Движение в пространстве

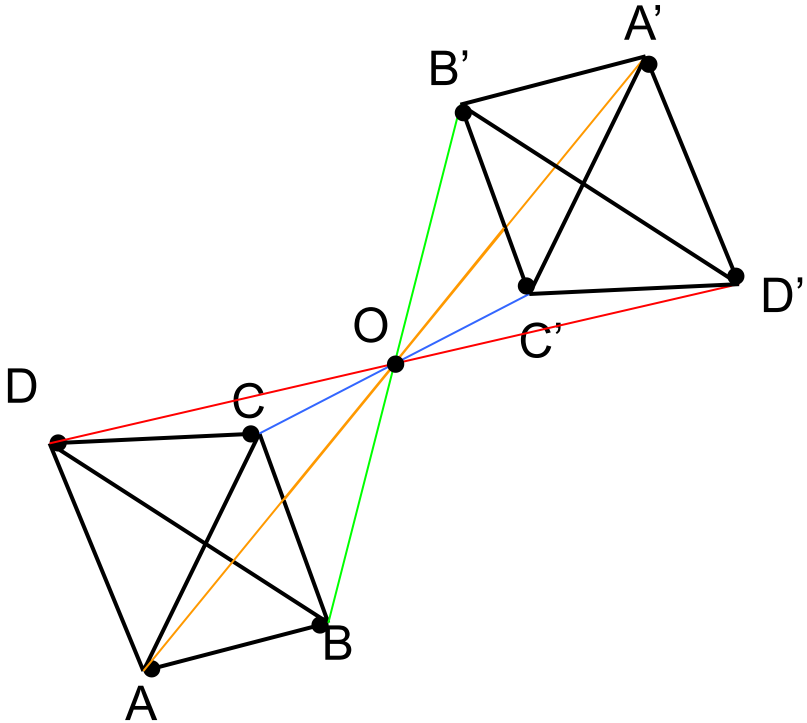
Понятие движения

Движение
это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками

Виды движения

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

Центральная симметрия



Центральная симметрия - отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно данного центра O.

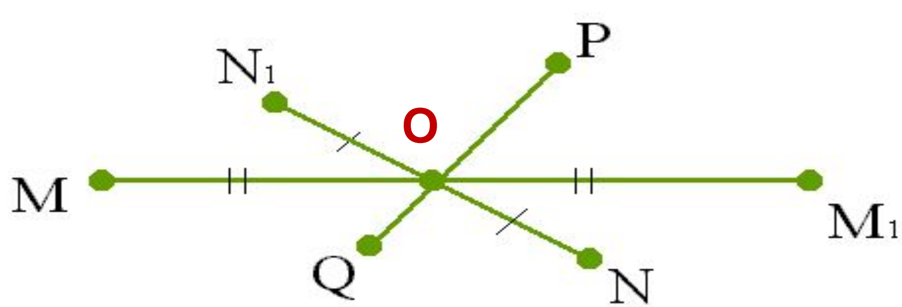
Центральная симметрия является движением.

Обозначим буквой ***O*** **центр симметрии** и введем прямоугольную систему координат *Oxyz* *с* началом в точке *O*.

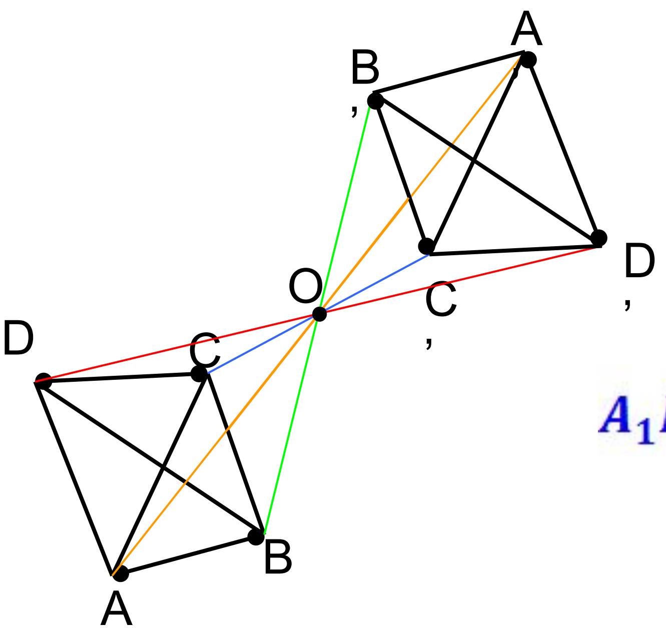
Установим связь между координатами двух точек *M (x; y; z)* и M_1 $(x_1, y_1; z_1)$, симметричных относительно точки *O*.

Если точка ***M*** **не совпадает с центром *O*, то *O* — середина отрезка** $\mathbf{MM_1}$. По формулам координат середины отрезка получаем $\frac{x+x_1}{2}=0$ $\frac{y+y_1}{2}=0$ $\frac{z+z_1}{2}=0$,

откуда $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$. Эти формулы верны и в том случае, когда точки М и *O* совпадают.



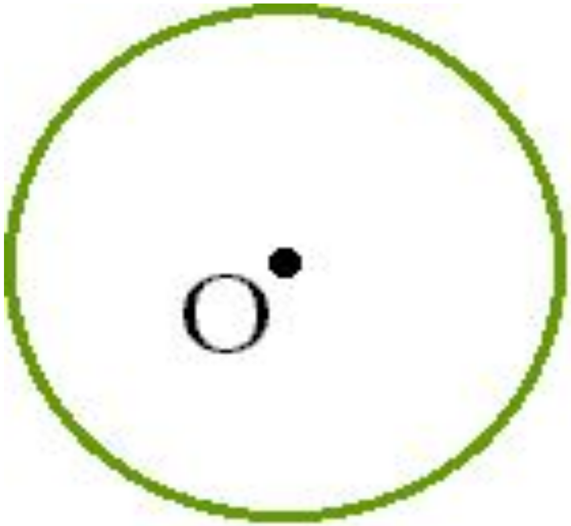
Рассмотрим теперь две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ **и** $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными точками A_1 и B_1 равно AB. Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ **и** $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками

