Параллельность прямых, прямой и плоскости

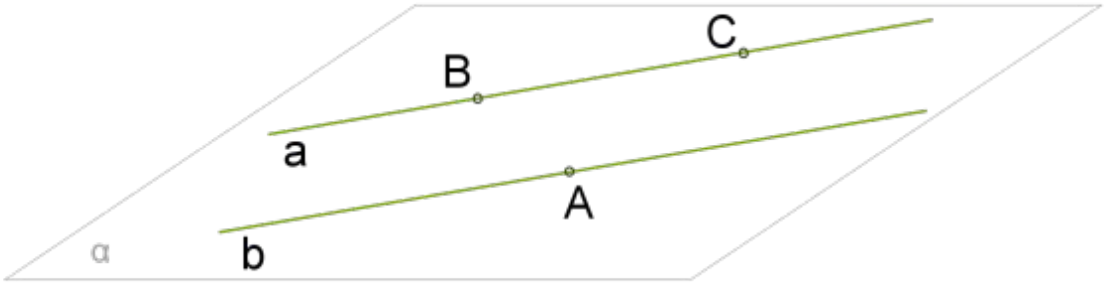
ТЕПЛОВ Н.В.

1. Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются параллельными, если лежат в одной плоскости и не пересекаются.

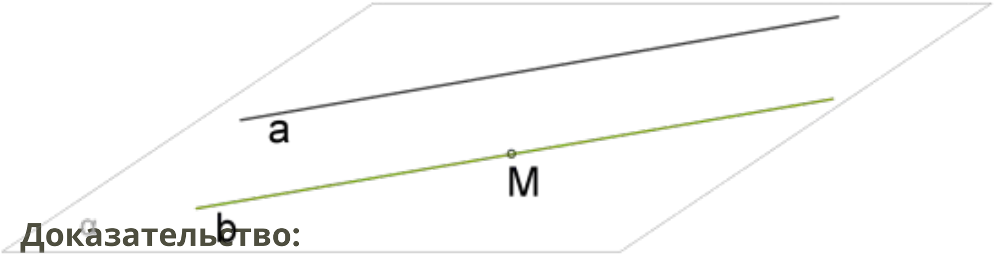
Параллельность прямых a и b обозначается так: a // b или b // a.

Теорема 1. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при том только одну.



Доказательство:
1. Так как прямые a и b параллельны, из определения следует, что через них можно провести плоскость α.
2. Чтобы доказать, что такая плоскость только одна, на прямой a обозначаем точки B и C, а на прямой b точку A.
3. Так как через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость (2 аксиома), то α является единственной плоскостью, которой принадлежат прямые a и b.

Теорема 2. Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при том только одну.



Доказательство:

1. Через данную прямую a и точку M, которая не лежит на прямой, проводится плоскость α.

2. Такая плоскость только одна (т.к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).

3. А в плоскости α через точку M можно провести только одну прямую b, которая параллельна прямой a.

Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

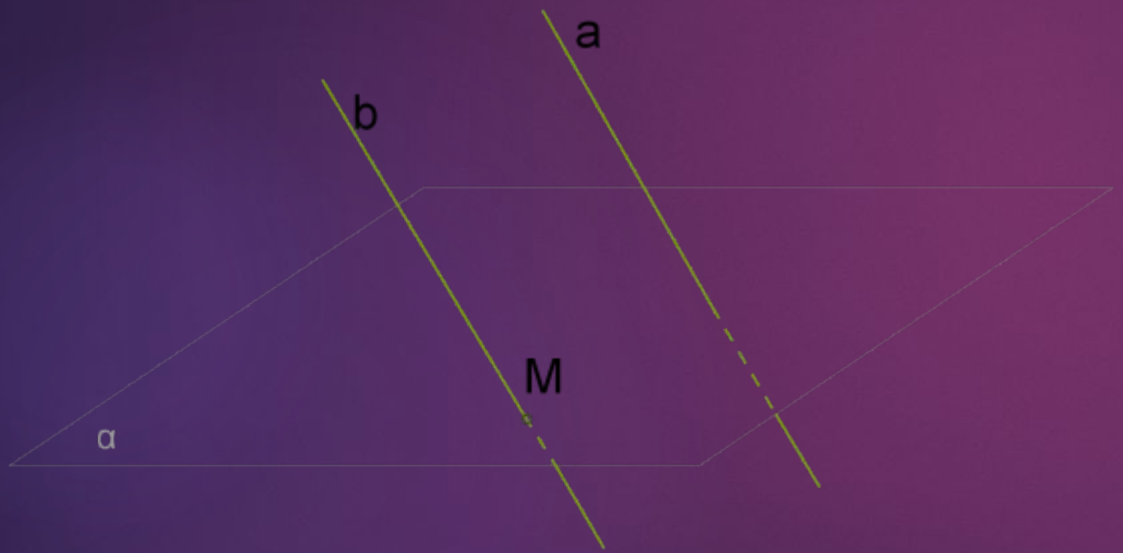


РИС. 1

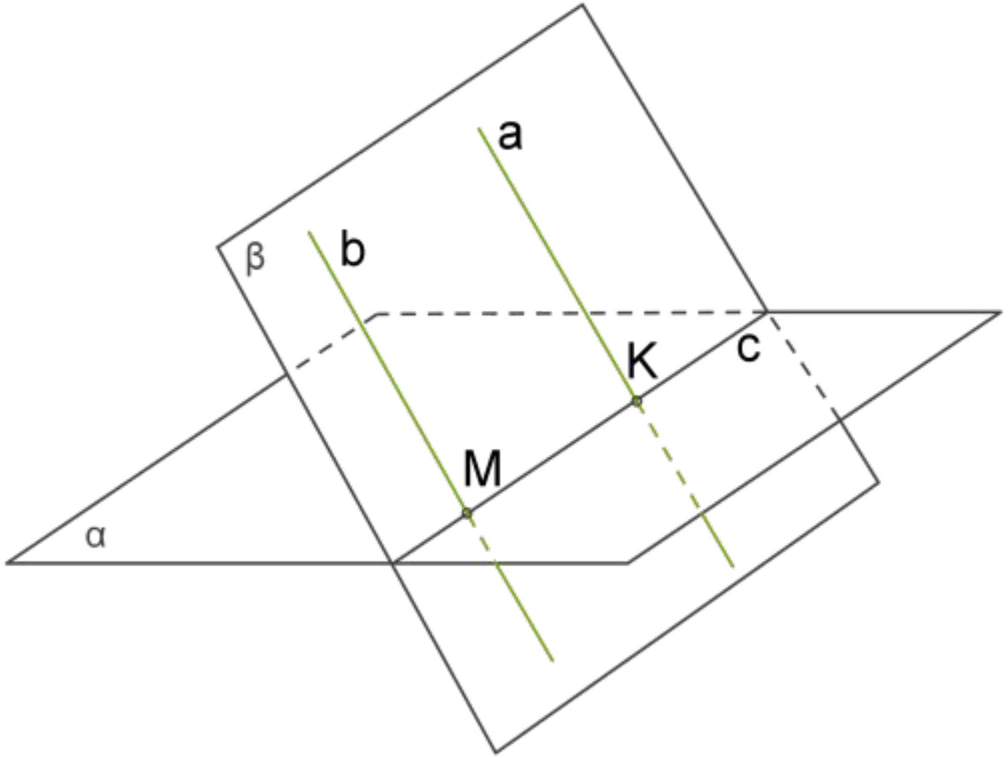


РИС. 2

Доказательство:
Рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке M (1. рис.).

