

# Параметрические критерии проверки однородности средних

**Лекция №7  
для студентов 2 курса,  
обучающихся по специальности 060609 –  
Медицинская кибернетика  
доц. Шапиро Л.А.  
Красноярск, 2015 г.**

# План лекции:

- 1. Актуальность темы. Проверка простых гипотез о параметрах.**
- 2. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности.**
- 3. Сравнение двух средних по зависимым выборкам малого объема из нормальных генеральных совокупностей.**
- 4. Сравнение генеральных средних двух групп по независимым выборкам из нормальных совокупностей.**

# **Проверка простых гипотез о параметрах**

## **Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности.**

Алгоритм может быть использован при проверке соответствия теории и эксперимента: в этом случае  $a$ -предсказанное теорией значение некоторой величины, выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -результаты экспериментального определения той же величины.

Этим же приемом пользуемся, чтобы показать, что средство или метод измерения не дают систематической погрешности. В этом случае  $a$  - действительное значение некоторой величины (свойство стандартного образца или результат измерения заведомо точным прибором, или мировая постоянная), выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — ряд результатов, полученных аттестуемым методом (средством) измерения.

# 1. Дисперсия генеральной совокупности известна.

Генеральная средняя неизвестна, но предполагается равной  $a_0$ . Пусть из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объемом  $n$  и по ней найдена выборочная средняя  $\bar{x}$  причем генеральная дисперсия  $\sigma^2$  известна. Требуется по выборочной средней  $\bar{x}$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: a = a_0$ . Т.к. выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней:

$$M(\bar{x}) = a, \text{ нулевая гипотеза: } H_0: M(\bar{x}) = a_0$$

 $\bar{x}$  $\bar{x}$

т.е. надо установить значимо или незначимо отличаются выборочная и генеральная средняя. В качестве критерия служит величина:

$$U = \frac{(\bar{X} - a_0)}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma_x}$$

которая распределена нормально, причем  $M(U)=0$ ,  $\sigma(U)=1$ .

а)  $H_0: a = a_0$       $H_1: a \neq a_0$

Вычисляем наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия:

$$U_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$$

по таблице функции Лапласа найдем критическую точку двусторонней критической области по равенству:  $\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2$

Если  $|U_{набл}| < u_{кр}$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если  $|U_{набл}| > u_{кр}$  нулевую гипотезу отвергают

б)  $H_0: a = a_0$      $H_1: a > a_0$

$\Phi(u_{крправ}) = (1-2\alpha)/2$

Если  $U_{набл} < u_{кр}$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если  $U_{набл} > u_{кр}$  нулевую гипотезу отвергают

в)  $H_0: a = a_0$      $H_1: a < a_0$

Сначала находим  $\Phi(u_{крправ}) = (1-2\alpha)/2$      $u_{крлев} = -u_{крправ}$

Если  $U_{набл} > -u_{кр}$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если  $U_{набл} < -u_{кр}$  нулевую гипотезу отвергают

Пример1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объемом  $n=36$  и по ней найдена выборочная средняя  $\bar{x}=21,6$ ,  $\sigma=0,36$ . Требуется при уровне значимости  $0,05$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: a=a_0=21$ .  $H_1: a \neq a_0$

Решение:

$$U_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(21,6 - 21) \cdot \sqrt{36}}{0,36} = 10$$

$\Phi(u_{\text{кр}}) = (1-\alpha)/2 = (1-0,05)/2 = 0,475$ . По таблице функции Лапласа найдем  $u_{\text{кр}} = 1,96$

Т.к.  $U_{\text{набл}} > u_{\text{кр}}$  ( $10 > 1,96$ ) нулевую гипотезу отвергаем-выборочная и генеральная средняя отличаются значимо

**2. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна**  
(например, при малых выборках).

В качестве критерия принимают СВ  $T$ , которая имеет распределение Стьюдента с  $k=n-1$  степенями свободы:

$$\text{а) } H_0: a = a_0 \quad H_1: a \neq a_0 \quad T = \frac{(\bar{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$$

Вычисляем наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия:

$$T_{\text{набл}} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{s}$$

По таблице Стьюдента для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $k=n-1$  находим двустороннее критическое значение  $t_{\text{крдвуст}}$

Если  $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{крдвуст}}$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если  $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{крдвуст}}$  нулевую гипотезу отвергают

б)  $H_0: a = a_0$       $H_1: a > a_0$

По таблице Стьюдента для уровня значимости  $\alpha/2$  и числа степеней свободы  $k=n-1$  находим

$t_{\text{крправ}}$ .

Если  $T_{\text{набл}} < t_{\text{крправ}}$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

в)  $H_0: a = a_0$       $H_1: a < a_0$

Находим вспомогательную критическую точку  $t_{\text{крправ}}$ .