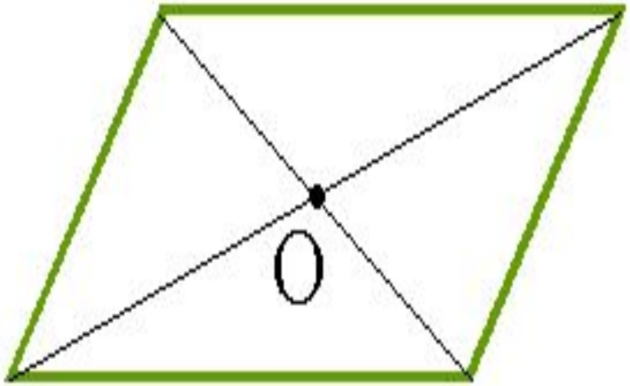


$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

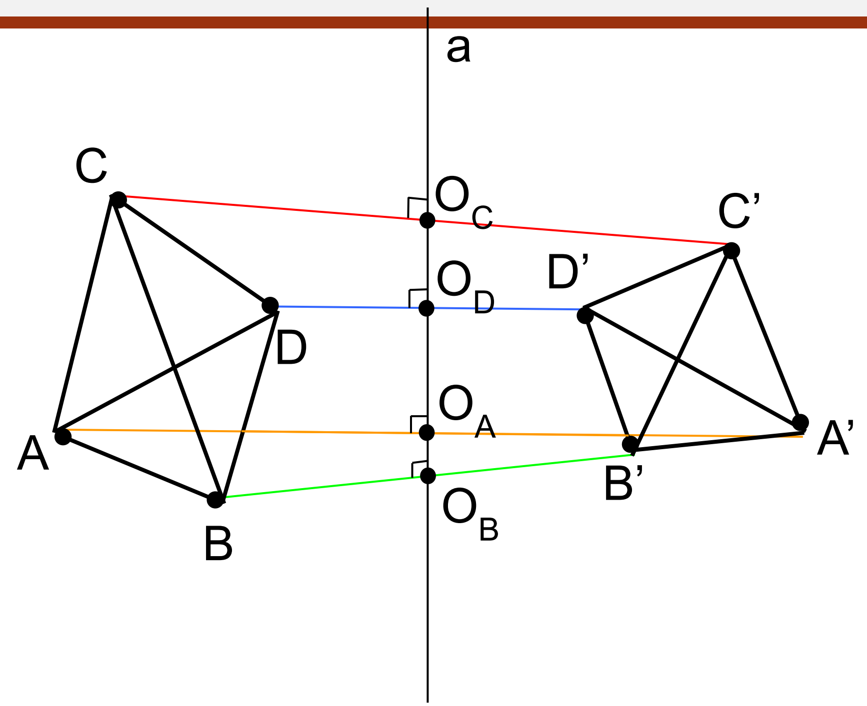
$$\boxed{AB = A_1B_1}$$


O


O

Осевая симметрия

Осевой симметрией с осью *a* называется **такое отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси *a*.**



Осевая симметрия является движением

Для этого введем прямоугольную систему координат *Oxyz* так, чтобы ось *Oz* совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $\boldsymbol{M(x; y; z)}$ **и** $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1; z_1)}$, симметричных относительно оси *Oz*.

Если точка *M* не лежит на оси *Oz* , то ось *Oz*: 1) проходит через середину отрезка MM_1 и 2) перпендикулярна к нему.

Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем $\frac{x + x_1}{2} = 0$ $\frac{y + y_1}{2} = 0$,

откуда $x_1 = -x$ и $y_1 = -y$.

Второе условие означает, что **аппликаты точек *M* и $\mathbf{M_1}$** равны: $\mathbf{z_1 = z_2}$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка *M* лежит на оси *Oz*.

Рассмотрим теперь любые две точки **A**(x_1; y_1; z_1) и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что **расстояние между симметричными им точками** A_1 **и** B_1**равно** AB.

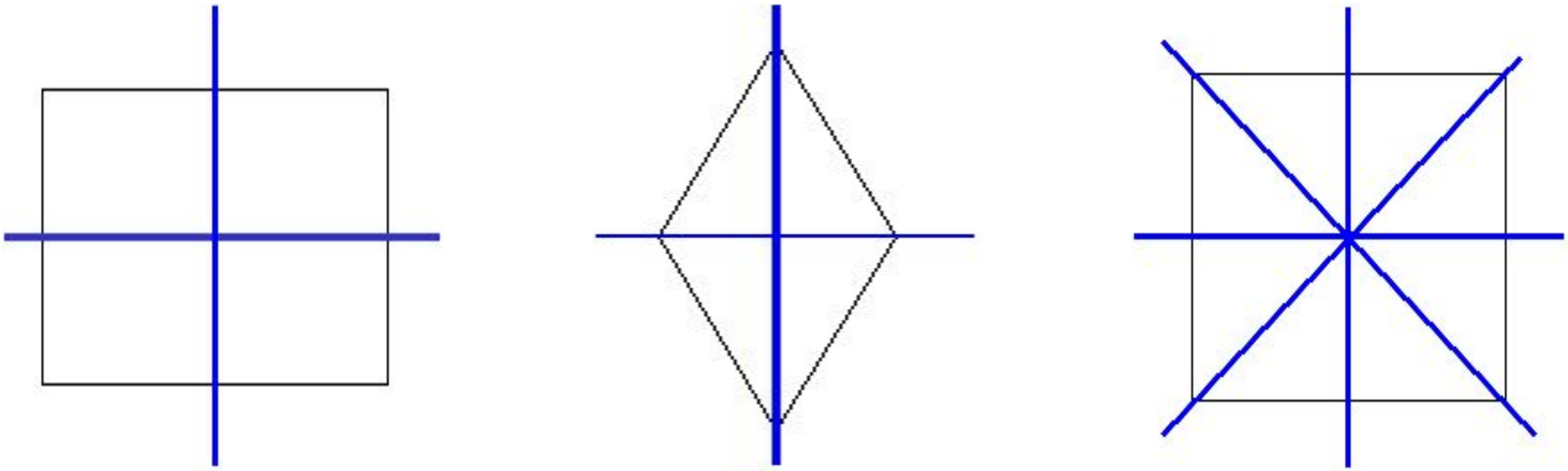
Точки A_1 и B_1 имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$.

