$$

выраженная в числе выборок.

Слагаемые с индексом  $n_0+1 < n < N$  – выборки из первого OFDM-символа, а слагаемые с индексом  $N < n < N+n_0$  – выборки из второго OFDM-символа

$$x(n) = \begin{cases} x^{(1)}(n), & n_0 + 1 < n < N \\ x^{(2)}(n), & N < n < N + n_0 \end{cases}$$

Тогда  $g_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x^{(1)}(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{n_0} x^{(1)}(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=N+1}^{N+n_0} x^{(2)}(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right) + z_m$

Так как  $n_0 \ll N$ , то пренебрегаем вторым слагаемым. Тогда ОСШ на  $m$ -ой поднесущей

$$\rho_m = \frac{|h(0)|^2 \langle |d_m^{(1)}|^2 \rangle}{\sigma_0^2 + \langle |B|^2 \rangle} = \frac{|h(0)|^2 P_0}{\sigma_0^2 + \langle |B|^2 \rangle} \quad B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=N+1}^{N+n_0} x^{(2)}(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right)$$

Имеем, что дисперсия  $\langle |B|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N+n_0} \sum_{q=N+1}^{N+n_0} \langle x^{(2)}(n) x^{(2)*}(q) \rangle \exp\left(\frac{j2\pi m(n-q)}{N}\right)$

Канальный коэффициент  $h(0)$  одинаков для первого и второго OFDM-символов. Разные выборки OFDM-символа статистически независимы

$$\langle x^{(2)}(n)x^{(2)*}(q) \rangle = |h(0)|^2 \langle |s^{(2)}(n)| \rangle \delta_{nq} = |h(0)|^2 P_0 \delta_{nq}$$

$s^{(2)}(n)$  -  $n$ -ая выборка второго OFDM-символа

Имеем  $\langle |B|^2 \rangle = \frac{|h(0)|^2 P_0 n_0}{N}$

ОСШ не зависит от номера поднесущей  $\rho = \frac{|h(0)|^2 P_0}{\sigma_0^2 + \frac{n_0}{N} |h(0)|^2 P_0} = \frac{|h(0)|^2 \rho_0}{1 + \frac{n_0}{N} |h(0)|^2 \rho_0}$   $\rho_0 = P_0 / \sigma_0^2$

При увеличении мощности передатчика ОСШ стремится к пределу, который не зависит от мощности