$t_{\text{крлев}} = -t_{\text{крправ}}$

Если  $T_{\text{набл}} > -t_{\text{крпр}}$  нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если  $T_{\text{набл}} < -t_{\text{крпр}}$  нулевую гипотезу отвергают

Пример: По выборке объема  $n=20$ , извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдена выборочная средняя  $\bar{x} = 16$  и исправленное  $s=4,5$ .

При уровне значимости  $0,05$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: a=a_0=15$  при конкурирующей гипотезе:

$H_1: a \neq 15$

Решение: Критическая область двусторонняя.

$$T_{набл} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{s} = \frac{(16 - 15) \cdot \sqrt{20}}{4,5} = 0,99$$

$t_{крдвуст}(0,05;19)=2,09$

$0,99 < 2,09$  - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, выборочная средняя незначимо отличается от гипотетической генеральной средней

# Выборки

```
graph TD; A[Выборки] --> B[Зависимые]; A --> C[Независимые]; B --> D(Одна и та же группа до и после лечения); C --> E(Разные группы);
```

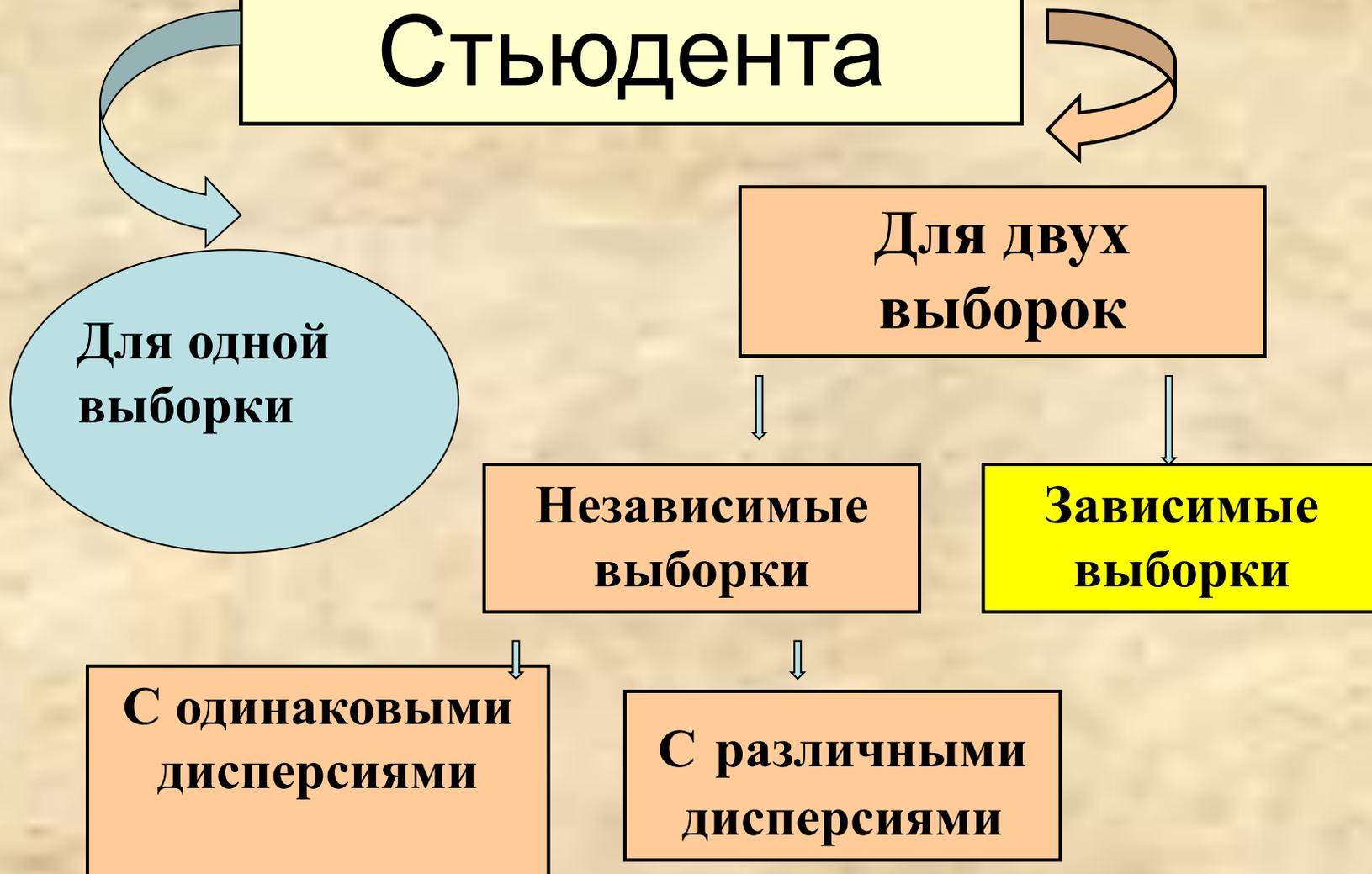
**Зависимые**

**Одна и та же  
группа до и после  
лечения**

**Независимые**

**Разные  
группы**

# Критерий Стьюдента



# Критерий $t_{\text{набл}}$ для определения достоверности средней арифметической одной выборки

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - 0}{S_{\bar{x}}}$$

$t_{\text{набл}} < t_{\text{кр}} (df, \alpha=0,05)$  выборка однородна

$t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}} (df, \alpha=0,05)$

выборка не однородна – проверить на выскакивающие результаты

# Сравнение двух средних по зависимым выборкам малого объема из нормальных генеральных совокупностей (разностный метод)

- Исследовалось изменение частоты сердечных сокращений студентов до и после экзамена

N	ЧСС <sub>до</sub>	ЧСС <sub>после</sub>
1	90	60
2	80	70
3	70	70
4	90	70
5	100	70
$\bar{X} = 6$	110	80
	90	70

1. Найдем среднее арифметическое значение выборки:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{до} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6}{n} = \\ &= \frac{90 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110}{6} = 90\end{aligned}$$

2. Вычислим дисперсию (рассеивание ряда)

$$D(x) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

где  $df = n - 1$   
число степеней свободы

$$D(x) = \frac{(90 - 90)^2 + (80 - 90)^2 + \dots + (110 - 90)^2}{5} = 200$$

