1.2 Алгебраические критерии устойчивости

- **Необходимое условие устойчивости**
- Характеристическое уравнение системы с помощью теоремы Виета может быть записано в виде
- $\mathbf{D(p) = a_o p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = a_o(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n) = 0,}$
- где $\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ - корни этого уравнения.
- Если система устойчива, значит все корни левые, то есть вещественные части всех корней отрицательны, что можно записать как $\mathbf{a_i = -|a_i| < 0}$. Подставим их в уравнение:

$$\mathbf{a_0(p + |a_1|)(p + |a_2| - j2)(p + |a_2| + j2)\ldots = 0.}$$

- Перемножая комплексно сопряженные выражения, получим:
- $a_0(p+|a_1|)\cdot(p+|a_2|-j\omega^2)(p+|a_2|+j\omega^2)\ldots=0$
- После раскрытия скобок должно получиться выражение

  $\mathbf{a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_n = 0.}$
- Так как в скобках нет ни одного отрицательного числа, то ни один из коэффициентов $\mathbf{a_0, a_1, \ldots, a_n}$ не будет отрицательным. Поэтому *необходимым условием устойчивости САУ является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения*:

  $\mathbf{a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0}$.
- Рассмотренное условие является необходимым, но не достаточным условием. Необходимые и достаточные условия дают алгебраические критерии Рауса и Гурвица.

Корневой критерий

- Критерий, определяющий устойчивость системы по значениям корней характеристического полинома, получил название корневого.
- Для определения устойчивости необходимо путем приравнивания знаменателя передаточной функции (характеристического полинома) к нулю получить характеристическое уравнение и его корни. Корни характеристического уравнения могут быть как действительные, так и комплексные и для наглядности могут быть изображены на комплексной плоскости (плоскости корней).

Корневой критерий формулируется следующим образом:

Линейная АСР устойчива, если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости

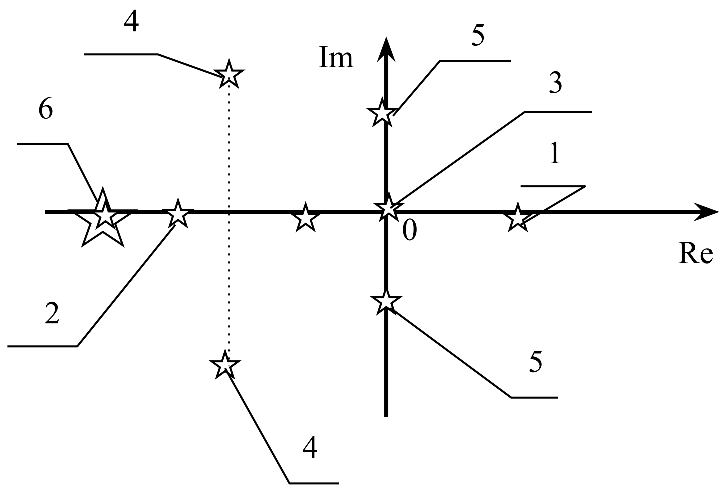

Рисунок 1.42

.

Иными словами, все действительные корни и действительные части комплексных корней должны быть отрицательны. В противном случае система неустойчива.

Пример. Передаточная функция системы имеет вид:

$$W(s) = \frac{3s + 4}{s^3 + 2s^2 + 2.25s + 1.25}$$

.

Характеристическое уравнение: $s^3 + 2s^2 + 2,25s + 1.25 = 0$ имеет три корня:

$s_1 = -1$; $s_2 = -0,5 + j$; $s_3 = -0,5 - j$.

Действительные части всех корней отрицательны, следовательно, система устойчива.

Критерий Стодолы

- Этот критерий является следствием из предыдущего и формулируется следующим образом:
- **Линейная система устойчива, если все коэффициенты характеристического полинома положительны.**

- То есть, передаточная функция из примера по критерию Стодола соответствует устойчивой системе.

Критерий Рауса

- Раус предложил критерий устойчивости САУ в виде алгоритма, по которому заполняется специальная таблица с использованием коэффициентов характеристического уравнения:
- 1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с четными индексами в порядке их возрастания;
- 2) во второй строке - с нечетными;
- 3) остальные элементы таблицы определяется по формуле: $\mathbf{c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1}}$,

где $\mathbf{r_i = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}}$,

$\mathbf{i \geq 3}$ - номер строки, $\mathbf{k}$ - номер столбца;

- 4) Число строк таблицы Рауса на единицу больше порядка характеристического уравнения.

Таблица Рауса

Ri	i\k	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	…
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	…
$r_3 = c_{11}/cc_{12}$	3	$c_{13} = c_{21}-r_3c_{22}$	$c_{23} = c_{31}-r_3c_{32}$	$c_{33} = c_{41}-r_3c_{42}$	…
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	4	$c_{14} = c_{22}-r_3c_{23}$	$c_{24} = c_{32}-r_4c_{33}$	$c_{34} = c_{42}-r_4c_{43}$	…
…	…	…	…	…	…

- *Критерий Рауса:*
- ***для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса c_{11}, c_{12}, c_{13},... были положительными.***
- Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемен знака в первом столбце.
- *Достоинство* - критерий прост в использовании независимо от порядка характеристического уравнения. Он удобен для использования на ЭВМ. *Его недостаток* - малая наглядность, трудно судить о степени устойчивости системы, насколько далеко отстоит она от границы устойчивости.