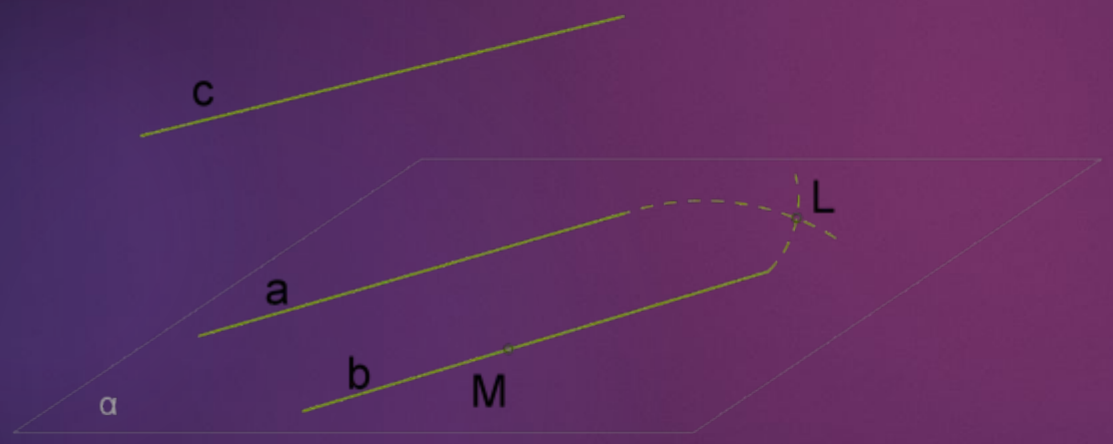
Из 1-ой теоремы известно, что через параллельные прямые a и b можно провести только одну плоскость β.

Так как точка M находится на прямой b, то M также принадлежит плоскости β(2. рис.). Если у плоскостей α и β есть общая точка M, то у этих плоскостей есть общая прямая c, которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).

Прямые a, b и c находятся в плоскости β.
Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую c, то вторая прямая a тоже пересекает c.

Точку пересечения прямых a и c обозначим за K.
Так как точка K находится на прямой c, то K находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α.
Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке K.

Теорема 4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.



Дано: a // c и b // c
Доказать: a // b
Доказательство:
Выберем точку M на прямой b.
Через точку M и прямую a, которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость α (Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:
1) прямая b пересекает плоскость α или 2) прямая b находится в плоскости α.

Пусть прямая b пересекает плоскость α.
Значит, прямая c, которая параллельна прямой b, тоже пересекает плоскость α. Так как a // c, то получается, что a тоже пересекает эту плоскость. Но прямая a не может
одновременно пересекать плоскость α и находиться в плоскости α. Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая b пересекает плоскость α, является **неверным**.
Значит, прямая b находится в плоскости α.

Теперь нужно доказать, что прямые a и b параллельны.
Пусть у прямых a и b есть общая точка L.
Это означает, что через точку L проведены две прямые a и b, которые параллельны прямой c. Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые a и b не имеют общих точек.
Так как прямые a и b находятся в одной плоскости α и у них нет общих точек, то они параллельны.

Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется пучком параллельных прямых.

Выводы:
1) Любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.
2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: если a // b и b // c ,то a // c.

2. Параллельность прямой и плоскости

СОГЛАСНО АКСИОМАМ, ЕСЛИ ДВЕ ТОЧКИ ПРЯМОЙ НАХОДЯТСЯ В НЕКОТОРОЙ ПЛОСКОСТИ, ТО ПРЯМАЯ ЛЕЖИТ В ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ. ОТСЮДА СЛЕДУЕТ, ЧТО ВОЗМОЖНЫ ТРИ СЛУЧАЯ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ:

