Формализм задачи линейной оптимизации на примере транспортной задачи

Вопрос . Постановка транспортной задачи . Решение средствами MS Excel.

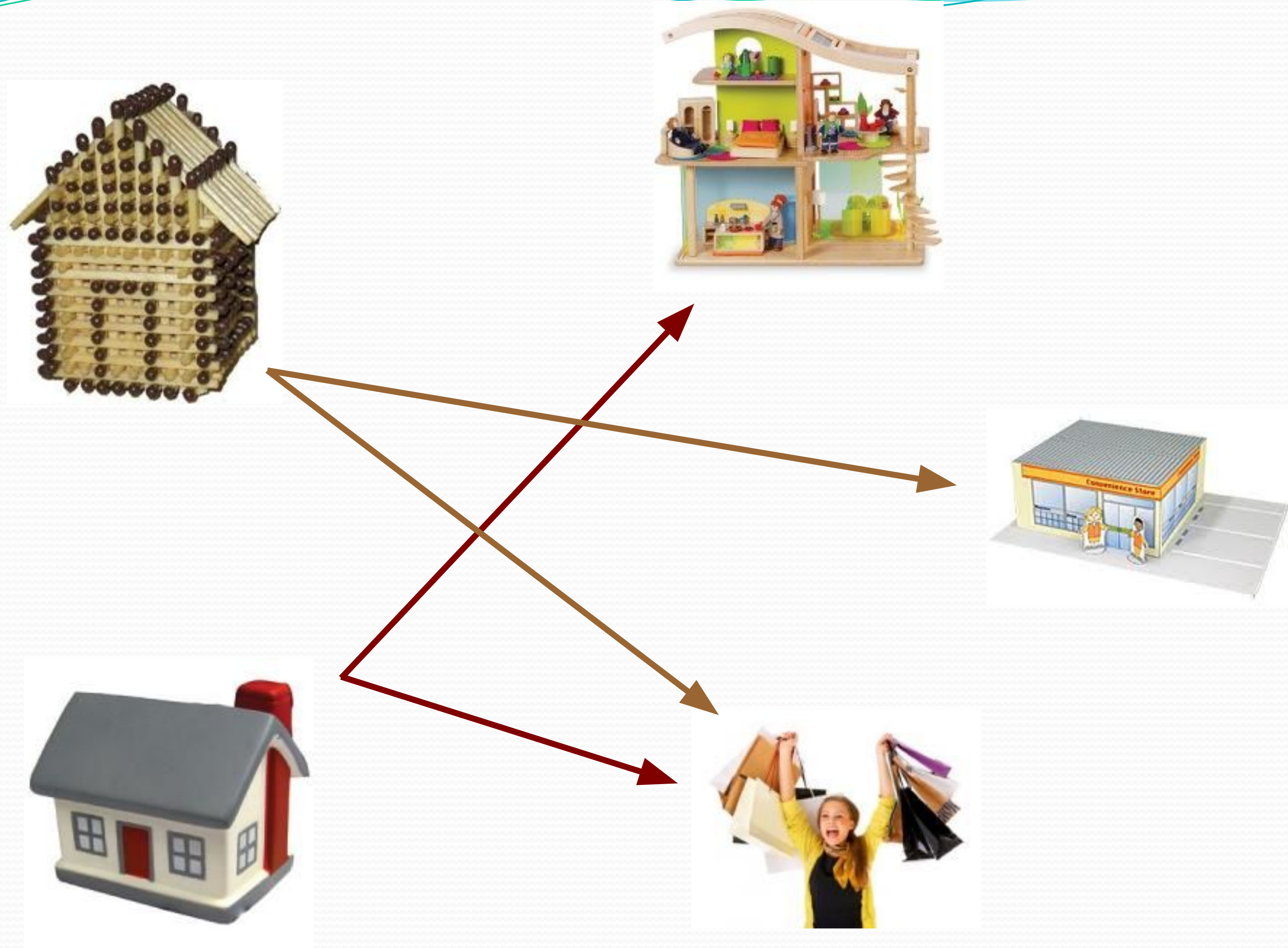
Вопрос 1. Постановка транспортной задачи . Решение средствами MS Excel.

Считаем, что некоторая однородная продукция находится у нескольких ***поставщиков*** в различных объёмах.

Необходимо доставить эту продукцию ряду ***потребителей*** в разных количествах.

Известны *стоимости перевозки* ***единицы*** продукции от каждого поставщика каждому потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором *суммарные затраты* на перевозку всех грузов **минимальны**.