Критерий Гурвица

- Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица по алгоритму:
- 1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от $\mathbf{a_1}$ до $\mathbf{a_n}$;
- 2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;
- 3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 \ldots 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \ldots 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \ldots 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_n \end{vmatrix}$$

- Критерий Гурвица:
- **Для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все n диагональных миноров определителя Гурвица были положительны. Эти миноры называются определителями Гурвица.**

- **Если хотя бы один определитель матрицы будет отрицателен, то система неустойчива не зависимо от числа положительных или нулевых определителей.**
- **Если хотя бы один определитель будет равен нулю, то система будет находится на границе устойчивости.**

- 1) **n = 1** => уравнение динамики: $\mathbf{a_0p + a_1 = 0}$.

  Определитель Гурвица: $\Delta = \Delta_1 = \mathbf{a_1 > 0}$ при $\mathbf{a_0 > 0}$, то есть условиие устойчивости: $\mathbf{a_0 > 0, a_1 > 0}$;
- 2) **n = 2** => уравнение динамики: $\mathbf{a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0}$. Определители Гурвица: $\Delta_1 = \mathbf{a_1 > 0, D_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = a_1a_2 > 0}$, так как $\mathbf{a_3 = 0}$, то есть условие устойчивости: $\mathbf{a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0}$;
- 3) **n = 3** => уравнение динамики: $\mathbf{a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0}$. Определители Гурвица: $\Delta_1 = \mathbf{a_1 > 0}$, $\Delta_2 = \mathbf{a_1a_2 - a_0a_3 > 0}$,
- $\Delta_3 = \mathbf{a_3}\Delta_2 \mathbf{> 0}$, условие устойчивости: $\mathbf{a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0}$;
- Таким образом при **n ≤ 2** положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым и достаточным условием устойчивости САУ. При **n**>**2** появляются дополнительные условия.

- Критерий Гурвица применяют при **n** $\leq$ **4**. При больших порядках возрастает число определителей и процесс становится трудоемким. Имеется ряд модификаций данного критерия, расширяющие его возможности.

- *Недостаток критерия Гурвица* - малая наглядность. *Достоинство* - удобен для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния одного из параметров САУ на ее устойчивость. Так равенство нулю главного определителя $\Delta_n = \mathbf{a}_n \Delta_{n-1} = \mathbf{0}$ говорит о том, что система находится на границе устойчивости. При этом либо $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ - при выполнении остальных условий система находится на границе апериодической устойчивости, либо предпоследний минор $\Delta_{n-1} = \mathbf{0}$ - при положительности всех остальных миноров система находится на границе колебательной устойчивости.

Пример. Дана передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\infty}(s) == \frac{2s^3 + 9s^2 + 6s + 1}{2s^4 + 3s^3 + s^2} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Требуется определить устойчивость замкнутой системы по критерию Гурвица.
Для этого определяется ХПЗС:

$$D(s) = A(s) + B(s) = 2s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s^3 + 9s^2 + 6s + 1 = 2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 6s + 1.$$

Поскольку степень ХПЗС равна $n = 4$, то матрица будет иметь размер 4x4. Коэффициенты ХПЗС равны $a_4 = 2$, $a_3 = 5$, $a_2 = 10$, $a_1 = 6$, $a_0 = 1$.

Матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(обратите внимание на сходство строк матрицы: 1 с 3 и 2 с 4).
Определители (диагональные миноры матрицы):

$\Delta_1 = 5 > 0,$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = 5*10 - 2*6 = 38 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (5*10*6 + 6*1*0 + 2*5*0) -$$

$$-(0*10*0 + 5*5*1 + 2*6*6) = 209 > 0$$

$\Delta_4 = 1 * \Delta_3 = 1*209 > 0.$

Поскольку все определители положительны, то АСР **устойчива**

- Параметры САУ определяют значения коэффициентов уравнения динамики, следовательно изменение любого параметра Ki влияет на значение определителя Δ_{n-1}. Исследуя это влияние можно найти, при каком значении Ki определитель Δ_{n-1} станет равен нулю, а потом – отрицательным.
- Это и будет предельное значение исследуемого параметра, после которого система становится неустойчивой.

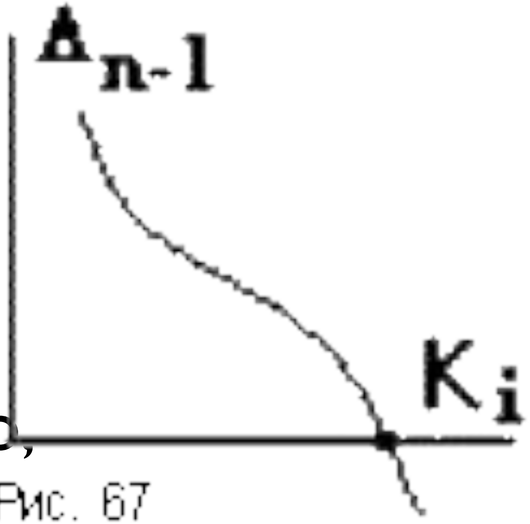

Рис. 67

Контрольные вопросы

1. Что понимают под устойчивостью САУ в малом и в большом?
2. Какой вид имеет решение уравнения динамики САУ?
3. Как найти вынужденную составляющую решения уравнения динамики САУ?
4. Какой вид имеет свободная составляющая решения уравнения динамики САУ?
5. Что такое характеристическое уравнение?
6. Какой вид имеют корни характеристического уравнения?
7. Чем отличаются правые и левые корни характеристического уравнения?
8. Сформулируйте условие устойчивости систем по Ляпунову.
9. Что такое граница устойчивости?
10. Что такое критерии устойчивости?
11. Сформулируйте необходимое условие устойчивости САУ.
12. Сформулируйте критерий Рауса.
13. Сформулируйте критерий Гурвица.
14. В чем достоинства и недостатки алгебраических критериев устойчивости?