1) ПРЯМАЯ ЛЕЖИТ (НАХОДИТСЯ) В ПЛОСКОСТИ

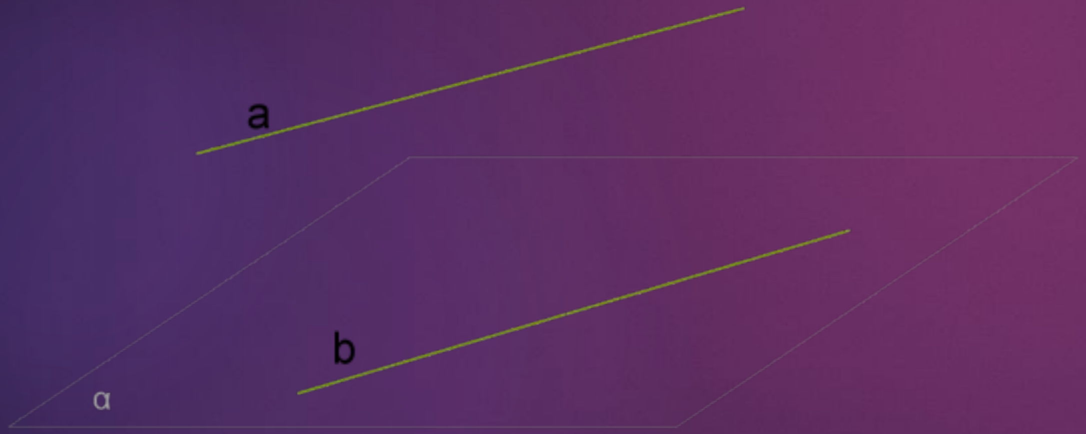
2) ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ИМЕЮТ ТОЛЬКО ОДНУ ОБЩУЮ ТОЧКУ (ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ)

3) ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ НЕ ИМЕЮТ ОБЩИХ ТОЧЕК

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ НАЗЫВАЮТСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ, ЕСЛИ ОНИ НЕ ИМЕЮТ ОБЩИХ ТОЧЕК.

Теорема 5 „Признак параллельности прямой и плоскости”.
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая

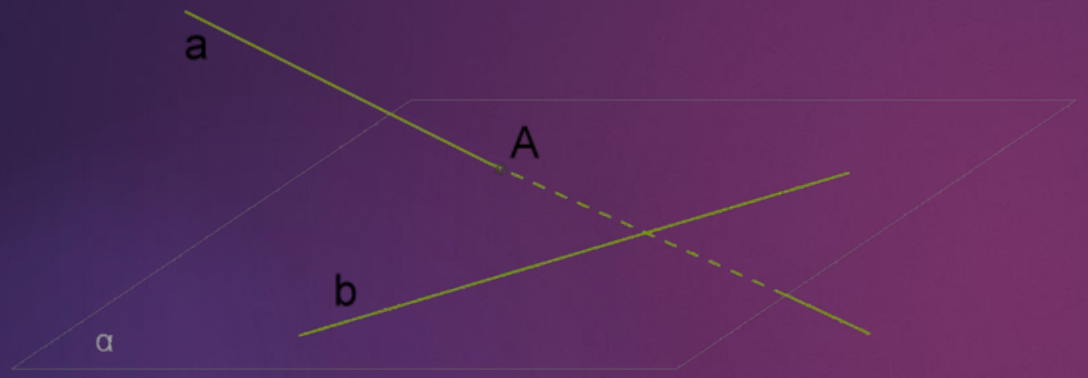
параллельна данной плоскости.



Доказательство:

Доказательство проведем от противного. Пусть a не параллельна плоскости α, тогда прямая a пересекает плоскость в некоторой точке A.

Причем A не находится на b, так как a // b. Согласно признаку скрещивающихся прямых,
прямые a и b скрещивающиеся.



Мы пришли к противоречию. Так как согласно данной информации a // b, они не могут быть скрещивающимися. Значит прямая a должна быть параллельна плоскости α.

Теорема 6.
Если плоскость β проходит через данную прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает эту плоскость по прямой b, то b // a.

Прямую b иногда называют следом плоскости β на плоскости α.

Теорема 7.
Если одна из двух параллельных прямых a // b параллельна данной плоскости α, то другая прямая либо параллельна этой плоскости либо лежит в этой плоскости.