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

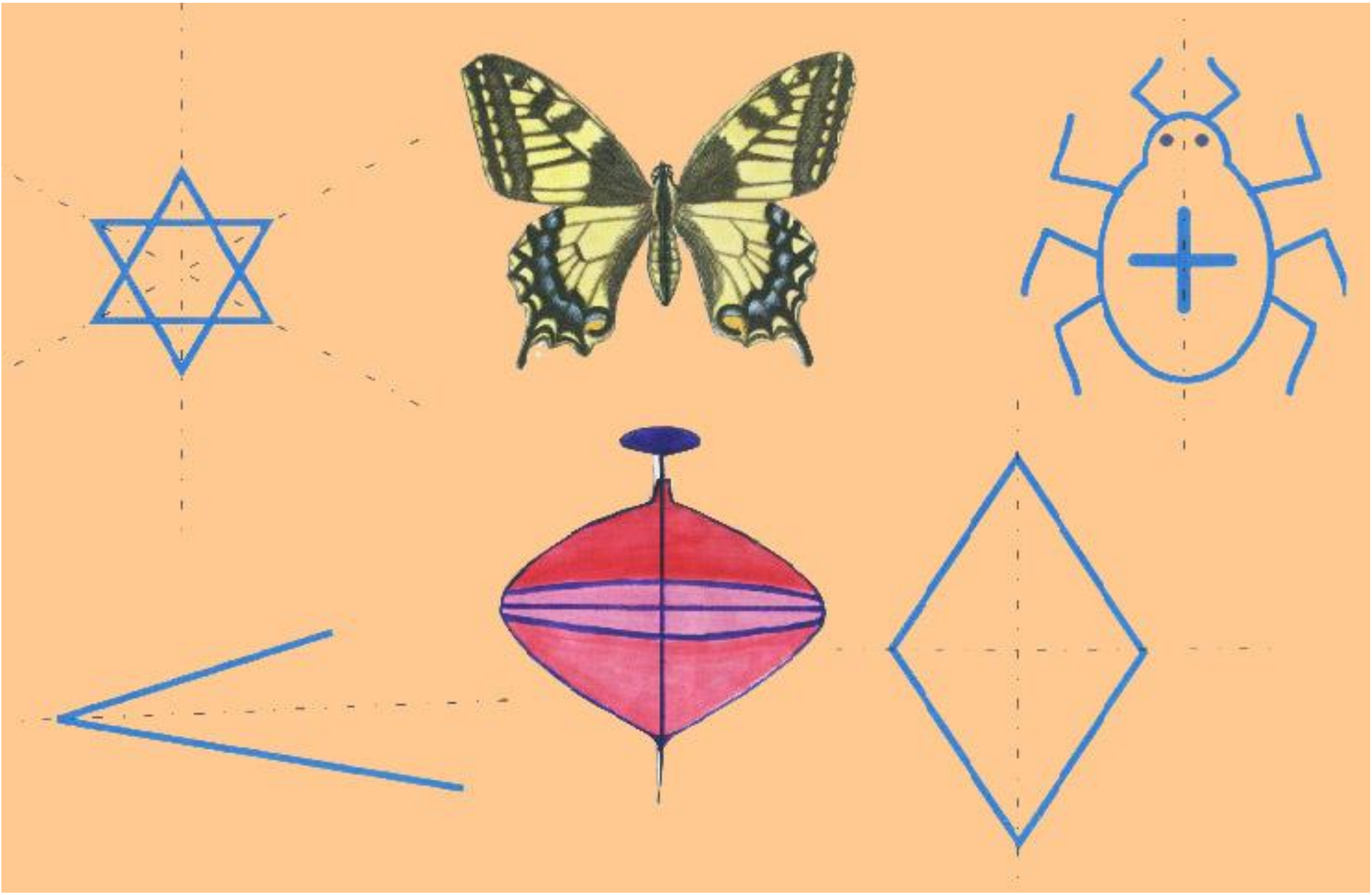
$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