$$\rho \rightarrow \frac{N}{n_0}$$

# Результаты моделирования (7-ми лучевой канал, лучи одинаковой мощности)

Выходной сигнал процедуры синхронизации с учетом собственных шумов

Защитный интервал состоит из  $M=16$  символов,  
размерность БПФ  $N_F=64$ ,

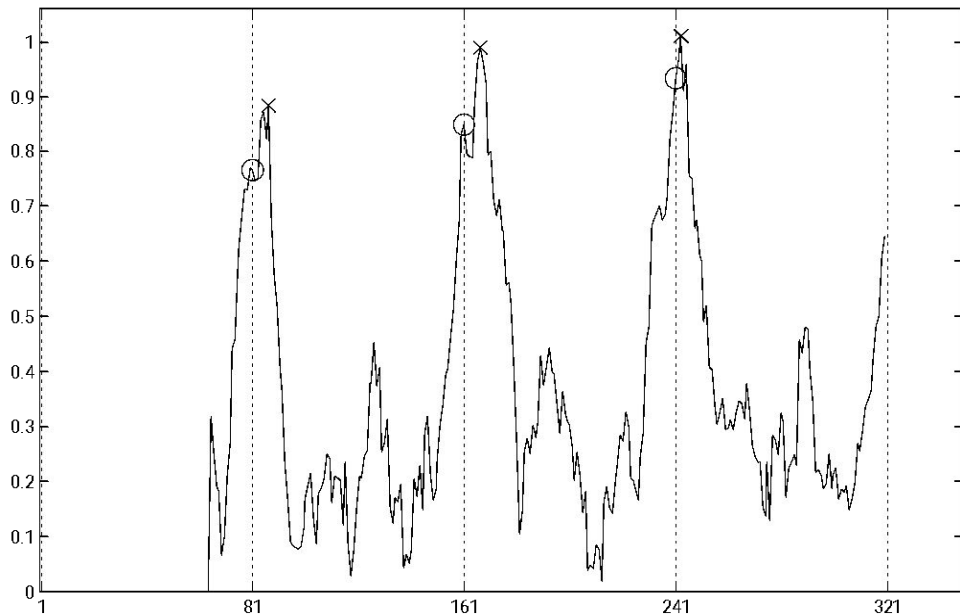
ОСШ=30 дБ,

кружки – истинное начало символов,

крестики – полученная оценка,

ось  $x$  – номер выборки

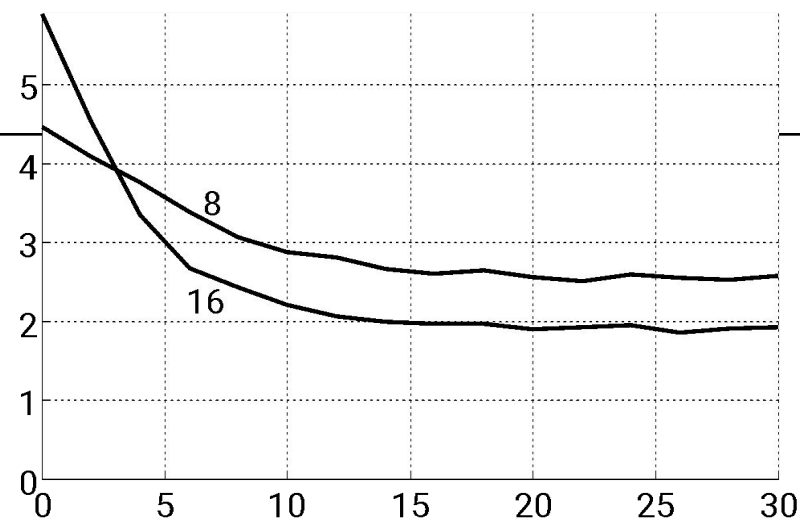
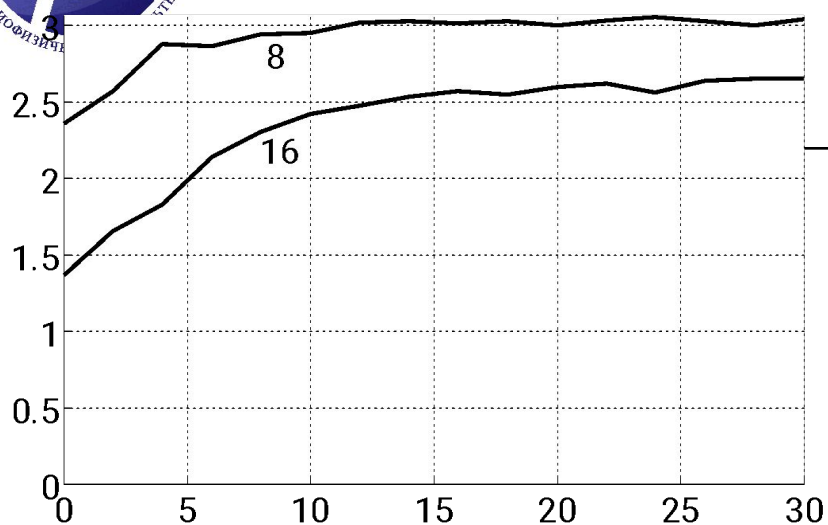
вертикальные линии – начало защитного интервала



Имеется ошибка в оценке  
времени начала защитного  
интервала



## Средняя ошибка (слева) и СКО синхронизации (справа) в зависимости от ОСШ (дБ)



Защитный интервал состоит из  $M=8$  или  $M=16$  символов

Из сравнения графиков следует, что с увеличением длины импульсной характеристики ошибки значительно увеличиваются.

При ОСШ больше 12 дБ средняя ошибка – 2.5-3 выборки, а СКО – 2.2-2.8 выборки.





## 5. Частотная синхронизация «вслепую»

Высокочастотная  $n$ -ая выборка передаваемого сигнала  $s(n) \exp(j2\pi f_0 n \Delta t)$

### 1. В канале нет задержанных сигналов (однолучевой канал).

Принятый сигнал после демодуляции с учетом ошибок частотной синхронизации

$$x(n) = hs(n) \exp(j2\pi f_0 n \Delta t) \exp[-j2\pi(f_0 + \delta f)n \Delta t] = hs(n) \exp(-j2\pi \cdot \delta f \cdot n \Delta t)$$

Максимальный сигнал на выходе схемы синхронизации

$$y_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M hs(n) \exp(-j2\pi \cdot \delta f \cdot n \Delta t) \cdot h^* s^*(n + N_F) hs(n) \exp[-j2\pi \cdot \delta f \cdot (n + N_F) \Delta t] = \\ = \tilde{y}_0 \exp(j2\pi \cdot \delta f \cdot N_F \Delta t)$$

Учли, что  $s(n + N_F) = s(n)$  ( $n=1, 2, \dots, M$ )      Обозначили  $\tilde{y}_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |hs(n)|^2$

$$N_F \Delta t = T_S = 1 / \Delta f \Rightarrow y_0 = \tilde{y}_0 \exp(j2\pi \cdot \delta f / \Delta f)$$

Измеряем фазу  $\vartheta = 2\pi \cdot \delta f / \Delta f$       Находим относительную ошибку синхронизации

Находим статистические свойства ошибки частотной синхронизации

### 2. В канале имеются задержанные сигналы (многолучевой канал).

Рассматриваем этот случай



## 6. Синхронизация на основе пилотных сигналов

Пусть на  $m$ -ой поднесущей  $k$ -го OFDM символа передаются известные данные (пилотная поднесущая).

$$\underline{d_m^{(k)}}$$

Имели ранее, что

$$g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)}) + z_m^{(k)},$$

$$\Psi_m^{(k)} = \vartheta_0 + 2\pi\delta f (kT_s + 0.5N_F\Delta t + \delta t) + 2\pi\delta t(m\Delta f).$$

Или  $g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} \tilde{H}_m^{(k)} d_m^{(k)} + z_m^{(k)}$

$\tilde{H}_m^{(k)} = H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)})$  - эквивалентный коэффициент передачи на  $m$ -ой поднесущей

$\hat{\tilde{H}}_m^{(k)} = \frac{g_m^{(k)}}{\sqrt{N_F} d_m^{(k)}} = \tilde{H}_m^{(k)} + \frac{z_m^{(k)}}{\sqrt{N_F} d_m^{(k)}}$  - оценка эквивалентного коэффициента передачи с учетом ошибок синхронизации