Рассмотрим постановку и математическую модель одной из задач линейной оптимизации, которая получила название *транспортной задачи*.

Необходимо доставить от поставщиков

$i = \overline{1, m}$

i ( ) некоторый однородный груз $j = \overline{1, n}$

(товар) в объеме a_i единиц потребителям с минимальными транспортными издержками (здесь m и n – конечные числа).

Потребность в данном товаре каждого *j*-го потребителя известна и составляет b_j единиц.

Известны также c_{ij} – величины стоимости перевозки единицы груза от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю.

Следует составить такой план перевозок x_{ij} , при котором суммарная стоимость перевозки груза (товара) будет минимальной, т.е. $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$

Закрытая задача (модель): суммарные **запасы** поставщиков **равняются** суммарным **запросам** потребителей.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Открытая модель (задача с нарушенным балансом): **запасы** поставщиков **не равны** **запросам** потребителей.

Математическая модель транспортной задачи

Найти переменные задачи $X = (x_{ij}), i = 1,2,\ldots n,\; j = 1,2,\ldots m,$

удовлетворяющие системе ограничений ,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

а также условию неотрицательности переменных
и обеспечивающие минимум целевой функции

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Закрытая транспортная задача

Пусть на складах A1, A2, A3, A4, A5 хранится однотипная продукция в количестве соответственно 100, 150, 350, 200, 200 единиц.

Эту продукцию необходимо доставить потребителям B1, B2, B3, B4, B5 по их заказам: 100, 200, 200, 300, 200 единиц соответственно.

Стоимость перевозки одной единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения задается следующей таблицей:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	4	3	5	2	3
A2	7	1	2	3	1
A3	9	2	4	5	6
A4	1	3	6	4	10
A5	5	8	15	6	15

Табличная постановка задачи

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	4	3	5	2	3	100
A2	7	1	2	3	1	150
A3	9	2	4	5	6	350
A4	1	3	6	4	10	200
A5	5	8	15	6	15	200
Потребно сти	100	200	200	300	200	**1000**

Математическая модель

1. Введение переменных

X_{11} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 1 потребителю;

X_{12} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 2 потребителю;

X_{13} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 3 потребителю;

X_{14} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 4 потребителю;

X_{15} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 5 потребителю;

Математическая модель

1. Введение переменных

X_{21} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 1 потребителю;

X_{22} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 2 потребителю;

X_{23} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 3 потребителю;

X_{24} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 4 потребителю;

X_{25} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 5 потребителю;

и тд.

Математическая модель

1. Введение переменных

Общая запись

X_{ij}- кол-во груза которое нужно вести от i поставщика j потребителю, где i=1..5, j=1..5

Математическая модель

2. Определение целевой функции

$F=4x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+2x_{14}+3x_{15}+7x_{21}+x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+x_{25}+$
$9x_{31}+2x_{32}+4x_{33}+5x_{34}+6x_{35}+x_{41}+3x_{42}+6x_{43}+4x_{44}+10x_{45}+5x_{51}+$
$+8x_{52}+15x_{53}+6x_{54}+15x_{55}$

Математическая модель

2. Ограничения

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=100$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=150$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=350$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=200$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=200$

Математическая модель

2. Ограничения

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=100$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=200$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=200$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=300$

$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=200$

$X_{ij}>=0$

демонстрация

Транспортная задача 2

Три поставщика одного и того же продукта располагают в планируемый период следующими запасами этого продукта: первый- 120 условных единиц, второй- 100 и третий 80 единиц. Этот продукт должен быть перевезен к трем потребителям, спросы которых соответственно равны 90, 90 и 120 условных единиц. Приведенная ниже таблица содержит показатели затрат, связанных с перевозкой продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт потребления. Требуется перевезти продукт с минимальными затратами.

Поставщики	Потребители и их спрос			Запасы
	А	Б	В	
I	7	6	4	120
II	3	8	5	100
III	2	3	7	80
Спрос	90	90	120	

Транспортная задача 3

Заводы фирмы расположены в городах Минске и Витебске. Они доставляют товары на склады городов Могилев, Гомель и Брест. Затраты на перевозку 1 т товара представлены в таблице.

Заводы	Склады			Запасы
	Могилев	Гомель	Брест	
Минск	210	308	349	800
Витебск	164	342	626	500
Спрос	400	600	300	

Завод в Минске выпускает 800 т товаров, а в Витебске – 500 т. Могилевский склад вмещает 400 т, Гомельский – 600 т, а Брестский - 300 т. Как следует транспортировать товар для минимизации цен на перевозки.