3. Среднее квадратическое отклонение выборки:

$$s = \sqrt{D} = \sqrt{200} = 14,1$$

Это - **точечные** (т.е. выраженные одним значением) параметры малой выборки.

Результат записывается в виде:

$$\bar{x} \pm s = 90 \pm 14,1(\text{уд} / \text{мин})$$

**4. Определим среднюю квадратическую ошибку:**

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{14,1}{\sqrt{6}} = 5,8$$

**5. Определим доверительный интервал для генеральной средней.**

По таблицам Стьюдента находим  $t$  для доверительной вероятности 0,95 и числа степеней свободы  $df=n-1=5$ :  $t=2,57$ , следовательно:

$$\mu = 90 \pm 2,57 \cdot 5,8 = 90 \pm 15 \text{ уд/мин}$$

$$\text{или } 75 \leq \mu \leq 105 \text{ уд/мин}$$

- Для второго ряда измерений:

$$\bar{x}_{\text{после}} = \frac{60 + 70 + \dots + 80}{6} = 70$$

$$D(x) = \frac{(70 - 60)^2 + (70 - 70)^2 + \dots + (80 - 70)^2}{5} = 40$$

$$s = \sqrt{40} = 6,3$$

$$s_x = \frac{6,3}{\sqrt{6}} = 2,58$$

# Нулевая гипотеза:

В генеральной совокупности нет различия между средними арифметическими выборок

Проверяем гипотезу по критерию Стьюдента  $t$  при уровне значимости  $\alpha=0,05$ .

1. Определяем  $t_{\text{набл}}$ :

$$t_{\text{набл}} = \frac{|d|}{s_d}$$

где  $d$ -среднее значение разности пульса до и после экзамена

$s_d$ -стандартная ошибка разности

# Нулевая гипотеза:

2. Определяем критическое значение критерия Стьюдента ( $t_{кр}$ ) для  $\alpha=0,05$  и  $df=n-1$ 
  - Если  $t_{набл} \geq t_{кр}$  нулевая гипотеза отвергается, различие средних статистически значимо
  - Если  $t_{набл} < t_{кр}$ , нулевая гипотеза принимается, различие средних статистически не значимо

N	ЧСС <sub>до</sub>	ЧСС <sub>после</sub>	d	(d-d <sub>cp</sub> ) <sup>2</sup>
1	90	60	-30	100
2	80	70	-10	100
3	70	70	0	400
4	90	70	-20	0
5	100	70	-30	100
6	110	80	-30	100

90

70

$d_{cp} = -20$

D=160

# Для разности:

$$\bar{d} = \frac{(-30) + (-10) + \dots + (-30)}{6} = -20$$

$$D(x) = \frac{(-30 - (-20))^2 + \dots + (-30 - (-20))^2}{5} = 160$$

$$s = \sqrt{160} = 12,65$$

$$s_d = \frac{12,65}{\sqrt{6}} = 5,16$$

- Определим, достоверно ли определена средняя арифметическая разности:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|d|}{s_d} = \frac{20}{5,16} = 3,87$$

$$t_{\text{кр}}(0,05;5)=2,57 \quad t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}}$$

Это означает, что нулевая гипотеза отвергается, снижение ЧСС статистически значимо