$$\boxed{AB = A_1B_1}$$

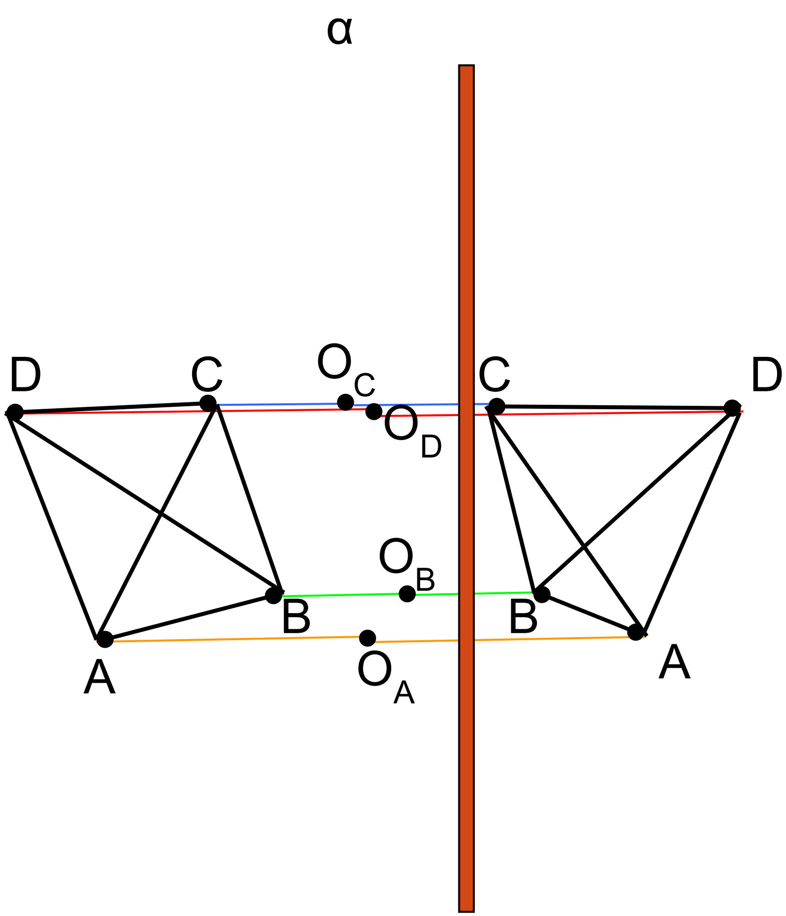


Осевая симметрия

Осевая симметрия вокруг нас



Зеркальная симметрия



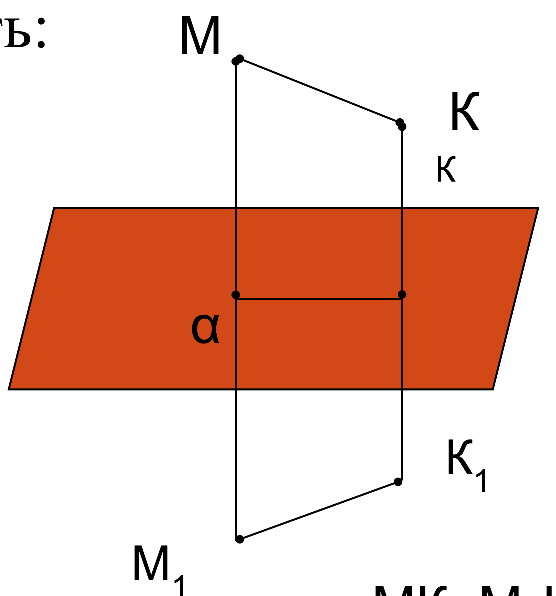
Зеркальной симметрией (относительно плоскости α) называется такое **отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку M_1.**

Зеркальная симметрия является движением

Для этого введем прямоугольную систему координат *Oxyz* так, чтобы плоскость *Oxy* совпала с плоскостью симметрии, и установим **связь между координатами двух точек М(х; $y;z$) и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно плоскости *Oxy***.

Если точка *M* не лежит в плоскости *Oxy*, то эта плоскость:

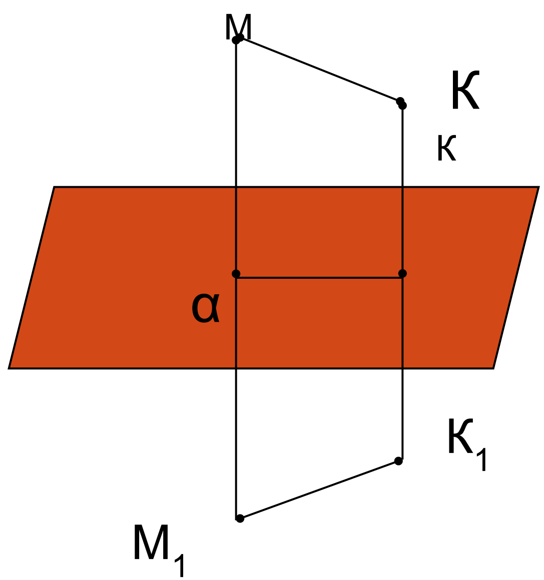
1) **проходит через середину отрезка MM_1 ;**
2) **перпендикулярна к нему.**



$MK=M_1K_1$

Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем : $\frac{z+z_1}{2}=0$, значит **z = -z**

Второе условие означает, что **отрезок MM_1 параллелен оси *Oz*, и, следовательно, $x_1=x$, $y_1=y$.** Полученные формулы верны и в том случае, когда точка *M* лежит в плоскости *Oxy*.



$МК=М_1К_1$

Рассмотрим теперь две точки *$A(x_1, y_1; z_1)$* и В *$(x_2; y_2; z_2)$* и докажем, что расстояние между симмеричными им точками *A_1* и B_1 равно *AB*. Точки *A_1* и B_1 имеют координаты $A_1(x_1 ; y_1 ; - z_1)$ и *$B_1(x_2; y_2; -z_2)$*. По формуле расстояния между двумя точками находим:

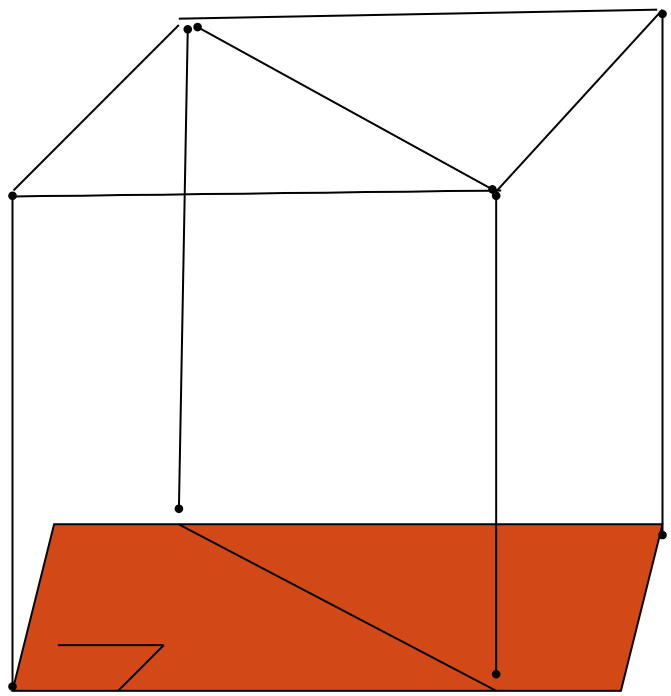
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$$

$$\boxed{AB = A_1B_1}$$

Фигуры, симметричные относительно плоскости

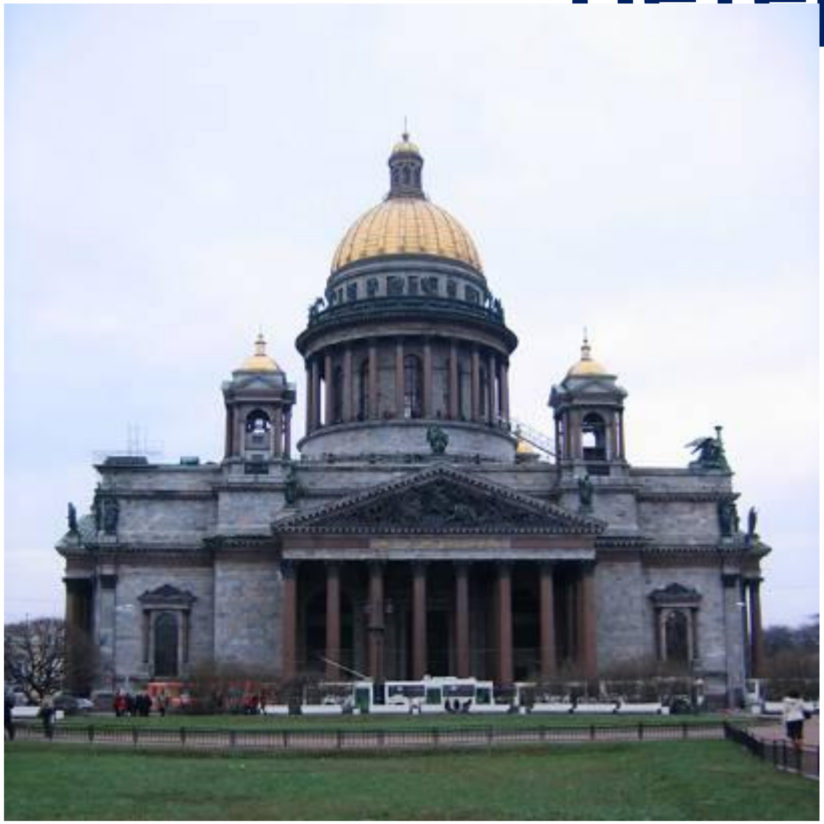
Фигура (тело) называется симметричной относительно некоторой плоскости, если эта плоскость разбивает фигуру на две равные симметричные части.



Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

Ответы : 2; 4; 5; 6; 9

Зеркальная симметрия в архитектуре г. Санкт-Петербурга



Исаакиевский собор

Александринский театр

Сколько плоскостей симметрии имеют данные объекты?

Улица России

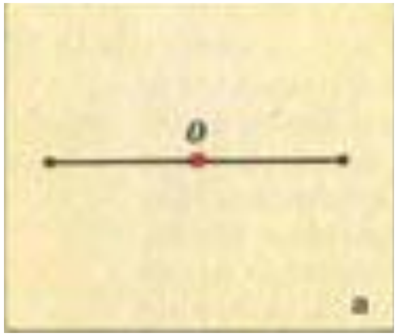
имеет плоскость симметрии в общем обзоре, но не все детали в архитектуре зданий симметричны.

Зеркальная симметрия

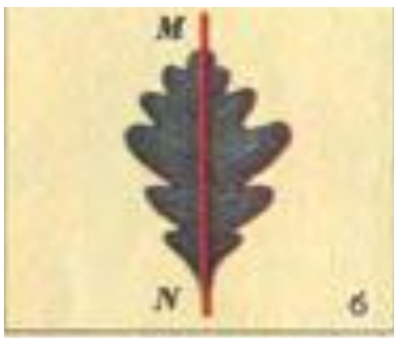
Пример зеркальной симметрии

Центральный зал станции

Зеркально симметричные объекты



Центральная симметрия

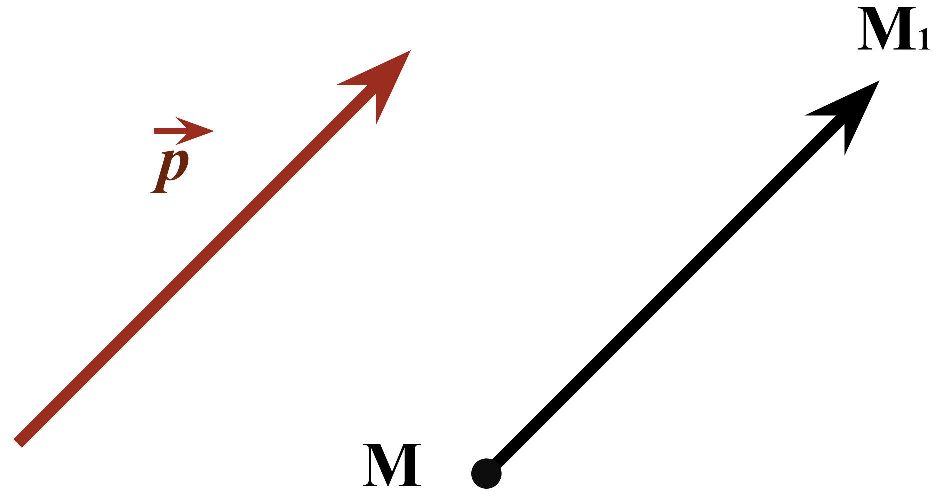


Осевая симметрия

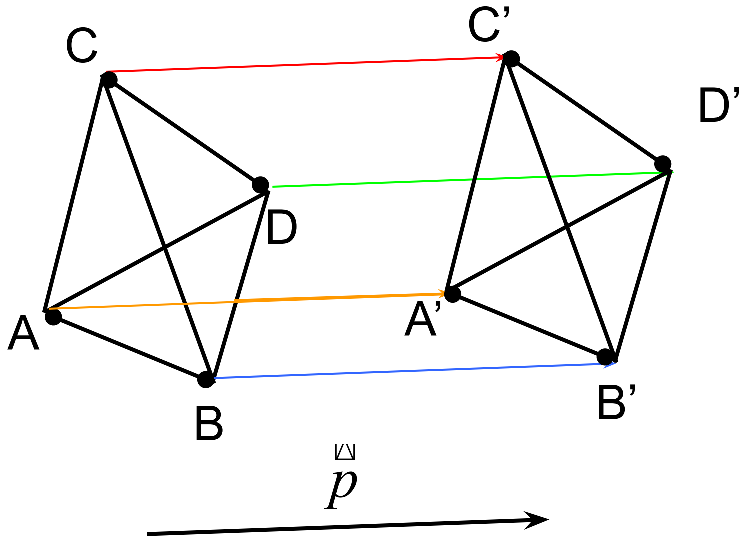
Зеркальная симметрия

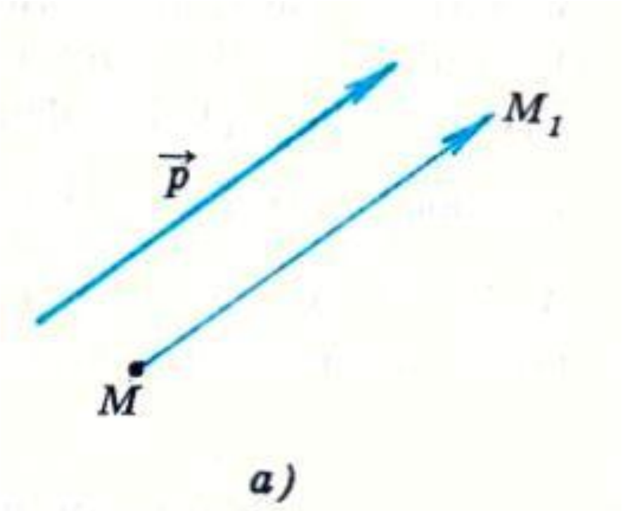
Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор *p* называется отображение пространства на себя, при котором любая точка *M* переходит в такую точку M_1, что $\overrightarrow{MM_1} = \vec{p}$

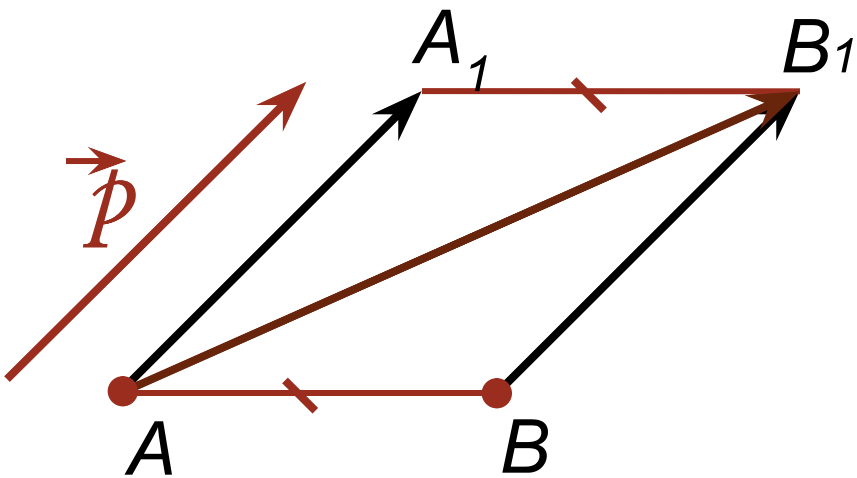


Параллельный перенос





Параллельный перенос является движением



При параллельном переносе на вектор *p* любые две точки А и В переходят в точки A_1 и B_1 такие, что $\vec{AA_1} = \vec{p}$ и $\vec{BB_1} = \vec{p}$. Требуется доказать, что

$$A_1B_1 = AB.$$

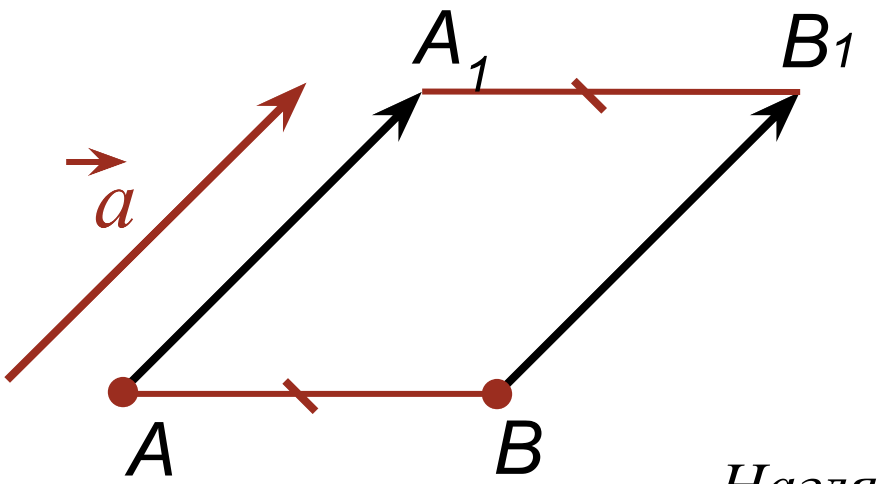
По правилу треугольника

$$\vec{AB_1} = \vec{AA_1} + \vec{A_1B_1}$$

С другой стороны, $\vec{AB_1} = \vec{AB} + \vec{BB_1}$

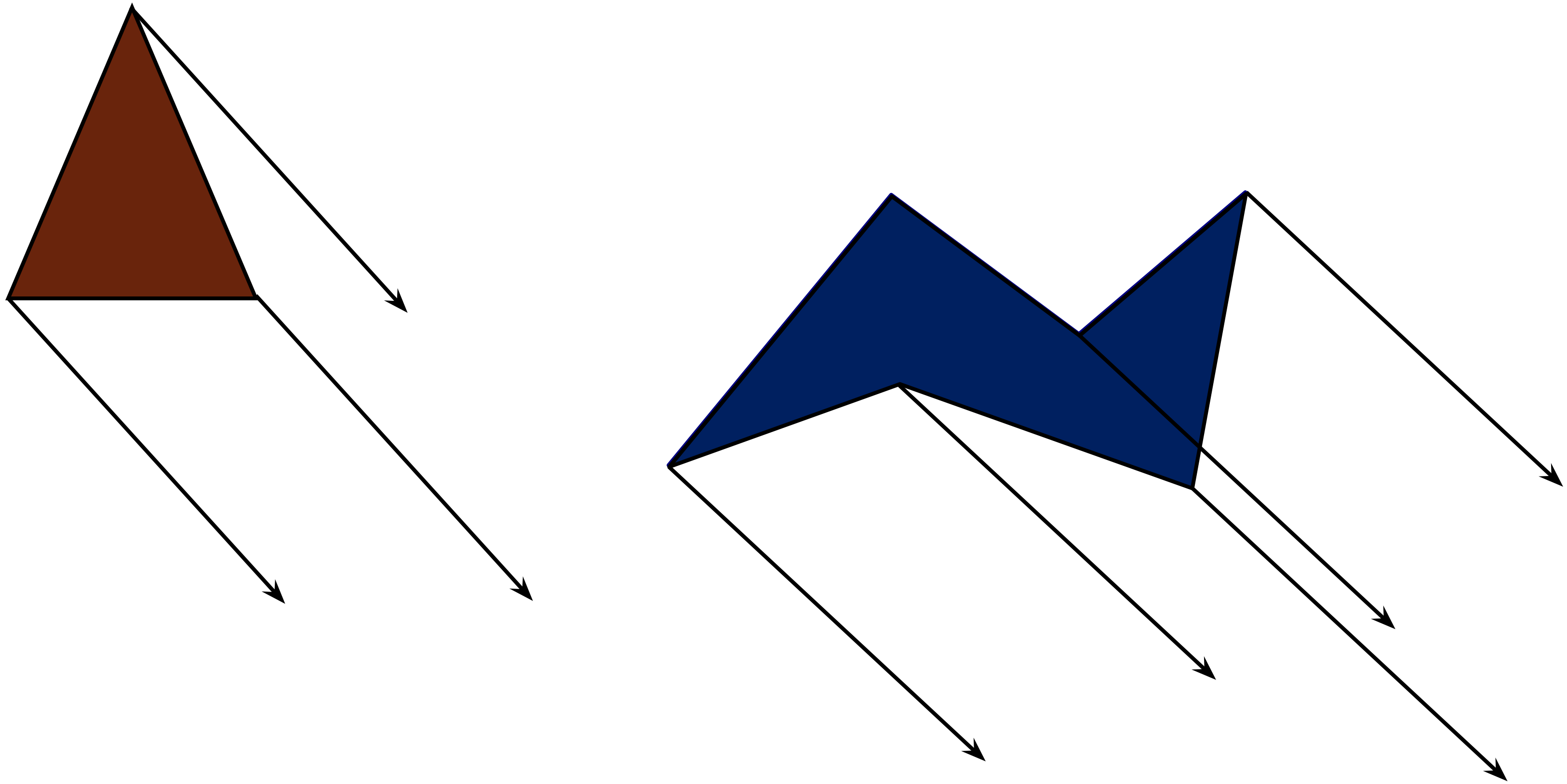
Из этих двух равенств получаем $\vec{AA_1} + \vec{A_1B_1} = \vec{AB} + \vec{p}$, или $\vec{p} + \vec{A_1B_1} = \vec{AB} + \vec{p}$, откуда $\vec{A_1B_1} = \vec{AB}$. Следовательно, $A_1B_1 = AB$, что и требовалось доказать.

Параллельный перенос

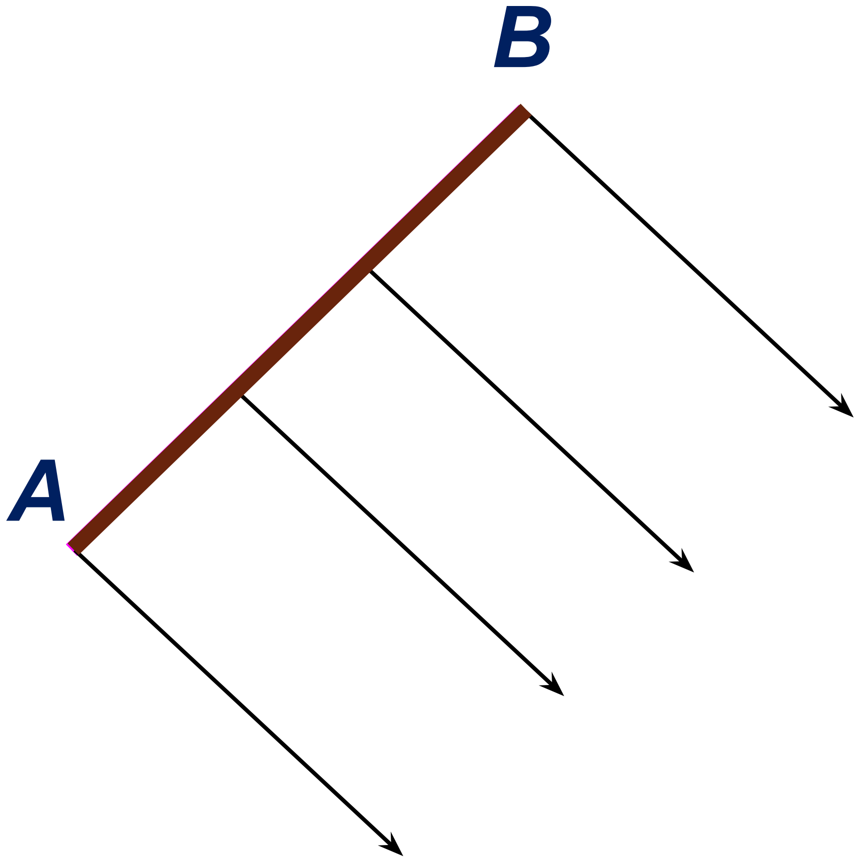


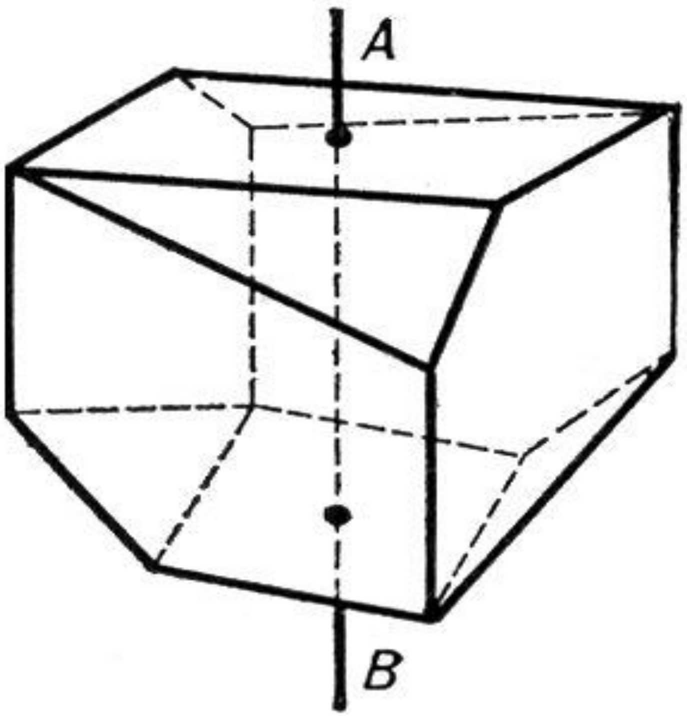
Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора на его длину.

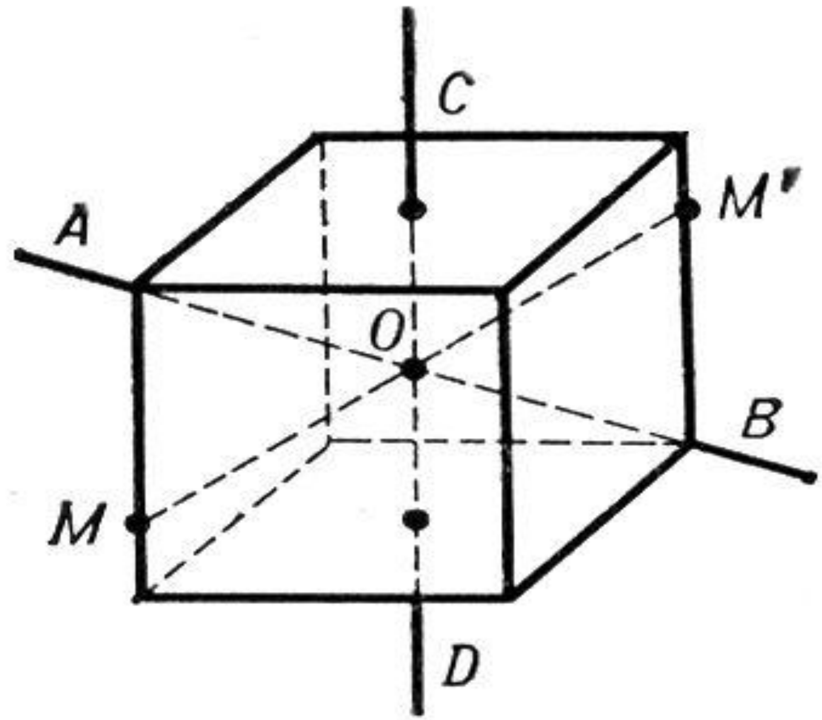
Параллельный перенос различных фигур



Параллельный перенос

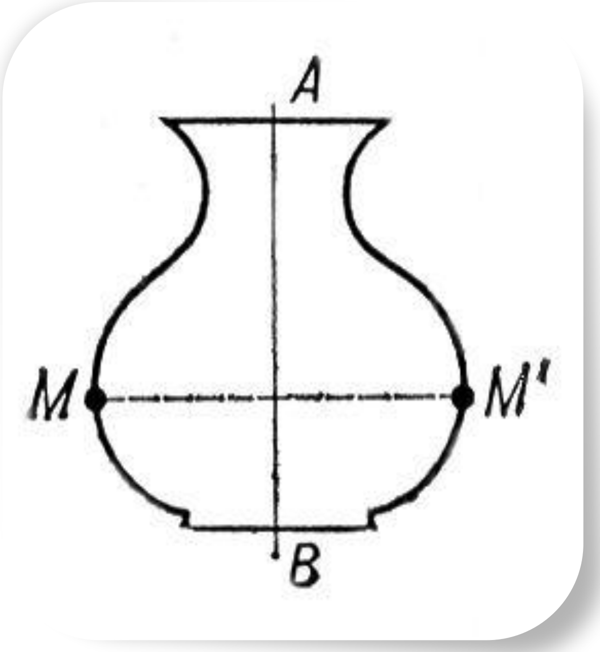






Многогранник. Зеркально-осевая симметрия.

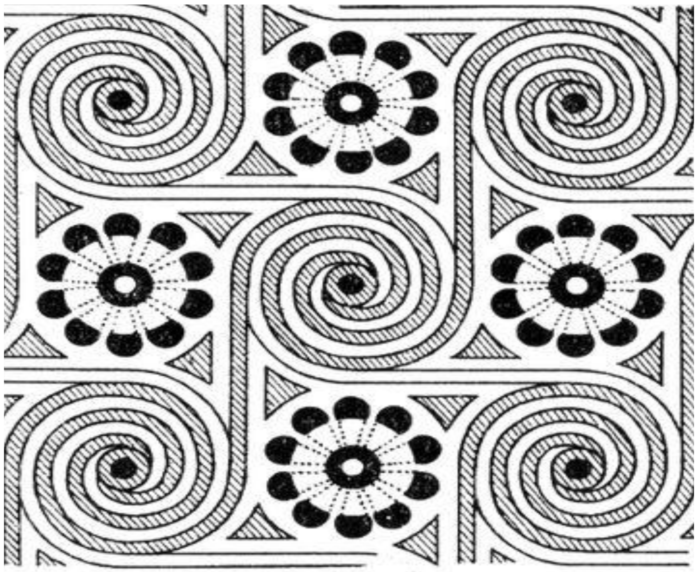
Куб. Симметрия третьего поря



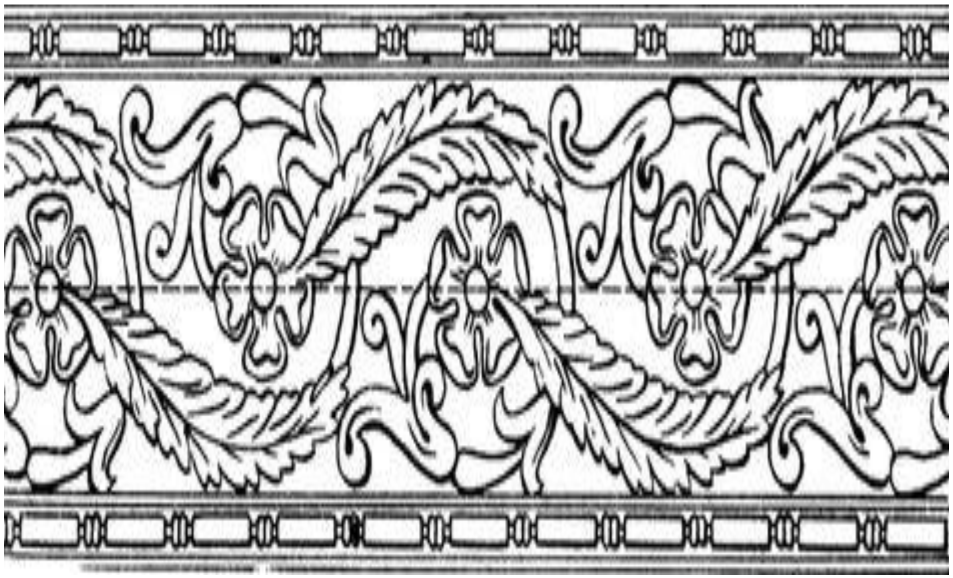
Кувшин. Плоская симметричная фигура.

Крапива. Винтовая симметрия.

Звезда. Симметрия восьмого порядка.



Симметрия переноса



Симметрия. Орнамент.