Группа	ЧСС ( $\bar{X} \pm S$ ) уд/мин	
	До экзамена	После экзамена
МК201 (n=6)	90±14,1	70 ±6,3*

Примечание: \*-значимость различий  $\alpha < 0,05$

Рассчитаем эффект:

$$\Delta = \frac{(70 - 90)}{90} * 100\% = -22\%$$

ЧСС студентов после экзамена снизилась на 22% ( $\alpha < 0,05$ )

# двух групп по независимым выборкам из нормальных совокупностей.

Допущения:

- В генеральной совокупности выборки распределены по нормальному закону
- Дисперсии независимых выборок однородны (критерий Фишера)

$$F = \frac{D_1}{D_2}$$

- **Нормированное отклонение:**

$$t_{\text{набл}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{d}{s_d}$$

1. Для  $n \geq 30$ , ошибка разницы  $s_d$  определяется по формуле:

$$t_{\text{набл}} = \frac{|\overline{X_1} - \overline{X_2}|}{\sqrt{S_{x1}^2 + S_{x2}^2}}$$

Пример:  $n_1=40$     $n_2=50$

$\bar{x}_1 = 150$     $\bar{x}_2 = 140$     $s_{\bar{x}_1} = 20$     $s_{\bar{x}_2} = 30$

Определить значимость различий при  $\alpha=0,05$

$$t_{\text{набл}} = \frac{d}{s_d} = \frac{150 - 140}{\sqrt{20^2 + 30^2}} = 0,277$$

$$t_{\text{крит}}(0,05) = 1,96, \quad t_{\text{набл}} < t_{\text{крит.}}$$

Разница средних арифметических недостоверна.

2. Для  $n < 30$ , ошибка разницы  $s_d$  определяется по формуле:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}$$

# Сравним изменение частоты сердечных сокращений студентов МК201 и МК202 группы до экзамена

МК201	МК202	$\Delta X_1$	$(\Delta X_1)^2$	$\Delta X_2$	$(\Delta X_2)^2$
90	100	0	0	0	0
80	120	-10	100	20	400
70	90	-20	400	-10	100
90	70	0	0	-30	900
100	90	10	100	-10	100
110	110	20	400	10	100
	120			20	400
$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\Sigma =$	<b>1000</b>		<b>2000</b>
<b>90</b>	<b>100</b>	$D_1 =$	$1000/5 =$ <b>200</b>	$D_2 =$	$2000/6 =$ <b>333</b>

$$F_{\text{набл}} = \frac{333}{200} = 1,67 \quad F_{\text{крит}}(6,5,0,05)=4,95$$

1,67 < 4,95 дисперсии  
однородны.

$$S_d = \sqrt{\frac{(1000 + 2000) \cdot 13}{(5 + 6) \cdot 42}} = 9,2$$

$$t_{\text{набл}} = \frac{10}{9,2} = 1,1 \quad df = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = 11$$

$$t_{\text{кр}} = 2,2$$

$t_{\text{набл}} < t_{\text{кр}}$ , нулевая гипотеза не отвергается, различие средних арифметических статистически незначимо, выборки принадлежат одной генеральной совокупности

<b>Показатель</b>  $(\bar{X} \pm S)$	<b>Группа</b>	
	<b>МК201</b>	<b>МК202</b>
<b>ЧСС</b> <b>(уд/мин)</b>	<b>90±14,1</b> <b>(6)</b>	<b>100 ±18,3</b> <b>(7)</b>

# Сводка основных формул

## Средняя арифметическая выборки

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

## Дисперсия

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

## Среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{D(x)}$$

## Средняя квадратическая ошибка:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

## Критерий нормированного отклонения (по Стьюденту)

$$t = \frac{\bar{x} - a}{S_{\bar{x}}}$$

Доверительный интервал для генеральной  
средней

$$t_{\alpha, n} \cdot S_{\bar{x}}$$

Критерий  $t_{\text{набл}}$  для определения  
достоверности средней арифметической  
одной выборки

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x}}{S_{\bar{x}}}$$

- Критерий  $t_{\text{эксп}}$  разности средних арифметических двух выборок

а)  $n \geq 30$

$$t_{\text{экспер}} = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{S_{x1}^2 + S_{x2}^2}}$$

б)  $n < 30$

$$t_{\text{экспер}} = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{\sum (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$$

# Заключение

**Нами рассмотрены критерии проверки однородности средних по выборкам из нормальных совокупностей.**

# РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

## Основная литература:

- Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика /А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 440 с.
- Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2011. – 479 с.
- Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2011. – 404 с.
- Балдин К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики : учебник / К. В. Балдин. – М. : Флинта, 2010. – 488с.

## Учебно–методические пособия:

- Шапиро Л.А., Шилина Н.Г. Руководство к практическим занятиям по медицинской и биологической статистике Красноярск: ООО «Поликом». – 2003.

**БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ**